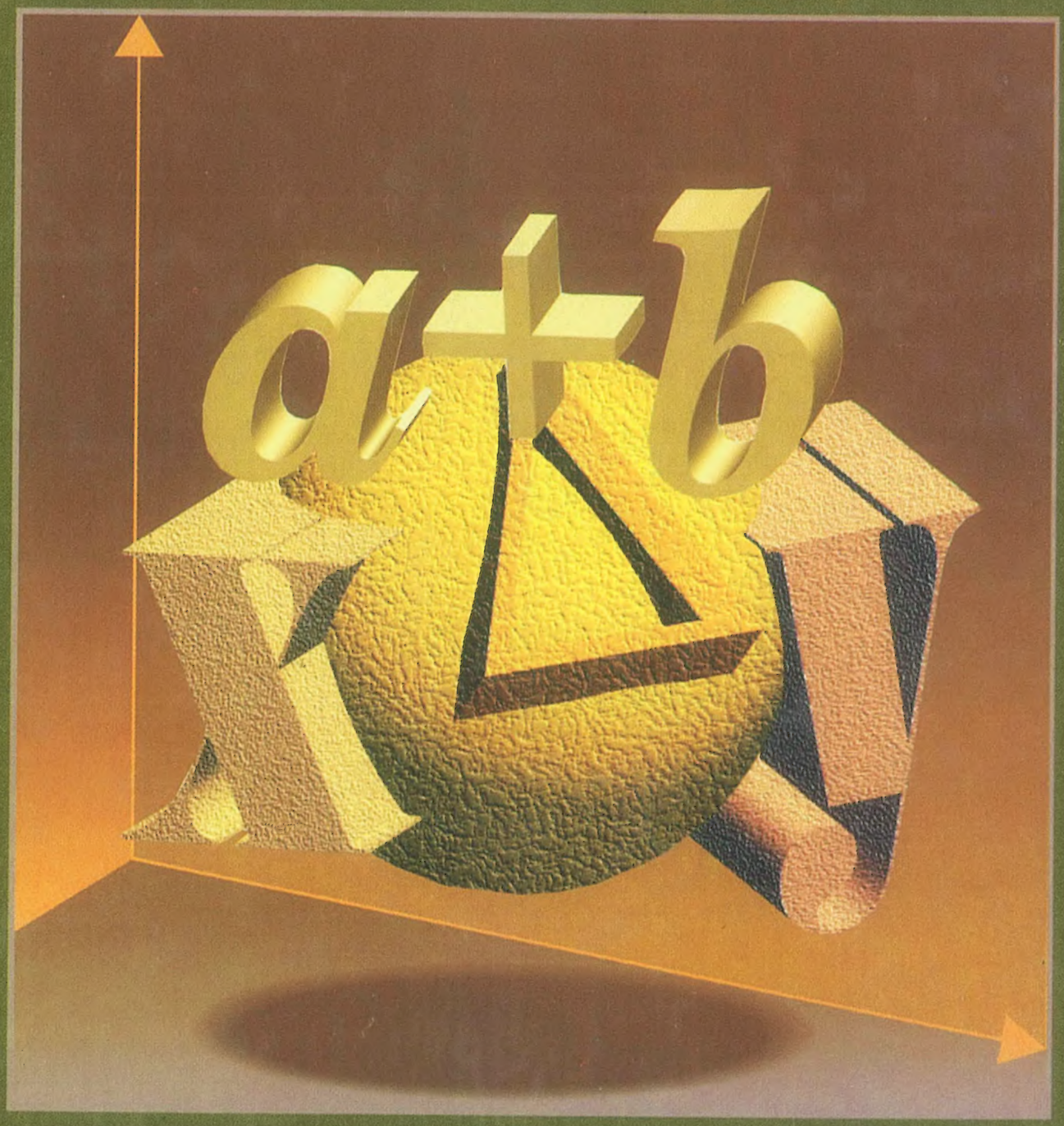
Р.П.Ушаков

Повторювальний курс МАТЕМАТИКИ

Навчальний ПОСІБНИК



Р.П.Ушаков

Повторювальний курс МАТЕМАТИКИ

За редакцією
члена-кореспондента НАН України
М. Й. Ядренка

Рекомендовано
Міністерством освіти
України як посібник для учнів
середніх закладів освіти

Київ
"ТЕХНІКА"
1999

ББК 22.1я2
У 93
УДК 51(075)

Рецензент д-р пед. наук проф. З. І. Слєпкань.

Ушаков Р. П.

У 93 Повторювальний курс математики: Посібник для учнів серед. закладів освіти / За ред. М. Й. Ядренка. – К.: Техніка, 1999. – 504 с.

ISBN 966-575-195-6

У посібнику надано в стислій формі теоретичний матеріал шкільного курсу математики (означення, формули, теореми). Багато уваги приділено методам розв'язання задач. Кожен параграф супроводжується достатньою кількістю прикладів, до яких наведено відповіді.

Розрахований на учнів загальноосвітніх шкіл, гімназій, коледжів та закладів професійно-технічної освіти.

У $\frac{1602010000-009}{202-99}$ Без оголош.

ББК 22.1я2

ISBN 966-575-195-6

© Р. П. Ушаков, 1999

ПЕРЕДМОВА

У наш час математика знайшла широке застосування в усіх галузях людської діяльності. Це ставить підвищені вимоги до математичної підготовки молоді. Практика зумовила необхідність появи посібників, де в стислій і систематизованій формі наведено весь матеріал шкільного курсу математики. Перед Вами одна з таких книжок.

Весь матеріал розподілено на 17 тем. Кожна тема містить декілька параграфів, а кожний параграф – декілька дрібних пунктів.

Деякі важливі теми («Рівняння та нерівності», «Границі», «Похідна», «Інтеграл», «Площі та об'єми») висвітлено ширше і глибше, ніж у шкільних підручниках.

Виклад матеріалу супроводжується достатньою кількістю детально розв'язаних задач і прикладів, що складають важливу частину книжки. Раджу уважно переглянути ці розв'язання, бо вони органічно доповнюють теоретичний матеріал. Деякі задачі (або вправи) розв'язано кількома способами, щоб читач зрозумів механізм застосування арсеналу математичних методів. Початок і кінець розв'язання або доведення позначено зірочками (*... *). Кожен параграф містить вправи для самостійного розв'язання з відповідями і вказівками.

У кінці посібника наведено дадатки, де зібрано всі найважливіші формули шкільного курсу математики.

Книжку адресовано учням шкіл, ліцеїв, гімназій, закладів професійно-технічної освіти, а також особам, які бажають поновити свої знання з математики. Певна кількість задач і прикладів пропонувалась на вступних іспитах у вищі навчальні заклади, отже, вона стане в пригоді й абітурієнтам. Вчитель має змогу швидко підготуватись до уроку. Можна користуватися книжкою і в позакласній роботі.

Бажаю читачам успіхів у повторенні курсу математики.

Автор

Тема 1. ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 1. Натуральні числа

1.1. Поняття «*число*» є одним з основних у математиці. Воно не означається. Для рахунку застосовуються числа 1, 2, 3, ..., що називаються *натуральними*. Будь-яке натуральне число в десятковій системі числення можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Запис $a = 398$ означає, що число a містить три сотні, дев'ять десятків та вісім одиниць, тобто $a = 398 = 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 8$.

Запис $n = \overline{abc}$ означає, що число n містить a сотень, b десятків та c одиниць, тобто

$$n = \overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Якщо запис натурального числа має k цифр ($k \geq 1$), то це число називають *k-значним*. Число 398 тризначне, число 1015 чотиризначне і т. д. Будь-яке *k-значне* число можна подати у вигляді $\overline{a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k} = a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k$. Множина натуральних чисел позначається так: $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; 4; ...\}$.

1.2. Сума і добуток двох натуральних чисел є натуральне число. Нехай a і b — натуральні числа. Запис $a + b = c$ означає, що число c є *сумою* чисел a і b.

Числа a і b називаються *доданками*. Запис $ab = c$ означає, що число c є добутком чисел a і b. Числа a і b називаються *співмножниками* (або *множниками*).

Дії додавання та множення мають такі властивості:

Закон	Додавання	Множення
Комутативний	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Асоціативний	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Дистрибутивний	$a(b + c) = ab + ac$	

Віднімання є дією, оберненою до дії додавання. Запис $a - b = c$ означає, що $c + b = a$. Тут a — *зменшуване*, b — *від'ємник*, c — *різниця*.

Ділення є дією, оберненою до дії множення. Запис $a : b = c$ означає, що $cb = a$. Тут a — *ділене*, b — *дільник*, c — *частка*. Іноді число a називають *кратним* числа b, а число b — *дільником* числа a.

Числовий вираз складається з чисел за допомогою арифметичних дій та дужок.

Спочатку виконують дії в дужках. Всередині дужок спочатку виконують дії множення, ділення, а потім додавання і віднімання.

Якщо виконати всі дії в указаному порядку, одержимо число, яке називається *значенням числового виразу*.

Приклади

1. Знайти значення числового виразу

$$((5672 - 4968) \cdot 70 - (9020 - 7996) : 16) \cdot 100 + 9600 \cdot 408 - 781\,170 : 390.$$

(порядок дій: 1, 2, 5, 3, 4, 6, 9, 7, 10, 8)

* Над знаками арифметичних дій запишемо порядок їх виконання, а потім виконаємо ці дії: 1) 5672 — 4968 = 704; 2) 704·70 = 49 280; 3) 9020 — 7996 = 1024; 4) 1024 : 16 = =64; 5) 49 280 — 64 = 49 216; 6) 49 216·100 = 4 921 600 ; 7) 9600·408 = 3 916 800; 8) 781 170 : 390 = 2003; 9) 4 921 600 + 3 916 800 = 8 838 400; 10) 8 838 400 — 2003 = = 8 836 397. Відповідь: 8 836 397. *

2. Знайти значення числового виразу

$$((83\,325^{2} - 26\,719\,146^{1} : 426^{3})^{5} \cdot 170^{4} + 12\,814\,173^{6} : 381^{8})^{7} \cdot 7 - 390 \cdot 787.$$

* Визначивши порядок арифметичних дій, виконаємо їх: 1) 26 719 146 . 426 = = 62 721; 2) 83 325 — 62 721 = 20 604; 3) 20 604 · 170 = 3 502 680; 4) 12 814 173 : 381 = = 33 633; 5) 3 502 680 + 33 633 = 3 536 313; 6) 3 536 313· 7 = 24 754 191; 7) 390·787 = = 306 930; 8) 24 754 191—306 930 = 24 447 261. Відповідь: 24 447 261.*

1.3. Нехай a і b натуральні числа, причому $a > b$, тоді існує (і причому єдина) пара натуральних чисел q і r така, що: 1) $a = bq + r$, 2) $0 \le r < b$.

Тут число a називається діленим, число b — дільником, число q — часткою, r — *остачею.*

Наприклад, $37 = 12 \cdot 3 + 1$; $57 = 16 \cdot 3 + 9$. Отже, при діленні числа 37 на 12 одержується остача 1, при діленні числа 57 на 16 одержується остача 9. Якщо $r = 0$, то кажуть, що a ділиться на b без остачі.

Числа, що мають вигляд $a = 2n$, де n — натуральне число, називаються *парними.* Вони діляться на 2 без остачі.

Числа, що мають вигляд $a = 2n + 1$, де n — натуральне число, називаються *непарними.* Непарне число при діленні на 2 дає остачу 1.

Будь-яке натуральне число при діленні на 3 дає остачу, що дорівнює 0, 1 або 2. Отже, будь-яке натуральне число можна подати у вигляді $a = 3n$, $a = 3n + 1$ або $a = 3n + 2$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$

Аналогічні міркування приводять до висновку, що будь-яке натуральне число можна подати у вигляді $a = 4n$, $a = 4n + 1$, $a = 4n + 2$ або $a = 4n + 3$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$

І взагалі, якщо p — натуральне число, то будь-яке натуральне число a можна подати у вигляді $a = pn$, $a = pn + 1$, $a = pn + 2$, ..., $a = pn + p - 1$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$

Точним квадратом називається число, що є квадратом натурального числа.

Приклади

1. Чи може точний квадрат при діленні на 3 дати остачу 2?

* Якщо a — натуральне число, то $a = 3n$, $a = 3n + 1$ або $a = 3n + 2$. Тоді $a^2 = (3n)^2 = 3k$, $a^2 = (3n + 1)^2 = 3k + 1$ або $a^2 = (3n + 2)^2 = 3k + 1$, отже, рівність $a^2 = 3k + 2$ неможлива. Відповідь: не може.*

2. Чи може точний квадрат закінчуватися цифрами 54?

* Помітимо, що якщо точний квадрат a закінчується цифрами 54, то $a = 4n + 2$. Якщо b — натуральне число, то $b = 4n$, $b = 4n + 1$, $b = 4n + 2$ або $b = 4n + 3$. Тоді $b^2 = (4n)^2 = 4k$, $b^2 = (4n + 1)^2 = 4k + 1$, $b^2 = (4n + 2)^2 = 4k$, $b^2=(4k + 3)^2=4k + 1$, отже, рівність $b^2=4n+2$ неможлива. Відповідь: не може.*

1.4. Для того щоб дізнатися, чи ділиться натуральне число a на натуральне число b, не обов'язково виконувати дію ділення. У раді випадків на це питання можна відповісти за допомогою ознак подільності.

Ознака подільності суми. Якщо кожен із доданків ділиться на натуральне число b, то і сума ділиться на b.

Ознака подільності добутку. Якщо хоч один із співмножників ділиться на натуральне число b, то і добуток ділиться на b.

Ознака подільності на 5. Натуральне число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра 0 або 5.

Ознака подільності на 10. Натуральне число ділиться на 10 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра 0.

Ознака подільності на 2. Натуральне число ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 2.

Ознака подільності на 4. Натуральне k-значне число ($k \geq 3$) ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли його останні дві цифри утворюють число, що ділиться на 4.

* $a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-2}}\, 100 + \overline{a_{k-1} a_k} = 4m + \overline{a_{k-1} a_k}$. *

Звідси видно, що натуральне число a ділиться або не ділиться на 4 одночасно з числом $\overline{a_{k-1} a_k}$. *

Ознаки подільності на 3 і 9. Натуральне число ділиться на 3 (на 9) тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3 (на 9).

* $a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k} = 10^{k-1} a_1 + 10^{k-2} a_2 + \ldots + 10 a_{k-1} + a_k = (9n_1 + 1)\, a_1 +$
$+ (9n_2 + 1)\, a_2 + \ldots + (9 + 1)\, a_{k-1} + a_k = 9n + a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Звідси видно, що натуральне число a ділиться на 9 (на 3) одночасно з числом $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. *

Ознака подільності на 6. Натуральне число a ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться одночасно на 2 і на 3.

Теорема. *Із n послідовних натуральних чисел a, $a + 1$, $a + 2$, ..., $a + n - 1$ одне і тільки одне ділиться на n.*

* Якщо $a = nq$, теорема справедлива. Нехай $a = nq + l$, де $1 \leq l \leq n - 1$. Ясно, що число $a + (n - l)$ міститься серед чисел a, $a + 1$, ..., $a + n - 1$. З іншого боку, помітимо, що $a + (n - l) = nq + l + (n - l) = n(q + 1)$, отже, серед цих n чисел тільки одне ділиться на n.*

Наслідок. Якщо n натуральне число, то число $n(n + 1)$ ділиться на 2, число $n(n + 1)(n + 2)$ ділиться на 3, число $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ ділиться на 4 і т.д.

1.5. Натуральне число a, більше за одиницю, називається *простим*, якщо воно має лише два дільники: 1 і a. Простими є числа 2, 3, 5, 7 і т. д.

Якщо натуральне число має більше ніж два дільники, воно називається *складеним*. Складеними є числа 4, 6, 8, 9 і т. д. Число 1 не є ані простим, ані складеним.

Теорема. *Серед натуральних чисел є безліч простих.*

* Припустимо, що існує скінченне число простих чисел: 2, 3, 5, 7, 11, ..., p. Розглянемо число $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$. Оскільки $N > p$, то N — складене число (адже за припущенням немає простого числа, більшого за p). Таким чином, N ділиться на якесь просте число. Але N не ділиться на жодне з простих чисел 2, 3, 5, ..., p, і ми приходимо до протиріччя.*

Щоб розкласти натуральне число на прості множники, його послідовно ділять на 2, 3, 5 і т. д.

Приклади

1. Розкласти число 148 на прості множники.

* Результати послідовного ділення числа 148 на 2, 3 і т. д. покажемо у вигляді таблиці:

148	74	37
2	2	37

. Отже, $148 = 2 \cdot 2 \cdot 37 = 2^2 \cdot 37$. Відповідь: $2^2 \cdot 37$. *

2. Розкласти число 180 на прості множники.

* Складаємо таблицю:

180	90	45	15	5
2	2	3	3	5

. Отже, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Відповідь: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. *

Теорема (основна теорема арифметики). *Будь-яке натуральне число, більше за 1, можна єдиним чином (з точністю до зміни порядку співмножників) подати у вигляді добутку простих чисел.*

Вираз $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ називається канонічним розкладом натурального числа a на прості співмножники. Тут $p_1, p_2, ..., p_k$ — прості числа, $n_1, n_2, ..., n_k$ — натуральні числа.

Як ми бачили для числа 180, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = 1$.

1.6. Якщо кожне з натуральних чисел a, b ділиться на натуральне число c, то c називається спільним дільником чисел a, b. Будь-які два натуральні числа a, b мають принаймні один спільний дільник — число 1. Якщо числа a, b мають декілька спільних дільників, то найбільший із них називається найбільшим спільним дільником чисел a, b, який позначається так: Д (a, b). Якщо Д $(a, b) = 1$, числа a, b називаються взаємно простими. Найбільший спільний дільник чисел a, b є добутком усіх спільних простих дільників цих чисел.

Приклади

1. Знайти Д (36, 48).

* $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $48 = 2^4 \cdot 3$. Отже, Д (36, 48) $= 2^2 \cdot 3 = 12$. Відповідь: 12.*

2. Знайти Д (70, 105).

* $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Отже, Д (70, 105) $= 5 \cdot 7 = 35$. Відповідь: 35.*

3. Знайти Д (1334, 6225).

* $1334 = 2 \cdot 23 \cdot 29$; $6225 = 3 \cdot 5^2 \cdot 83$. Числа 1334 і 6225 не мають спільних простих дільників, отже, вони взаємно прості і Д (1334, 6225) = 1. Відповідь: 1.*

Як бачимо з прикладу 3, знаходження Д (a, b) може бути досить громіздким.

Існує простий спосіб знаходження Д (a, b) — так званий алгоритм Евкліда*.

Нехай дано два натуральних числа a і b, причому $a > b$. Ділимо a на b: $a = bq + r_1$ $(0 \le r_1 < b)$; ділимо b на r_1: $b = r_1 q_1 + r_2$ $(0 \le r_2 < r_1)$; ділимо r_1 на

*Евклід — древньогрецький математик.

r_2: $r_1 = r_2q_2 + r_3$ $(0 \le r_3 < r_2)$. Продовжуємо цей процес. Оскільки $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, то через скінченну кількість кроків одержимо остачу $r_k = 0$. Ділення припиняється. Остання відмінна від нуля остача і є найбільшим спільним дільником чисел a, b. Отже, $r_{k-1} = Д(a, b)$.

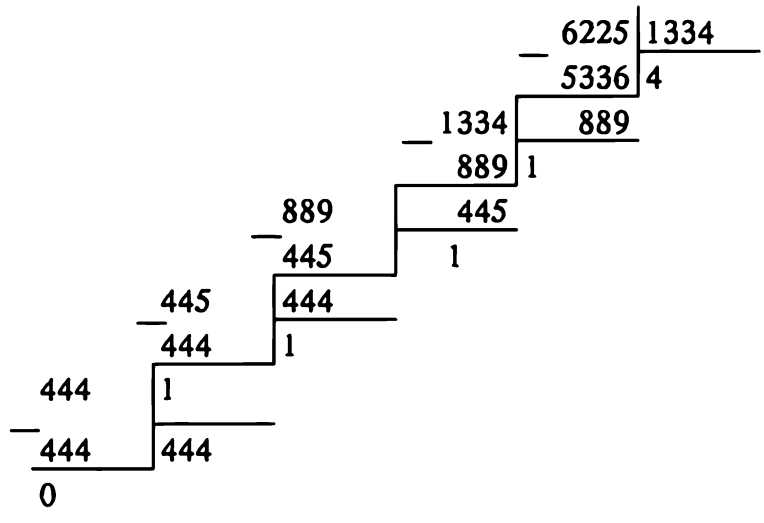
Покажемо цей алгоритм для чисел із прикладу 3:

$6225 = 1334 \cdot 4 + 889$; $1334 = 889 \cdot 1 + 445$;

$889 = 445 \cdot 1 + 444$; $445 = 444 \cdot 1 + 1$; $444 = 1 \cdot 444$.

Остання не рівна нулю остача дорівнює одиниці.

Алгоритм Евкліда зручно робити за допомогою ділення «кутом»:



Наведемо формальне доведення алгоритму Евкліда.

* Процес послідовного ділення запишемо так: $a = bq + r_1$, $b = r_1q_1 + r_2$, $r_1 = r_2q_2 + r_3$, ..., $r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k$, $r_{k-1} = r_kq_k$. Ясно, що $Д(r_k, r_{k-1}) = r_k$, $Д(r_{k-2}, r_{k-1}) = r_k$, ..., $Д(r_1, r_2) = r_k$, $Д(b, r_1) = r_k$, $Д(a, b) = r_k$.*

Відмітимо, що найбільший спільний дільник можна визначати для трьох, чотирьох і більше натуральних чисел.

Приклад

4. Знайти Д (48, 102, 208).

* $48 = 2^4 \cdot 3$, $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, $208 = 2^4 \cdot 13$. Отже, Д(48, 102, 208) = 2. Відповідь: 2.*

1.7. Натуральні числа a і b мають безліч спільних кратних. Наприклад: ab, $2ab$, $3ab$, ... Найменше з усіх спільних кратних чисел a, b називається *найменшим спільним кратним* цих чисел і позначається так: $K(a, b)$.

Щоб знайти найменше спільне кратне чисел a, b, треба розкласти ці числа на прості дільники і знайти добуток усіх простих дільників, взявши кожен із них із найбільшим показником.

Приклади

1. Знайти К (2560, 3160).

* $2560 = 2^9 \cdot 5$; $3160 = 2^3 \cdot 5 \cdot 79$. К (2560, 3160) $= 2^9 \cdot 5 \cdot 79 = 2\,022\,400$. Відповідь: 2 022 400. *

2. Знайти К (3042, 5256).

* $3042 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13^2$; $5256 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 73$. Тепер маємо К (3042, 5256) = $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \cdot 73 = 888\,264$. Відповідь: 888 264.*

Відмітимо, що К (a, b) містить усі прості дільники числа a і ті прості дільники числа b, які не є спільними у чисел a і b. Отже, $К(a, b) = a \dfrac{b}{Д(a, b)}$, звідки $К(a, b)\, Д(a, b) = ab$.

Можна також знаходити найменше спільне кратне декількох натуральних чисел.

Приклад

3. Знайти К (4148, 5256, 8204).

* $4148 = 2^2 \cdot 17 \cdot 61$; $5256 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 73$; $8204 = 2^2 \cdot 7 \cdot 293$. Отже, К (4148, 5256, 8204) $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 293 = 11\,178\,918\,072$. Відповідь: 11 178 918 072.*

Вправи

1. Знайти значення числових виразів:

а) ((3133 − 2088) · 63 − (8165 − 7757) : 17) · 25 +420 · 513 − 91 590 : 213;

б) ((4259 + 3141) · 13 : 37 − (7128 + 2472) : 48) : 120.

2. Чи може точний квадрат при діленні на 4 дати остачу 3?

3. Чи може точний квадрат закінчуватися однією із цифр 2, 3, 7, 8?

4. Чи можуть останні дві цифри точного квадрату бути непарними?

5. Чи може точний квадрат закінчуватися цифрами 74?

6. У написанні деякого натурального числа є шість одиниць і довільна кількість нулів. Чи може це число бути точним квадратом?

Вказівка. Якщо число ділиться на 3, то його точний квадрат ділиться на 9.

7. Яку цифру треба записати замість знака * в числі 7*7, щоб одержане число ділилося на 9?

8. Поставити замість пропусків у числі 1_2_ дві цифри так, щоб одержане число ділилося на 72.

9. Чи можуть 100 послідовних натуральних чисел бути складеними?

10. Скільки одиниць треба приписати до числа 1 111 111, щоб одержане число ділилося на 13?

11. Знайти найменше натуральне число, яке більше за одиницю і при діленні на кожне з чисел 2, 3, 5 дає остачу 1.

12. Розв'язати рівняння $\overline{xy} = 2\,\overline{yx} + 5$.

13. Двозначне число a помножили на 5, потім переставили цифри в числі a і відняли від числа $5a$. В результаті дістали 4. Знайти число a.

14. Знайти: а) Д (198, 105); б) Д (84, 160, 132); в) Д (7722, 1328); г) Д (3524, 7311, 4608).

15. Довести, що Д (a, b, c) = Д $(a,$ Д $(b, c))$ = Д (Д $(a, b), c)$ = Д $(b,$ Д $(a, c))$.

16. Знайти: а) К (11, 12); б) К (1403, 391); в) К (12, 100, 75); г) К (277, 391, 452).

§ 2. Додатні дроби

2.1. *Звичайним дробом* називається число виду $\dfrac{m}{n}$, де m, n — натуральні числа $\left(\text{наприклад, } \dfrac{3}{5}, \dfrac{10}{7}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{15}\right)$. Числа m і n відповідно називаються *чисель-*

ником та *знаменником* дробу. Дробова риска в запису $\frac{m}{n}$ замінює собою знак ділення. Отже, $\frac{m}{n} = m : n$.

Якщо $m < n$, дріб називається *правильним* (наприклад, $\frac{2}{8}, \frac{1}{3}$). Якщо $m \geq n$, дріб називається *неправильним* (наприклад, $\frac{7}{3}, \frac{10}{2}, \frac{11}{4}$).

Якщо m ділиться на n, то дріб $\frac{m}{n}$ є натуральним числом. Якщо ж дріб неправильний і m не ділиться на n, то такий дріб можна подати у вигляді суми натурального числа і правильного дробу.

Приклад

Подати дріб $\frac{35}{11}$ у вигляді суми натурального числа і правильного дробу.

* $\frac{35}{11} = \frac{33+2}{11} = \frac{33}{11} + \frac{2}{11} = 3 + \frac{2}{11}$. Відповідь: $3 + \frac{2}{11}$. *

Суму натурального числа з правильним дробом називають *змішаним числом* і записують без знака додавання: $3\frac{2}{11}, 5\frac{7}{13}, 2\frac{1}{3}$ тощо.

Змішане число складається з цілої і дробової частин. Будь-яке змішане число можна записати у вигляді неправильного дробу, наприклад: $4\frac{7}{13} = 4 + \frac{7}{13} = \frac{52}{13} + \frac{7}{13} = \frac{59}{13}$.

2.2. Дроби $\frac{m}{n}$ та $\frac{p}{q}$ вважаються *рівними*, якщо $mq = pn$.

Основна властивість звичайного дробу: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне і те саме натуральне число, одержиться дріб, що дорівнює даному. Ця властивість випливає з рівності $\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$.

Нехай є дріб $\frac{3}{21}$. Розділимо на 3 його чисельник і знаменник. Одержимо дріб $\frac{1}{7}$. Отже, $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$. Така дія називається *скороченням дробу*.

Якщо чисельник і знаменник взаємно прості числа, дріб називається *нескоротним*. Приклади нескоротних дробів: $\frac{5}{11}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}$.

За допомогою основної властивості дробу можна декілька дробів звести до спільного знаменника, тобто замінити ці дроби рівними, але з однаковими знаменниками.

Приклад

1. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{2}{7}$ та $\frac{3}{4}$.

* $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{8}{28}$; $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$. Відповідь: $\frac{8}{28}$ і $\frac{21}{28}$. *

Іноді зводять дроби до найменшого спільного знаменника, тобто до найменшого спільного кратного знаменників даних дробів.

Приклад

2. Звести до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{11}$ та $\frac{4}{7}$.

* К (5, 11, 7) = 385. Тепер маємо $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 77}{5 \cdot 77} = \frac{231}{385}$, $\frac{2}{11} = \frac{2 \cdot 35}{11 \cdot 35} = \frac{70}{385}$, $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 55}{7 \cdot 55} = \frac{220}{385}$. Відповідь: $\frac{231}{385}$, $\frac{70}{385}$, $\frac{220}{385}$. *

Зведення дробів до спільного знаменника дає змогу порівнювати будь-які звичайні дроби.

Приклади

3. Порівняти дроби $\frac{7}{13}$ та $\frac{4}{7}$.

* $\frac{7}{13} = \frac{49}{91}$, $\frac{4}{7} = \frac{52}{91}$. Із двох дробів з однаковими знаменниками більший той, що має більший чисельник. Отже, $\frac{49}{91} < \frac{52}{91}$ і $\frac{7}{13} < \frac{4}{7}$. Відповідь: $\frac{7}{13} < \frac{4}{7}$.*

4. Порівняти дроби $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$ та $\frac{9}{14}$.

*К (9, 12, 14) = 252. Далі маємо: $\frac{5}{9} = \frac{140}{252}$, $\frac{7}{12} = \frac{147}{252}$, $\frac{9}{14} = \frac{162}{252}$. Оскільки $\frac{140}{252} < \frac{147}{252} < \frac{162}{252}$, то $\frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{9}{14}$. Відповідь: $\frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{9}{14}$. *

2.3. *Правило додавання дробів.* Щоб додати два дроби з однаковими знаменниками, додають їх чисельники, а знаменник беруть той самий:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Якщо ж дроби мають різні знаменники, то їх приводять до спільного знаменника, а потім додають:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}.$$

Приклад

1. Додати дроби $\frac{1}{7}$ і $\frac{5}{7}$.

* $\frac{1}{7} + \frac{5}{7} = \frac{1+5}{7} = \frac{6}{7}$. Відповідь: $\frac{6}{7}$. *

2. Додати дроби $\frac{13}{17}$ і $\frac{12}{19}$.

* $\frac{13}{17} + \frac{12}{19} = \frac{13 \cdot 19 + 12 \cdot 17}{17 \cdot 19} = \frac{247 + 204}{323} = \frac{451}{323} = 1\frac{128}{323}$. Відповідь: $1\frac{128}{323}$. *

Правило віднімання дробів:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}\,(a>b).\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}\,(ad>bc).$$

Правило множення дробів:

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Правило ділення дробів:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Порядок виконання дій із дробами такий самий, як і з цілими числами.

Приклади

3. Виконати дії $3\frac{4}{5}+5\frac{2}{7}$.

* $3\frac{4}{5}+5\frac{2}{7}=8+\frac{4}{5}+\frac{2}{7}=8+\frac{4\cdot7+2\cdot5}{35}=8+\frac{38}{35}=9\frac{3}{35}$. Відповідь: $9\frac{3}{35}$. *

4. Виконати дії $4\frac{2}{5}\cdot5\frac{6}{11}$.

* $4\frac{2}{5}\cdot5\frac{6}{11}=\frac{22}{5}\cdot\frac{61}{11}=\frac{2\cdot61}{5}=\frac{122}{5}=24\frac{2}{5}$. Відповідь: $24\frac{2}{5}$. *

5. Виконати дії $3\frac{3}{7}\cdot4$.

* $3\frac{3}{7}\cdot4=\frac{24}{7}\cdot\frac{4}{1}=\frac{96}{7}=13\frac{5}{7}$. Відповідь: $13\frac{5}{7}$.*

6. Виконати дії $22\frac{7}{18}:\left(41\frac{29}{72}-\left(18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}\right)\cdot\left(10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right)\right)$.

* 1) $18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}=13+\frac{7}{8}-\frac{2}{8}=13\frac{5}{8}$, 2) $10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}=2+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=2+\frac{9-4}{6}=2\frac{5}{6}$,

3) $13\frac{5}{8}\cdot2\frac{5}{6}=\frac{109}{8}\cdot\frac{17}{6}=\frac{1853}{48}=38\frac{29}{48}$, 4) $41\frac{29}{72}-38\frac{29}{48}=2+\frac{101}{72}-\frac{29}{48}=$

$=2+\frac{202-87}{144}=2\frac{115}{144}$,5) $22\frac{7}{18}:2\frac{115}{144}=\frac{403}{18}:\frac{403}{144}=\frac{144}{18}=8$. Відповідь: 8. *

2.4. Якщо знаменик дробу дорівнює 10, 100, 1000, ..., дріб називається *десятковим.* Для запису десяткового дробу існує спеціальна форма: $\frac{4}{10}=0{,}4$; $\frac{37}{100}=0{,}37$; $\frac{561}{1000}=0{,}561$ і т. д. Таким же чином можна записати і змішане число: $3\frac{15}{100}=3{,}15$; $4\frac{7}{10}=4{,}7$ і т. п.

Десятковий дріб легко подати у вигляді звичайного: $0{,}51=\frac{51}{100}$; $2{,}13=\frac{213}{100}$ тощо.

Для того щоб подати звичайний дріб у вигляді десяткового, ділять чисельник дробу на його знаменник.

Приклади

1. Подати звичайний дріб $\frac{5}{8}$ у вигляді десяткового.*

*
$$\begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \underline{48} & \overline{0,625} \\ 20 & \\ \underline{16} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $\frac{5}{8} = 0,625$. Відповідь: 0,625. *

2. Подати звичайний дріб $\frac{7}{16}$ у вигляді десяткового

*
$$\begin{array}{r|l} 70 & 16 \\ \underline{64} & \overline{0,4375} \\ 60 & \\ \underline{48} & \\ 120 & \\ \underline{112} & \\ 80 & \\ \underline{80} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $\frac{7}{16} = 0,4375$. Відповідь: 0,4375. *

Одержані дроби 0,625 та 0,4375 мають назву *скінченних десяткових дробів.* Якщо дописати до скінченного десяткового дробу декілька нулів, дріб не зміниться: 0,275 = 0,2750 = 0,275 00 = 0,275 000 = ...

Для того щоб помножити скінченний десятковий дріб на 10^k, треба перенести кому на k цифр праворуч, наприклад: $10 \cdot 0,364 = 3,64$; $100 \cdot 0,572 = 57,2$; $1000 \cdot 1,2834 = 1283,4$. Відповідно у разі ділення скінченного десяткового дробу на 10^k кому переносять на k цифр ліворуч, наприклад: $1,26 : 10 = 0,126$; $213,78 : 100 = 2,1378$; $12,54 : 1000 = 0,012\ 54$.

Не завжди під час перетворення звичайного дробу в десятковий можна одержати скінченний дріб. Наприклад, якщо спробувати подати дріб $\frac{5}{6}$ у вигляді десяткового, одержимо 0,8333... Такий дріб домовились записувати у вигляді 0,8(3). Називається він *десятковим нескінченним періодичним дробом.* От іще приклади десяткових нескінченних періодичних дробів: 0,1(24) = 0,124 24...; 2,35(218) = 2,352 182 182 18...

Група цифр, що повторюється, називається *періодом дробу.* Якщо період починається одразу після коми, дріб називається *чисто періодичним,* наприклад: 0,(2); 1,(37). Якщо період починається не одразу після коми, дріб називається *змішано періодичним,* наприклад: 0,2(4); 1,31(45).

Теорема. *Будь-який звичайний дріб можна подати у вигляді десяткового скінченного або десяткового нескінченного періодичного дробу.*

* Нехай є звичайний дріб $\frac{a}{b}$. Будемо ділити число $a \cdot 10^k$ на b (k визначається з подвійної нерівності $a \cdot 10^{k-1} < b < a \cdot 10^k$, a і b вважаємо взаємно простими). Можливо, $a \cdot 10^k$ ділиться на b. Це буде лише у випадку, коли $b = 2^m \cdot 5^l$ де m, l — натуральні числа. У цьому разі одержуємо десятковий скінченний дріб. Якщо ж $b \neq 2^m \cdot 5^l$, одержимо десятковий нескінченний періодичний дріб.

Дійсно, у разі ділення $a \cdot 10^k$ на b остачі повинні бути менші ніж b, отже, остач не більше ніж b. Це означає, що не більше, як через b кроків одна з остач повториться, і почнеться повторення цифр. *

Приклад

3. Подати звичайний дріб $\frac{5}{7}$ у вигляді десяткового.

* Оскільки $5 < 7 < 50$, ділимо число 50 на 7. При цьому остача менша за 7. Виходить, всього є не більше ніж 7 варіантів для остачі: 0, 1, 2, ..., 6. Отже, якась остача повториться. Для того щоб дізнатись про це, розділимо 50 на 7, одержимо 7,142 857 1... (далі група цифр — період — буде повторюватись). Таким чином, $\frac{5}{7} = 0,(714\ 285)$. Відповідь: 0,(714285). *

Аифметичні дії зі скінченними десятковими дробами нагадують дії з натуральними числами. У разі додавання двох скінченних десяткових дробів треба записати їх один під другим так, щоб однакові розряди були один під другим.

Приклад

4. Додати дроби 0,358 та 3,14.

* Помітимо, що 3,14 = 3,140, і запишемо дроби вказаним вище способом:

$$\begin{array}{r} 0,358 \\ +\ 3,140 \\ \hline 3,498 \end{array}.$$

Відповідь: 3,498. *

Аналогічно виконується і віднімання скінченних десяткових дробів.

Приклад

5. Знайти різницю чисел 7,52 і 0,6537.

* Маємо

$$\begin{array}{r} 7,5200 \\ -\ 0,6537 \\ \hline 6,8663. \end{array}$$

Відповідь: 6,8663. *

Щоб помножити скінченні десяткові дроби, треба перемножити натуральні числа, що одержуються після вилучення кми з даних дробів, а потім із правого боку відділити комою стільки цифр, скільки їх стоїть в обох дробах разом.

Приклад

6. Перемножити дроби 2,73 та 1,4.

* 273 · 14 = 3822. Після коми в обох дробах разом три цифри, отже, відділяємо з правого боку комою три цифри: 2,73 · 1,4 = 3,822. Відповідь: 3,822.*

Ділення скінченного десяткового дробу на скінченний десятковий дріб зводиться до ділення скінченного десяткового дробу на натуральне число. У разі ділення скінченного десяткового дробу на натуральне число кома ставиться після закінчення цілої частини. Якщо ціла частина діленого менша за дільник, то ціла частина частки дорівнює нулю.

Приклади

7. Виконати ділення: а) 35,1 : 13; б) 3,23 : 17.

* а)

35,1	13		
26	2,7		
91			
91			
0			

б)

3,23	17		
17	0,19		
153			
153			
0			

Відповідь: а) 2,7; б) 0,19. *

8. Виконати ділення: а) 4,32 : 2,4; б) 0,3045 : 14,5.

* а) 4,32 : 2,4 43,2 : 24; б) 3045 : 14,5 = 3,045 : 145;

43,2	24		
24	1,8		
192			
192			
0			

3,045	145		
290	0,021		
145			
145			
0			

Відповідь: а) 1,8; б) 0,021. *

При знаходженні значення виразу, що містить десяткові скінченні дроби, додержуються акого самого порядку виконання дій, що й зі звичайними дробами.

Приклад

9. Виконати дії $\dfrac{\left(\dfrac{9,126}{0,65}+0,46\right)7,18+1,45\cdot 28,2}{\left(2\dfrac{3}{4}-1\dfrac{13}{20}-0,1\right)\left(3,45^2-0,55^2\right)}$.

* 1) $\dfrac{9,126}{0,65}=\dfrac{912,6}{65}=14,04$; 2) 14,04+0,46 = 14,5; 3) 14,5·7,18=104,11; 4) 1,45·28,2= = 40,89; 5) 104,11 + 40,89 = 145; 6) $2\dfrac{3}{4}-1\dfrac{13}{20}=2,75-1,65=1,1$; 7) 1,1 — 0,1 = 1; 8) $3,45^2-0,55^2=(3,45-0,55)(3,45+0,55)=2,9\cdot 4=11,6$; 9) 1 · 11,6 = 11,6; 10) 145 : 11,6 = 1450 : 116 = 12,5. Відповідь: 12,5. *

Питання про дії з нескінченними десятковими дробами буде розглянуто пізніше.

Зауважимо, що під час множення нескінченного десяткового дробу на 10^k кома зміщується на k цифр у правий бік. Нехай $a = 3,(2) = 3,222\ldots$, тоді $10a = 32,(2) = 32,222\ldots$ Це міркування допомагає у разі перетворення нескінченного періодичного дробу в звичайний.

Приклади

10. Перетворити десятковий дріб 0,(51) у звичайний.

* $x = 0,(51) = 0,515151...$; $100x = 51,5151...$; розглянемо різницю $100x - x = 99x = 51$, звідки $x = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$. Відповідь: $\frac{17}{33}$. *

11. Перетворити десятковий дріб 2,3(458) у звичайний.

* $x = 2,3(458) = 2,345\,845\,8...$; $10x = 23,458\,458...$; $10\,000x = 23\,458,458\,458...$; маємо різницю $10\,000x - 10x = 9990x = 23\,435$, звідки $x = \frac{23\,435}{9990} = 2\frac{691}{1998}$.

Відповідь: $2\frac{691}{1998}$. *

Вправи

1. Подати дроби у вигляді змішаних чисел: а) $\frac{27}{19}$; б) $\frac{43}{21}$; в) $\frac{64}{17}$; г) $\frac{38}{11}$.

2. Звести до спільного знаменника дроби: а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{5}{8}$; в) $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{5}{8}, \frac{3}{11}$.

3. Порівняти дроби $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}$.

4. Виконати дії:

а) $\frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{2}{5}$; б) $2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 4\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} - \frac{3}{5}$; г) $13\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$;

д) $\dfrac{1\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{3\frac{4}{5} - 1\frac{9}{10}} + \dfrac{1 - 2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}$; е) $1\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{12}\right)$; є) $\frac{7}{9} \cdot 1\frac{2}{7} + 43\frac{3}{4} : 11\frac{2}{3} - 3\frac{18}{25} + 1\frac{1}{45}\left(37\frac{1}{2} : 2\frac{1}{12} - 1\frac{3}{23} \cdot 9\right) + \frac{47}{100}$.

5. Перетворити звичайний дріб у десятковий: а) $\frac{13}{25}$; б) $\frac{11}{20}$; в) $\frac{71}{125}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{6}{7}$; е) $\frac{14}{75}$.

6. Виконати дії:

а) $\dfrac{5,8 \cdot \frac{9}{29} + 13\frac{3}{5} : 4,25}{27,5\left(344\frac{1}{4} - 336,25\right)}$; б) $\dfrac{114,8\left(84,6 - 75\frac{1}{10}\right)}{50\frac{10}{11} \cdot 61,6 - 29,16 \cdot 100}$;

в) $\dfrac{\left(84,63 : 2,1 - \frac{7}{8} \cdot 35,2 + 2\frac{5}{42} - 7\frac{43}{48}\right) : 7\frac{25}{56}}{\left(14\frac{1}{6} - 3,2 : 4\right) : \left(17,25 : 2,3 + \frac{2}{15}\right)\frac{229}{802}}$.

7. Перетворити нескінченний періодичний десятковий дріб у звичайний: а) 0,(23); б) 2,0(17); в) 3,14(6); г) 0,14(15).

§ 3. Відношення, пропорція, процент

3.1. Частка від ділення a на b називається *відношенням чисел* a і b (позначається $a : b$).

Якщо $a : b = m$, то $a = bm$ і $b = a : m$.

Приклади

1. Перший мотоцикліст рухається рівномірно зі швидкістю 20 км/год, а другий — також рівномірно зі швидкістю 30 км/год. Як відносяться шляхи, які пройдуть ці мотоциклісти за однаковий час?

* Нехай мотоциклісти рухаються t год. Перший мотоцикліст за цей час проїде шлях S_1, а другий — S_2. Зрозуміло, що $S_1 = 20t$, а $S_2 = 30t$. Отже, $S_1 : S_2 = 20t : 30t = 2 : 3$. Відповідь: 2 : 3. *

2. Сторони двох квадратів дорівнюють відповідно 10 см і 20 см. Знайти відношення площ цих квадратів.

* Нехай S_1 та S_2 відповідно площі даних квадратів, тоді $S_1 = 100$ см^2, $S_2 = 400$ см^2. Отже, $S_2 : S_2 = 100 : 400 = 1 : 4$. Відповідь: 1 : 4. *

3.2. Рівність двох відношень називається *пропорцією*: $a : b = c : d$, або $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Числа b і c називаються *середніми*, а числа a і d — *крайніми* членами пропорції.

Основна властивість пропорції: *$ad = bc$ — добуток крайніх членів дорівнює добуткові середніх членів пропорції*. Ця властивість дає змогу знайти четвертий член пропорції, коли відомі три з них: якщо $\frac{x}{m} = \frac{n}{k}$, то $x = \frac{mn}{k}$.

Додамо одиницю до обох частин пропорції: $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, звідки $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Ми одержали пропорцію, похідну від даної.

Теорема 1. *Пропорція $\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd}$ є похідною від пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (m, n, p, q — цілі числа).*

* Нехай $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, тоді $a = kb$ і $c = kd$. Тепер маємо $\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mkb+nb}{pkb+qb} = \frac{mk+n}{pk+q}$, $\frac{mc+nd}{pc+qd} = \frac{mkd+nd}{pkd+qd} = \frac{mk+n}{pk+q}$. Теорему доведено. *

Надаючи числам m, n, p, q різних значень, одержимо безліч похідних пропорцій.

Поклавши $m = n = q = 1$, $p = 0$, маємо

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Поклавши $m = n = p = 1$, $q = -1$, маємо

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Поклавши $m = 2$, $n = 3$, $p = 1$, $q = 4$, маємо

$$\frac{2a+3b}{a+4b} = \frac{2c+3d}{c+4d} \text{ і т. д.}$$

Нехай є дві пропорції: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ та $\frac{b}{c} = \frac{n}{p}$, тоді

$$a : b : c = m : n : p, \text{ або } \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}.$$

Одержаний вираз називається *подвоєною пропорцією.*
Похідною від подвоєної пропорції є пропорція

$$\frac{a + b + c}{m + n + p} = \frac{a}{m}.$$

Теорема 2. *Нехай є ряд рівних відношень* $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, *тоді*

$$\frac{t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n}{t_1 b_1 + t_2 b_2 + \ldots + t_n b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

* Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1. *

Приклади

1. Відомо, що $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Довести, що $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

* Якщо $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то $b^2 = ac$. Тепер маємо

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ac}{ac + c^2} = \frac{a(a + c)}{c(a + c)} = \frac{a}{c}. \ *$$

2. Відомо, що $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Довести, що $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2}{b^2}$.

* 1-й спосіб. Із прикладу 1 відомо, що $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Зауважимо, що $\frac{a}{c} = \frac{a}{c}\frac{a}{a} = \frac{a^2}{b^2}$, і це завершує доведення.

2-й спосіб. Нехай $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = t$. Тоді $b = \frac{a}{t}$ і $c = \frac{b}{t}$. Тепер маємо

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + \frac{a^2}{t^2}}{b^2 + \frac{b^2}{t^2}} = \frac{a^2(1 + \frac{1}{t^2})}{b^2(1 + \frac{1}{t^2})} = \frac{a^2}{b^2}. \ *$$

3. Відомо, що $\frac{2b + 2c - a}{x} = \frac{2c + 2a - b}{y} = \frac{2a + 2b - c}{z}$.

Довести, що $\frac{a}{2y + 2z - x} = \frac{b}{2z + 2x - y} = \frac{c}{2x + 2y - z}$.

* Зауважимо, що

$$1) \ \frac{4b + 4c - 2a}{2x} = \frac{4c + 4a - 2b}{2y} = \frac{-2a - 2b + c}{-z} =$$

$$= \frac{4b + 4c - 2a + 4c + 4a - 2b - 2a - 2b + c}{2x + 2y - z} = \frac{9c}{2x + 2y - z};$$

$$2) \ \frac{4c + 4a - 2b}{2y} = \frac{4a + 4b - 2c}{2z} = \frac{-2b - 2c + a}{-x} = \frac{9a}{2y + 2z - x};$$

$$3)\ \frac{4a+4b-2c}{2z}=\frac{4b+4c-2a}{2x}=\frac{-2c-2a+b}{-y}=\frac{9b}{2z+2x-y}.$$

Отже, $\frac{9c}{2x+2y-z}=\frac{9a}{2y+2z-x}=\frac{9b}{2z+2x-y}$ і $\frac{a}{2y+2z-x}=\frac{b}{2z+2x-y}=\frac{c}{2x+2y-z}$, що й треба було довести. *

3.3. Нехай $y = kx$, де k — стала величина (коефіцієнт пропорційності). Тоді $\frac{y}{x} = k$. У процесі зміни величин x і y їх відношення лишається незмінним. Такі величини називаються *прямо пропорційними*, а залежність y від x — *прямою пропорційністю*. Прикладом прямої пропорційності є залежність шляху від часу при рівномірному русі. На практиці часто зустрічаються випадки, коли треба якесь число поділити на частини, прямо пропорційні деяким числам.

Приклад

1. Поділити число 40 на частини, прямо пропорційні числам 3 і 5.

* Нехай x та y — невідомі числа. Тоді $x : y = 3 : 5$, отже, $x = 3t$, $y = 5t$, а $x + y = 8t = 40$, звідки $t = 5$ і $x = 15$, $y = 25$. Відповідь: 15 і 25. *

Правило. *Якщо поділити число a на частини, прямо пропорційні числам m і n, то дістанемо числа* $\frac{am}{m+n}$ *і* $\frac{an}{m+n}$.

Нехай $xy = k$, або $y = \frac{k}{x}$, де k — стала. Величини x і y змінюються так, що їх добуток лишається незмінним. Такі величини називаються *обернено пропорційними*, а залежність y від x — *оберненою пропорційністю.*

Нехай площа прямокутника — постійна величина. Тоді залежність його довжини від ширини є оберненою пропорційністю.

Приклади

2. Об'єкт, рухаючись рівномірно і прямолінійно, пройшов 90 км за 1,8 год. Який шлях він пройде за 3,6 год?

* При рівномірному прямолінійному русі $S = vt$, де S — шлях, v — швидкість, t — час руху. В даному випадку $90 = v \cdot 1{,}8$, звідки $v = \frac{90}{1{,}8} = 50\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Нехай S_1 — шуканий шлях. Тоді $S_1 = v \cdot 3{,}6 = 50 \cdot 3{,}6 = 180$ км. Відповідь: 180 км.*

Зауваження. Враховуючи пряму пропорційність між шляхом та часом, можна скласти пропорцію $\frac{90}{1{,}8} = \frac{S_1}{3{,}6}$, звідки $S_1 = 2 \cdot 90 = 180$ км.

3. Якщо 7 тракторів можуть зорати поле за 6 год, то за який час зорють поле 3 трактори?

* Кількість тракторів та час їх роботи — обернено пропорційні величини. Якщо x — шуканий час, то $7 \cdot 6 = 3x$, звідки $x = 14$ год. Відповідь: 14 год.

3.4. Дріб $\frac{1}{100} = 0{,}01$ називається *процентом* (*відсотком*) і має позначення 1 %. Таким чином, 0,4 = 40 %, 1,2 = 120 % і т. д.

У багатьох випадках частини величин виражають у процентах (виконання місячного плану, щорічний приріст капіталу тощо).

Три основні задачі на проценти:
1) знаходження процента від даного числа,
2) знаходження числа за даним його процентом,
3) знаходження процентного відношення чисел.

Правило 1. *n % від числа a дорівнюють* $\frac{an}{100}$.

Приклад

1. Знайти 23 % від числа 70.

* 1 % від числа 70 дорівнює $\frac{70}{100}$, отже, 23 % від числа 70 дорівнюють $\frac{23 \cdot 70}{100} = 16{,}1$. Відповідь: 16,1. *

Правило 2. *Якщо n % від числа a дорівнюють b, то* $a = \frac{b}{n}100$.

Приклад

2. 6 % деякого числа дорівнюють 210. Що це за число?

* 1 % шуканого числа дорівнює $\frac{210}{6}$, тому шукане число дорівнює $\frac{210}{6} \cdot 100 = 3500$. Відповідь: 3500. *

Правило 3. *Процентне відношення чисел a і b дорівнює* $\frac{a}{b}100$ %.

Приклад

3. Знайти процентне відношення чисел 36 і 48.

* Складемо пропорцію $\frac{48}{100} = \frac{36}{x}$, звідки $x = \frac{36 \cdot 100\%}{48} = 75$ %. Відповідь: 75 %. *

Крім розв'язування трьох основних задач із процентами, нерідко виникає необхідність визначити складні проценти. Наприклад, на рахунок до банку внесено суму A крб. Скільки грошей буде на рахунку через t років, якщо банк сплачує p % річних?

* Через 1 рік сума на рахунку дорівнюватиме $A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, через 2 роки $A\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \frac{p}{100}A\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, через 3 роки $A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$ і т. д. Через t років сума на рахунку становитиме $A_t = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$. *

Одержана формула має назву *формули складних процентів.*

Вправи

1. Перевірити правильність пропорцій:

а) 6,3 : 2,1 = 5,7 : 1,9; б) 4,1 : 0,4 = 16,4 : 1,6; в) $5\frac{3}{4} : 2{,}1 = 3{,}5 : 1\frac{32}{115}$.

2. Знайти x, якщо $3x : 1{,}5 = 2 : 5$.

3. Знайти невідомі члени пропорцій:

а) $4 : y = 5 : 7$; б) $7 : 9 = y : 4$; в) $4 : 9 : x = y : 3 : 7$.

4. Відомо, що $a(y + z) = b(z + x) = c(x + y)$, де $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ і $abc \neq 0$. Довести, що

$$\frac{x - y}{c(a - b)} = \frac{y - z}{a(b - c)} = \frac{z - x}{b(c - a)}.$$

5. Відомо, що $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. Довести, що $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$.

6. Поділити число 30 у відношенні 1 : 9.

7. Поділити число 300 у відношенні 1 : 2 : 3.

8. Поділити число 290 у відношенні $1 : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$.

9. Через трубу за 9 хв вливається $32\frac{1}{7}$ л води. Скільки води вливається через цю трубу за 20 хв?

10. Ребро куба збільшили на 10 %. На скільки процентів збільшився його об'єм?

§ 4. Дійсні числа

4.1. На прямій відмітимо початкову точку O, напрямок і одиничний відрізок. Така пряма називається *координатною прямою* (рис. 1.1.). Відкладаючи в заданому напрямку (звичайно праворуч) одиничні відрізки, одержимо точки, що відповідають натуральним числам 1, 2, 3, ...

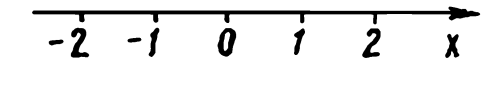


Рис. 1.1.

Відкладемо від точки O одиничний відрізок у напрямку, протилежному до заданого (ліворуч). Ми одержимо точку, що відповідає числу, протилежному до 1, це число —1. Аналогічно одержують точки, що відповідають цілим від'ємним числам —2, —3, —4, ...

Об'єднання натуральних чисел, цілих від'ємних чисел та числа 0, що відповідає точці O, є *множиною цілих чисел* (позначається $\mathbf{Z}$).

Ясно, що на координатній прямій можна відкласти точку, що відповідає будь-якому дробу або змішаному числу.

Точки, що симетричні відносно точки O, відповідають протилежним числам.

Точки, розташовані праворуч точки O, відповідають додатним числам, а точки, розташовані ліворуч, — від'ємним числам. Заданий напрямок називається *додатним*.

4.2. Цілі числа та дроби (додатні і від'ємні) складають множину $\mathbf{Q}$ раціональних чисел. *Раціональним* називається число $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Множину раціональних чисел також можна визначити як множину десяткових дробів (скінченних та нескінченних періодичних). Кожному

раціональному числу відповідає єдина точка на координатній прямій. Для стислості іноді кажуть: точка 2,3, точка —1,7 і т. д.

Множина **Q** замкнена відносно чотирьох арифметичних операцій (крім ділення на 0). Це означає, що сума, добуток, різниця та частка двох раціональних чисел — знову число раціональне.

Операції додавання і множення раціональних чисел підлягають законам комутативності, асоціативності та дистрибутивності.

4.3. Числа, що не є раціональними, називаються *ірраціональними.* Число, яке не можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле, а n — натуральне число, називається ірраціональним. Ірраціональне число — це нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Покажемо, що такі числа існують.

Теорема 1. *Число $\sqrt{2}$ не є раціональним.*

* Припустимо супротивне, тобто існують натуральні числа a, b такі, що $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ і дріб $\frac{a}{b}$ — нескоротний. Тоді $2 = \frac{a^2}{b^2}$, $a^2 = 2b^2$. Звідси випливає, що a — парне число, тобто $a = 2n$. Отже, $(2n)^2 = 2b^2$ і $b^2 = 2n^2$, звідки випливає, що b — парне число, тобто $b = 2k$. Тепер маємо $\frac{a}{b} = \frac{2n}{2k}$. Таким чином, ми одержали скоротний дріб, що веде до протиріччя. *

Прикладами ірраціональних чисел є $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$ тощо. Не треба думати, що ірраціональні числа пов'язані обов'язково з коренями. Відоме з геометрії число π є ірраціональним.

Теорема 2. *Нехай α — ірраціональне, а r — раціональне число, тоді $\alpha + r$ — число ірраціональне.*

* Нехай $\alpha + r = r_1$ — раціональне число. Тоді $\alpha = r_1 - r$. Оскільки множина **Q** замкнена відносно операції віднімання, число $r_1 - r$ — раціональне, що приводить до протиріччя. *

За допомогою цієї теореми можна одержувати нові ірраціональні числа. Так, числа $\sqrt{2} + 1$, $\sqrt{2} - 1$, $\sqrt{2} + 5$, $\sqrt{3} - 6$ — ірраціональні.

Теорема 3. *Нехай α — ірраціональне, а r — раціональне число ($r \neq 0$), тоді αr — число ірраціональне.*

* Нехай $\alpha r = r_1$ — число раціональне. Тоді $\alpha = \frac{r_1}{r}$. Оскільки множина **Q** замкнена відносно операції ділення (крім ділення на 0), число $\frac{r_1}{r}$ є раціональне, що приводить до протиріччя. *

З теореми 3 випливає, що числа $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $5(\sqrt{2} - 1)$, $10(\sqrt{5} + 1)$ — ірраціональні.

Множина ірраціональних чисел не замкнена відносно арифметичних операцій. Так, сума двох ірраціональних чисел $\alpha_1 = 2 + \sqrt{2}$ і $\alpha_2 = 2 - \sqrt{2}$ є раціональне число 4. Добуток цих ірраціональних чисел теж є числом раціональним.

Можна одержувати ірраціональні числа, утворюючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Так, число $a = 0{,}123\,45...$, де після коми виписані всі натуральні числа, є ірраціональним, бо це — нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Нехай $a < b$. Оскільки $a < \frac{a+b}{2} < b$, то між двома раціональними числами існує раціональне число (насправді таких чисел безліч).

Теорема 4. *Між двома раціональними числами існує ірраціональне число.*

* Нехай $a < b$. Розглянемо число $\alpha = a\frac{\sqrt{2}}{2} + b\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Це число лежить між числами a і b, бо $a < a\frac{\sqrt{2}}{2} + b\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < b$. Згідно з теоремами 2 і 3 $a = b + (a - b)\frac{\sqrt{2}}{2}$ — ірраціональне число. *

Можна довести, що між двома раціональними числами існує безліч ірраціональних.

4.4. Мають місце подвійні нерівності $1^2 < 2 < 2^2$; $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$; $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$; $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$; $1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2$, звідки $1 < \sqrt{2} < 2$; $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$; $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$; $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$.

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... утворюють послідовність раціональних наближень числа $\sqrt{2}$ з недостачею. Числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ... утворюють послідовність раціональних наближень числа $\sqrt{2}$ з надлишком. Отже, $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ Кажуть, що $\sqrt{2} = 1{,}41$ з точністю до 0,01 з недостачею. $\sqrt{2} = 1{,}415$ з точністю до 0,001 з надлишком.

За допомогою раціональних наближень визначають арифметичні дії з ірраціональними числами.

4.5. Раціональні та ірраціональні числа складають множину **R** дійсних чисел.

Можна також визначити **R** як множину десяткових дробів. Існує взаємно однозначна відповідність між множиною **R** і множиною точок координатної прямої. Кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої, і кожна точка координатної прямої відповідає певному дійсному числу. Множину **R** називають також *числовою прямою.*

4.6. Кожному дійсному числу a відповідає його модуль, або абсолютна величина (позначається $|a|$).

Визначення модуля:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Наприклад: $|4{,}6| = 4{,}6$, $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$, $|-7{,}3| = 7{,}3$, $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$, $|0| = 0$.

З геометричної точки зору $|a|$ — це відстань точки a на координатній прямій від точки O, а $|a - b|$ — це відстань між точками a і b на координатній прямій.

Властивості модуля:

1. $|a| = |-a|$. 2. $|ab| = |a| \cdot |b|$. 3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (при $b \neq 0$).

4. $|a|^2 = a^2$. 5. $|a| \geq 0$. 6. $-|a| \leq a \leq |a|$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $|x - 4| = 2$.

* Згідно з геометричним змістом відстань від точки x до точки 4 на координатній прямій дорівнює 2. Отже, $x = 6$ або $x = 2$. Відповідь: $x = 2$ або $x = 6$. *

2. Розв'язати рівняння $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

* Виходячи з геометричного змісту модуля, робимо висновок, що сума відстаней від точки x до точок -1 та 2 дорівнює 3. Отже, x — будь-яка точка з проміжку $[-1;2]$. Відповідь: $x \in [-1;2]$. *

3. Розв'язати нерівність $|x - 1| < 3$.

* Згідно з геометричним змістом модуля відстань від точки x до точки 1 менша за 3. Отже, $1 - 3 < x < 1 + 3$, або $-2 < x < 4$. Відповідь: $x \in (-2;4)$. *

4. Довести, що $|a + b| \leq |a| + |b|$.

* Додамо дві справедливі нерівності $-|a| \leq a \leq |a|$ та $-|b| \leq b \leq |b|$:

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

звідки $|a + b| \leq |a| + |b|$. Рівність досягається лише у випадках, коли $a = b = 0$, або коли числа a і b одного знаку. *

4.7. Щоб додати два дійсних числа одного знаку, треба додати їх модулі і взяти їх спільний знак. Наприклад: $3,6 + 4,7 = 8,3$; $-5,2 + (-4,3) = -9,5$.

Щоб додати два дійсних числа різних знаків, треба від більшого модуля відняти менший модуль і взяти знак числа з більшим модулем. Наприклад: $3,2 - 6,7 = -(|6,7| - |3,2|) = -3,5$; $7,1 - 2,8 = |7,1| - |2,8| = 4,3$.

Щоб перемножити два дійсних числа одного знаку, треба перемножити їх модулі і взяти знак «плюс». (Добуток двох чисел одного знаку — додатне число.) Щоб перемножити два дійсних числа різних знаків, треба перемножити їх модулі й узяти знак «мінус». Наприклад, $-2 \cdot (-4) = |-2| \cdot |-4| = 8$; $-3 \cdot 5 = -|-3| \cdot |5| = -15$.

Дії віднімання та ділення означаються як обернені до дій додавання та множення відповідно.

Дії додавання та множення дійсних чисел здійснюються за комутативним, асоціативним та дистрибутивним законами.

Вправи

1. Позначити на координатній прямій точки, що відповідають числам 1; 2; 3; $-0,9$; $\frac{1}{4}$; $-3,7$.

2. Довести, що множина $\mathbf{Z}$ цілих чисел замкнена відносно операцій додавання, віднімання і множення.

3. Довести, що множина $\mathbf{Q}$ раціональних чисел замкнена відносно чотирьох арифметичних операцій (крім ділення на 0).

4. Натуральне число p не є точним квадратом. Довести, що $\sqrt{p}$ — ірраціональне число.

5. Довести, що число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ірраціональне.

6. Довести, що число $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ірраціональне.

7. Довести, що число $\alpha = 0{,}101\ 001\ 0001\ldots$ ірраціональне (кількість нулів між одиницями збільшується на 1).

8. Одержати послідовності раціональних наближень числа $\sqrt{3}$ з недостачею і з надлишком із точністю до 0,001.

9. Довести, що між двома ірраціональними числами існують раціональне й ірраціональне число.

10. Розв'язати рівняння а) $|x - 3| = 5$; б) $|x+3| + |x - 1| = 4$.

11. Розв'язати нерівності: а) $|x - 2| < 1$; б) $|x + 3| > 2$.

12. Довести, що $|a - b| \le |a| + |b|$. В якому випадку досягається рівність?

13. Виконати дії:

$$\text{а) } (1{,}3 - 3{,}4 + 2{,}6)\ (4{,}6 - 7{,}2);\quad \text{б) } \left(4\frac{1}{3} - 5\frac{3}{4}\right) : \left(1\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2}\right).$$

14. Довести, що $|x - a| + |x - b| \ge |a - b|$.

15. Знайти x, якщо

$$\text{а) } \frac{3 : \frac{x}{5} - 0{,}09 : 0{,}15 \cdot 2\frac{1}{2}}{0{,}32 \cdot 6 + 0{,}03 - (5{,}3 - 3{,}88) + 0{,}67} = 5;$$

$$\text{б) } 1\frac{7}{20} : 2{,}7 + 2{,}7 : 1{,}35 + 0{,}4 : 2\frac{1}{2}\left(\frac{42}{x} - 1\frac{3}{40}\right) = 3.$$

Відповіді до вправ

§ 1. **1.** а) 1 860 305; б) 20. **2.** Ні. **3.** Ні. **4.** Ні. **5.** Ні. **6.** Ні. **7.** 4. **8.** 1728 або 1224. **9.** Так. **10.** 5. **11.** 31. **12.** $x = 3$, $y = 1$. **13.** 19. **14.** а) 3; б) 12; в) 2; г) 1. **16.** а) 132; б) 23 851; в) 1500; г) 48 954 764.

§ 2. **1.** а) $1\frac{8}{19}$; б) $2\frac{1}{21}$; в) $3\frac{13}{17}$; г) $3\frac{5}{11}$. **2.** а) $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$; б) $\frac{42}{56}, \frac{16}{56}, \frac{35}{56}$; в) $\frac{880}{1320}, \frac{264}{1320}, \frac{825}{1320}, \frac{360}{1320}$. **3.** $\frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{7}{11} < \frac{2}{3}$. **4.** а) $1\frac{11}{140}$; б) $10\frac{1}{12}$; в) $\frac{59}{60}$; г) 2; д) $6\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{4}$; є) $9\frac{1}{2}$. **5.** а) 0,52; б) 0,55; в) 0,568; г) 0,(3); д) 0,(857 142); е) 0,18(6). **6.** а) 0,02(27); б) 4,50(27); в) 1. **7.** а) $\frac{23}{99}$; б) $2\frac{17}{990}$; в) $3\frac{11}{75}$; г) $\frac{467}{3300}$.

§ 3. **2.** 0,2. **3.** а) 5,6; б) $3\frac{1}{9}$; в) $x = 21$, $y = \frac{4}{3}$. **6.** 3 і 27. **7.** 50, 100 і 150. **8.** 120, 80 і 90. **9.** $71\frac{3}{7}$ л. **10.** 33,1 %.

§ 4. **8.** 1,732 і 1,733. **10.** а) $x \in \{-2; 8\}$; б) $x \in [-3; 1]$. **11.** а) $x \in (1; 3)$; б) $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$. **13.** а) —1,3; б) $-\frac{17}{27}$. **15.** а) $x = 2$; б) $x = 10$.

Тема 2. АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

§ 1. Алгебраїчні вирази

1.1. Означення: *n-м степенем дійсного числа a* називається добуток n співмножників, що дорівнюють a, тобто $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ разів}}$. Покладають також, що $a^1 = a$.

Число a називається *основою степеня*, число n — *показником степеня*.

Наприклад: $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$,

$\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64}$.

Основні властивості степеня з натуральним показником:

$$1.\ a^k a^p = a^{k+p}. \quad 2.\ a^k : a^p = a^{k-p} \text{ (якщо } k > p). \quad 3.\ (ab)^k = a^k b^k.$$

$$4.\ \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}. \quad 5.\ (a^k)^p = a^{kp}.$$

За означенням, $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$. Якщо ж $a = 0$, число a^0 не визначається.

Якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (за означенням).

Наприклад: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$.

Таким чином, ми визначили степінь із цілим показником. Для степеня із цілим показником мають місце ті ж самі п'ять властивостей, що і для степеня з натуральним показником, причому властивість 2 виконується при будь-яких цілих k, p.

1.2. Будь-яке додатне дійсне число a можна подати у *стандартному вигляді* $a = a_1 \cdot 10^k$, де $1 \leq a_1 < 10$, k — ціле число. При цьому k називається *порядком числа*, а a_1 — його *характеристикою*.

Наприклад: $426{,}3 = 4{,}623 \cdot 10^2$; $5{,}41 = 5{,}41 \cdot 10^0$; $0{,}0214 = 2{,}14 \cdot 10^{-2}$.

Приклади

1. Знайти порядок і характеристику числа 14,28.

* Оскільки $14{,}28 = 1{,}428 \cdot 10^1$, то $a_1 = 1{,}428$, $k = 1$. Відповідь: 1,428; 1. *

2. Знайти порядок і характеристику числа 0,007 62.

* $0{,}007\,62 = 7{,}62 \cdot 10^{-3}$, отже, $a_1 = 7{,}62$, $k = -3$. Відповідь: 7,62; —3. *

3. Знайти порядок і характеристику числа 7,23.

* $7{,}23 = 7{,}23 \cdot 10^0$, отже, $a_1 = 7{,}23$, $k = 0$. Відповідь: 7,23; 0. *

1.3. Існує шість алгебраїчних дій: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня.

Запис, що складається з чисел, букв (змінних) та знаків алгебраїчних дій, називається *алгебраїчним виразом*. Наприклад: $4ab - a^2(a - b)$, $\frac{a+b}{a-b}$, $(x - \sqrt{3})^3$, $\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$.

Множина значень змінних, для яких даний вираз має сенс, називається *областю допустимих значень (ОДЗ)* даного виразу. Так, ОДЗ виразу $\frac{a+b}{a-b}$ складається з таких пар чисел: $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$; ОДЗ виразу $\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$ складається з таких пар чисел: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Якщо алгебраїчний вираз не містить ділення на змінні та добування кореня зі змінних, то він називається *цілим*. Такими є, наприклад, вирази $4ab - a^2(a - b)$, $(x - \sqrt{3})^3$.

Якщо в алгебраїчному виразі є дії додавання, віднімання, множення, піднесення до натурального степеня та ділення на вираз, що містить змінні, то цей вираз називається *дробовим*. Таким, наприклад, є вираз $\frac{a+b}{a-b}$. Цілі і дробові вирази складають *раціональні вирази*. Вираз $\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$ є *ірраціональним*, бо в ньому використовується дія добування кореня зі змінних.

Якщо в алгебраїчному виразі надати змінним якихось допустимих значень, то одержимо *числовий вираз*. Його значення називається *числовим значенням алгебраїчного виразу* при обраних значеннях змінних.

Приклад

Знайти числове значення виразу $\frac{a+b}{a-b}$ при $a = 3$, $b = 4$.

* Підставляючи в даний вираз числові значення змінних, одержуємо $\frac{3+4}{3-4} = -7$.

Відповідь: —7. *

1.4. Розглянемо рівність $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Вирази $(x + 2)^2$ та $x^2 + 4x + 4$ приймають рівні числові значення при будь-якому дійсному x. У такому разі кажуть, що вирази тотожно рівні на множині $\mathbf{R}$.

Вирази $|x|$ та $-x$ тотожно рівні на множині $(-\infty; 0]$. *Тотожністю* на деякій множині називається рівність, яка з'єднує два вирази, тотожно рівні на цій множині.

Заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називається *тотожним перетворенням виразу*.

Вправи

1. Записати добуток у вигляді степеня:

а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^3$; б) $4^m \cdot 64$; в) $49 \cdot 7^k$; г) $(n - k)^3 \cdot (n - k)^5$.

2. Виконати дії:

а) $3^4 \cdot 4^0 \cdot 5^{-2}$; б) $(-0{,}1)^{-5} + (-0{,}2)^{-5}$; в) $0{,}2^{-4} + 0{,}3^{-3}$.

3. Представити число у стандартному вигляді:

а) 18,74; б) 0,005; в) $\frac{1}{125}$; г) 3,92.

4. Знайти ОДЗ виразу: а) $\frac{x+1}{x^2-9}$; б) $\frac{2a+b}{a^2-b^2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$.

5. На якій множині тотожно рівні вирази:

а) $\frac{x^2-1}{x+1}$ та $x-1$; б) $|x|$ та x; в) $(\sqrt{x}-1)^2$ та $x-2\sqrt{x}+1$?

§ 2. Цілі вирази

2.1. *Одночленом* називається вираз, що є добутком чисел та натуральних степенів змінних. Наприклад: x; $3{,}6y$; $1{,}2ab^3$; $(2a^2b)\left(\frac{2}{3}cd^3\right)$.

Вираз $x+y$ не є одночленом, бо містить дію додавання. Якщо числовий множник (коефіцієнт одночлена) поставити на перше місце, утвориться стандартний вигляд одночлена.

Приклади

1. Привести одночлен $2x(3{,}5x^4)$ до стандартного вигляду.

* $2x(3{,}5x^4) = 7x^5$. Відповідь: $7x^5$ *.

Суму показників степенів усіх змінних називають *степенем одночлена.* Наприклад, одночлен $3xy^2$ має степінь $1+2=3$, одночлен $\frac{1}{2}a^3b^4c$ має степінь $3+4+1=8$.

Добуток двох одночленів — також одночлен. Наприклад, $(2ab^3)\times\left(\frac{1}{4}a^2b^4\right)=\frac{1}{2}a^3b^7$.

Якщо піднести одночлен до натурального степеня, то одержиться одночлен. Наприклад, $(3ab^2)^2 = 9a^2b^4$.

Одночлени називаються *подібними*, якщо після приведення до стандартного вигляду вони відрізняються тільки коефіцієнтами або зовсім не відрізняються. Додавання або віднімання подібних одночленів називається *зведенням подібних членів.*

Приклади

2. Перемножити одночлени $0{,}2x^2y$ та $3xz^3$.

* $(0{,}2x^2y)(3xz^3) = 0{,}6x^3yz^3$. Відповідь: $0{,}6x^3yz^3$. *

3. Піднести одночлен $-4x^2yz^3$ до третього степеня.

* $(-4x^2yz^3)^3 = (-4)^3(x^2)^3y^3(z^3)^3 = -64x^6y^3z^9$. Відповідь: $-64x^6y^3z^9$. *

4. Звести подібні члени $3x^2yz^3 - 6x^2yz^3 + 5x^2yz^3$.

* $3x^2yz^3 - 6x^2yz^3 + 5x^2yz^3 = (3-6+5)x^2yz^3 = 2x^2yz^3$. Відповідь: $2x^2yz^3$. *

2.2. *Многочленом* називається сума одночленів. Наприклад: x^2-3x^3+2, $4a^2b-0{,}5ab^2$.

Якщо всі доданки многочлена записати у стандартному вигляді, а потім звести подібні члени, одержиться многочлен стандартного вигляду. Будь-який

цілий вираз можна перетворити в многочлен стандартного вигляду за допомогою тотожних перетворень.

Приклади

1. Перетворити цілий вираз $4a\,3b - 2b\,(-4a) + 2{,}5c^3$ у многочлен стандартного вигляду.

* $4a\,3b - 2b\,(-4a) + 2{,}5c^3 = 12ab + 8ab + 2{,}5c^3 = 20ab + 2{,}5c^3$. Відповідь: $20ab + 2{,}5c^3$. *

2. Перетворити цілий вираз $4x^2y + 5xy^3 - (2x^2y + 7xy^3)$ у многочлен стандартного вигляду.

* Якщо перед дужками стоїть знак «мінус», дужки можна відкинути, змінивши знаки всіх доданків, що стоять у дужках, на протилежні: $4x^2y + 5xy^3 - (2x^2y + 7xy^3) = 4x^2y + 5xy^3 - 2x^2y - 7xy^3 = 2x^2y - 2xy^3$. Відповідь: $2x^2y - 2xy^3$. *

3. Перетворити цілий вираз $5a\left(a^2 - \frac{1}{4}a^3 - 2\right)$ у многочлен стандартного вигляду.

* Розкриємо дужки згідно з дистрибутивним законом:

$$5a\left(a^2 - \frac{1}{4}a^3 - 2\right) = 5a\,a^2 + 5a\left(-\frac{1}{4}a^3\right) + 5a\,(-2) = 5a^3 - \frac{5}{4}a^4 - 10a.$$

Відповідь: $5a^3 - \frac{5}{4}a^4 - 10a$. *

4. Перетворити цілий вираз $(2a^2b - 3ab^2 + 4c)\,(4ab - 2c^2a)$ у многочлен стандартного вигляду.

* Для того щоб перемножити два многочлени, треба кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена і добутки додати: $(2a^2b - 3ab^2 + 4c)\,(4ab - 2c^2a) = 8a^3b^2 - 4a^3bc^2 - 12a^2b^3 + 6a^2b^2c^2 + 16abc - 8ac^3$. Відповідь: $8a^3b^2 - 4a^3bc^2 - 12a^2b^3 + 6a^2b^2c^2 + 16abc - 8ac^3$. *

2.3. Часто під час перетворення цілого виразу в многочлен стандартного вигляду стають у пригоді формули скороченого множення:

різниця квадратів $$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b); \qquad (2.1)$$

квадрат різниці $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (2.2)$$

квадрат суммі $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (2.3)$$

сума кубів $$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2); \qquad (2.4)$$

різниця кубів $$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2); \qquad (2.5)$$

куб суми $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \qquad (2.6)$$

куб різниці $$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \qquad (2.7)$$

Відмітимо, що в усіх наведених формулах замість a та b можна підставляти не лише числа, але й вирази.

Приклади

1. Виконати дії $(4ab - 3bc)\,(4ab + 3bc)$.

* Згідно з формулою (2.1) маємо $(4ab - 3bc)(4ab + 3bc) = (4ab)^2 - (3bc)^2 = 16a^2b^2 - 9b^2c^2$. Відповідь: $16a^2b^2 - 9b^2c^2$. *

2. Виконати дії $(a + b - c)^2$.

* Використовуючи формули (2.2) і (2.3), маємо $(a + b - c)^2 = [(a + b) - c]^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$. Відповідь: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$. *

3. Виконати дії $(4x^2 - 3yz)^2$.

* Згідно з формулою (2.2) маємо $(4x^2 - 3yz)^2 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 3yz + (3yz)^2 = 16x^4 - 24x^2yz + 9y^2z^2$. Відповідь: $16x^4 - 24x^2yz + 9y^2z^2$. *

4. Виконати дії $(2a - 4b)^3$.

* Згідно з формулою (2.7) маємо $(2a - 4b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 4b + 3 \cdot 2a(4b)^2 - (4b)^3 = 8a^3 - 12a^2 4b + 6a\,16b^2 - 64b^3 = 8a^3 - 48a^2b + 96ab^2 - 64b^3$. Відповідь: $8a^3 - 48a^2b + 96ab^2 - 64b^3$. *

5. Виконати дії $(4a - 1)(16a^2 + 4a + 1)$.

* Згідно з формулою (2.5) маємо $(4a - 1)(16a^2 + 4a + 1) = (4a)^3 - 1^3 = 64a^3 - 1$. Відповідь: $64a^3 - 1$. *

2.4. Перетворення многочлена в добуток декількох многочленів називається *розкладанням многочлена на множники.* Розглянемо деякі способи розкладання многочлена на множники.

А. *Винесення спільного множника за дужки.* Це перетворення пов'язане з дистрибутивним законом: $ac + bc = c(a + b)$.

Приклади

1. Розкласти на множники многочлен $x^2 + xz - y^2 + yz$.

* $x^2 + xz - y^2 + yz = x^2 - y^2 + xz + yz = (x + y)(x - y) + z(x + y) = (x + y)(x - y + z)$. Відповідь: $(x + y)(x - y + z)$. *

2. Розкласти на множники многочлен $4a^3b^4c^2 - 3a^2b^3c^3 + 5a^4b^3c^2$.

* $4a^3b^4c^2 - 3a^2b^3c^3 + 5a^4b^3c^2 = a^2b^3c^2(4ab - 3c + 5a^2)$. Відповідь: $a^2b^3c^2(4ab - 3c + 5a^2)$.*

Б. *Використання формул скороченого множення.*

Приклади

3. Розкласти на множники многочлен $x^4 - b^4$.

* Згідно з формулою (2.1) маємо $x^4 - b^4 = (x^2 - b^2)(x^2 + b^2) = (x - b)(x + b)(x^2 + b^2)$. Відповідь: $(x - b)(x + b)(x^2 + b^2)$. *

4. Розкласти на множники многочлен $a^6 - b^6$.

* 1-спосіб. Спочатку скористаємось формулою (2.5): $a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$. Тепер скористаємось формулою (2.1): $(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = (a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$. Далі зробимо такі перетворення: $a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$. Отже, $a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

2-спосіб. Скориставшись формулою (2.1), матимемо:

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3).$$

Тепер згідно з формулами (2.5) та (2.4) маємо $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b)\times$ $\times(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$. **Відповідь:** $(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)\times$ $\times(a^2 - ab + b^2)$. *

В. *Групування.*

Приклади

5. Розкласти на множники многочлен $a^3 - 3a^2b + 5ab^2 - 15b^3$.

*$a^3 - 3a^2b + 5ab^2 - 15b^3 = (a^3 - 3a^2b) + (5ab^2 - 15b^3) = a^2(a - 3b) + 5b^2(a - 3b) =$ $= (a - 3b)(a^2 + 5b^2)$. Відповідь: $(a - 3b)(a^2 + 5b^2)$. *

6. Розкласти на множники многочлен $x^2 - 5xy + 6y^2$.

* Розіб'ємо одночлен $-5xy$ на два доданки, а потім проведемо групування: $x^2 - 5xy + 6y^2 = x^2 - 2xy - 3xy + 6y^2 = (x^2 - 2xy) - (3xy - 6y^2) = x(x - 2y) -$ $- 3y(x - 2y) = (x - 2y)(x - 3y)$. **Відповідь:** $(x - 2y)(x - 3y)$. *

Вправи

1. Привести одночлен до стандартного вигляду:

а) $3a(2{,}4a^3)$; б) $4x^2y(1{,}5xy^2)$.

2. Перемножити одночлени:

а) $4a^3b$ та $2ab^2$; б) $0{,}1x^3yz$ та $30x^2y^3z^2$.

3. Піднести до другого степеня одночлен:

а) $2x^3yz^2$; б) $-3a^2b^2c$.

4. Перетворити в многочлен стандартного вигляду цілий вираз:

а) $(2x^2y - xy + xy^2)(3xy + 2x^2y)$; б) $(a + b)(b + c)(c + a)$.

5. Виконати дії:

а) $(3ab - 2c)^2 - (4ac + b)^2$; б) $(3a - 2b)^2 + (2a - 3b)^2$;

в) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$; г) $(3a - b)^3 + (3a + b)^3$.

6. Розкласти многочлен на множники:

а) $10xy^2 - 8x^2y$; б) $2x^2 - 5xy + 2y^2$; в) $ab - 4b + 3a - 12$;

г) $64a^2 - 121b^2$; д) $125a^3 - 64b^3$; е) $3a^2 + 10ab + 3b^2$.

7. Довести тотожності:

а) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$; б) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$;

в) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$; г) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$;

д) $a^4 + 1 = (a^2 + a\sqrt{2} + 1)(a^2 - a\sqrt{2} + 1)$;

е) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^6 + a^3b^3 + b^6) = a^9 - b^9$;

є) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$;

ж) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2$.

§ 3. Дробові раціональні вирази

3.1. *Дробовий раціональний вираз, або раціональний дріб,* — це відношення двох цілих раціональних виразів $\frac{P}{Q}$, причому вираз Q містить змінні.

Наприклад: $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $\frac{3ax-4by}{x+y}$, $\frac{3a^2c-4ba}{a^3+b^3}$.

Вважатимемо, що всі букви (змінні) набувають лише допустимих значень.

Існує аналогія між числовими та раціональними дробами — для раціональних дробів справедливі властивості числових дробів та дій із ними.

3.2. *Основна властивість раціонального дробу:* $\frac{P}{Q}=\frac{PM}{QM}$. Тут M — цілий раціональний вираз ($M \neq 0$).

Приклади

1. Скоротити дріб $\frac{x^3-y^3}{(y-x)\,a}$.

$$* \frac{x^3-y^3}{(y-x)\,a}=-\frac{x^3-y^3}{a\,(x-y)}=-\frac{(x-y)\,(x^2+xy+y^2)}{a\,(x-y)}=\frac{-x^2-xy-y^2}{a}.$$

Для скорочення дробів використовується їх основна властивість. При цьому $x-y\neq 0$. Відповідь: $\frac{-x^2-xy-y^2}{a}$. *

2. Скоротити дріб $\frac{a^2-9b^2}{a^2-5ab+6b^2}$.

$* \frac{a^2-9b^2}{a^2-5ab+6b^2}=\frac{(a-3b)\,(a+3b)}{(a-2b)\,(a-3b)}=\frac{a+3b}{a-2b}$. Відповідь: $\frac{a+3b}{a-2b}$ при $a\neq 3b$. *

3. Скоротити дріб $\frac{5a^2+10ab+5b^2}{10a^2-10b^2}$.

$$* \frac{5a^2+10ab+5b^2}{10a^2-10b^2}=\frac{5\,(a^2+2ab+b^2)}{10\,(a^2-b^2)}=\frac{(a+b)^2}{2\,(a-b)\,(a+b)}=\frac{a+b}{2\,(a-b)}.$$

Відповідь: $\frac{a+b}{2\,(a-b)}$ при $a\neq -b$. *

4. Спростити дріб $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}$ та знайти його числове значення при $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{4}$.

$$* \frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\frac{(ac+ax)+(bx+bc)}{(ay+by)+(2bx+2ax)}=\frac{a\,(c+x)+b\,(x+c)}{y\,(a+b)+2x\,(b+a)}=$$

$$=\frac{(x+c)\,(a+b)}{(a+b)\,(y+2x)}=\frac{x+c}{y+2x}.$$ Підставимо числові дані: $\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$.

Відповідь: $\frac{3}{8}$. *

За допомогою основної властивості можна звести раціональні дроби до спільного знаменника.

Приклади

5. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{x}{a^2b}$ та $\frac{y}{ab^2}$.

* Спільний знаменник a^2b^2, отже, $\frac{x}{a^2b} = \frac{xb}{a^2b^2}$, $\frac{y}{ab^2} = \frac{ya}{a^2b^2}$. Відповідь: $\frac{xb}{a^2b^2}$ та $\frac{ya}{a^2b^2}$. *

6. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{a}{x^2 + 2xy + y^2}$ і $\frac{b}{x^2 - y^2}$.

* Оскільки $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, а $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, за спільний знаменник можна взяти вираз $(x + y)^2 (x - y)$. Тепер згідно з основною властивістю дробу маємо

$$\frac{a}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{a}{(x + y)^2} = \frac{a(x - y)}{(x + y)^2 (x - y)}, \qquad \frac{b}{x^2 - y^2} = \frac{b}{(x + y)(x - y)} =$$

$$= \frac{b(x + y)}{(x + y)^2 (x - y)}.$$ Відповідь: $\frac{a(x - y)}{(x + y)^2 (x - y)}$ та $\frac{b(x + y)}{(x + y)^2 (x - y)}$. *

3.3. Арифметичні дії з раціональними дробами виконуються за тими самими правилами, що й з числовими дробами:

додавання $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

віднімання $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd},$$

множення $$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

ділення $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Тут $\frac{a}{b}$ та $\frac{c}{d}$ — деякі раціональні дроби.

Приклади

1. Виконати дію віднімання $\frac{a - b}{ab} - \frac{a - c}{ac}$.

* $\frac{a - b}{ab} - \frac{a - c}{ac} = \frac{(a - b)c - (a - c)b}{abc} = \frac{ac - bc - ab + bc}{abc} = \frac{ac - ab}{abc} = \frac{a(c - b)}{abc} =$

$= \frac{c - b}{bc}$. Відповідь: $\frac{c - b}{bc}$. *

2. Виконати дію додавання $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}$.

* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y} = \frac{1y^2 + 1x + 1y}{x^2y^2} = \frac{y^2 + x + y}{x^2y^2}$. Відповідь: $\frac{y^2 + x + y}{x^2y^2}$. *

3. Виконати дії $\frac{x-a}{ab-a^2}-\frac{y-b}{a^2-ab}$.

$*\ \frac{x-a}{ab-a^2}-\frac{y-b}{a^2-ab}=\frac{x-a}{ab-a^2}+\frac{y-b}{ab-a^2}=\frac{x-a+y-b}{ab-a^2}$.

Відповідь: $\frac{x-a+y-b}{ab-a^2}$. *

4. Виконати дії $\frac{8a^2+14}{a^3-1}-\frac{a+7}{a^2+a+1}$.

$$*\ \frac{8a^2+14}{a^3-1}-\frac{a+7}{a^2+a+1}=\frac{8a^2+14-(a+7)(a-1)}{a^3-1}=$$

$$=\frac{8a^2+14-(a^2+6a-7)}{a^3-1}=\frac{7a^2-6a+21}{a^3-1}.$$ Відповідь: $\frac{7a^2-6a+21}{a^3-1}$. *

5. Віконати дії $\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

$$*\ \frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}=$$

$$=\frac{(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ac)(a+c)+(c^2-ab)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{a^2b+a^2c-b^2c-bc^2+b^2a+b^2c-a^2c-ac^2+c^2a+c^2b-a^2b-ab^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{0}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0.$$

Відповідь: 0. *

6. Виконати дії додавання та віднімання $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}$.

$$*\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)+x(x+1)-2x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2-1+x^2+x-2x^2+2x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{3x-1}{x(x-1)(x+1)}.$$ Відповідь: $\frac{3x-1}{x(x-1)(x+1)}$. *

7. Виконати дію множення $\frac{5x^2y}{3z}\,\frac{4y^2z}{15x^2}\,\frac{9z^2}{16y^4}$.

$*\ \frac{5x^2y}{3z}\,\frac{4y^2z}{15x^2}\,\frac{9z^2}{16y^4}=\frac{5x^2y\cdot 4y^2z\cdot 9z^2}{3z\cdot 15x^2\cdot 16y^4}=\frac{z^2}{4y}$. Відповідь: $\frac{z^2}{4y}$. *

8. Виконати дії $\frac{x^2-xy}{y}\,\frac{y^2}{x}$.

$*\ \frac{x^2-xy}{y}\,\frac{y^2}{x}=\frac{x(x-y)}{y}\,\frac{y^2}{x}=(x-y)y$. Відповідь: $(x-y)y$. *

9. Виконати дії $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,\frac{3a}{b-a}$.

$$* \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{3a}{b - a} = \frac{(a^2 - b^2)\,3a}{(a^2 + b^2)(b - a)} = -\frac{(a - b)(a + b)\,3a}{(a^2 + b^2)(a - b)} = -\frac{3a(a + b)}{a^2 + b^2}.$$

Відповідь: $-\frac{3a(a + b)}{a^2 + b^2}$. *

10. Виконати дію ділення $\frac{x^2 - 16}{y^2 - 3y} : \frac{x + 4}{y^2 - 9}$.

$$* \frac{x^2 - 16}{y^2 - 3y} : \frac{x + 4}{y^2 - 9} = \frac{x^2 - 16}{y^2 - 3y} \cdot \frac{y^2 - 9}{x + 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)(y - 3)(y + 3)}{y(y - 3)(x + 4)} = \frac{(x - 4)(y + 3)}{y}.$$

Відповідь: $\frac{(x - 4)(y + 3)}{y}$. *

11. Виконати дію ділення $\left(3\frac{1}{3}x^5z\right)^2 : \left(\frac{5x^3z}{3y}\right)^2$.

$$* \left(3\frac{1}{3}x^5z\right)^2 : \left(\frac{5x^3z}{3y}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}x^5z\right)^2 : \left(\frac{5x^3z}{3y}\right)^2 = \frac{100x^{10}z^2}{9} : \frac{25x^6z^2}{9y^2} =$$

$$= \frac{100x^{10}z^2}{9} \cdot \frac{9y^2}{25x^6z^2} = 4x^4y^2.$$ Відповідь: $4x^4y^2$. *

12. Виконати дію ділення $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} : \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$.

$$* \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} : \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} =$$

$$= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)^2}{(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)} = a + b.$$ Відповідь: $a + b$. *

13. Виконати дії $\left(\frac{x^2 - xy}{y^2 + xy} - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x + y}\right) \frac{y}{(x - y)^2}$.

$$* 1) \frac{x(x - y)}{y(y + x)} - \frac{(x - y)^2}{x(x + y)} = \frac{x^2(x - y) - y(x - y)^2}{xy(x + y)} = \frac{(x - y)(x^2 - xy + y^2)}{xy(x + y)};$$

$$2) \frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x + y} = \frac{y^2}{x(x^2 - y^2)} + \frac{1}{x + y} = \frac{y^2 + x(x - y)}{x(x^2 - y^2)} =$$

$$= \frac{y^2 - xy + x^2}{x(x^2 - y^2)}; 3) \frac{(x - y)(x^2 - xy + y^2)}{xy(x + y)} : \frac{y^2 - xy + x^2}{x(x^2 - y^2)} =$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 - xy + y^2)}{xy(x + y)} \cdot \frac{x(x^2 - y^2)}{y^2 - xy + x^2} = \frac{(x - y)^2}{y}; 4) \frac{(x - y)^2}{y} \cdot \frac{y}{(x - y)^2} = 1.$$

Відповідь: 1. *

14. Виконати дії $\left(a + b - \frac{4ab}{a + b}\right) : \left(\frac{a}{a + b} - \frac{b}{b - a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)$.

$$* 1) a + b - \frac{4ab}{a + b} = \frac{(a + b)^2 - 4ab}{a + b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a - b)^2}{a + b};$$

$$2)\ \frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{a(a-b)+b(a+b)-2ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2-ab+ab+b^2-2ab}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2};$$

$$3)\ \frac{(a-b)^2}{a+b}:\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.$$

Відповідь: a—b. *

Вправи

1. Скоротити дріб

$$\text{а)}\ \frac{a^3+b^3}{a+b};\ \text{б)}\ \frac{x^2-16y^2}{x^2-5xy+4y^2};\ \text{в)}\ \frac{3a^2-6ab+3b^2}{9a^3-9b^3}.$$

2. Спростити дріб $\dfrac{a-ab+c-cb}{1-3b+3b^2-b^3}$ і знайти його числове значення, якщо $a=\frac{3}{4},\ b=\frac{1}{2},\ c=-\frac{1}{4}$.

3. Спростити дріб $\dfrac{3x^3+xy^2-6x^2y-2y^3}{9x^5-xy^4-18x^4y+2y^5}$ і знайти його числове значення, якщо $x=-\frac{1}{3},\ y=-\frac{1}{2}$.

4. Звести дроби до спільного знаменника:

$$\text{а)}\ \frac{1}{6y^2},\ \frac{x^2+y^2}{9x^2y^2}\ \text{та}\ \frac{3-x}{18xy^2};\ \text{б)}\ \frac{7x}{3a-b}\ \text{та}\ \frac{6y}{3a+b};$$

$$\text{в)}\ \frac{10}{(a-b)(a+b)},\ \frac{5}{(a+b)^2}\ \text{та}\ \frac{6}{(a-b)^2}.$$

5. Виконати дії:

$$\text{а)}\ \frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by};\ \text{б)}\ \frac{5b-1}{3b^2-3}+\frac{b+1}{2b+2}-\frac{b+1}{3b-3};$$

$$\text{в)}\ \frac{10}{4x^2-25y^2}-\frac{y}{5y^2-2xy}-\frac{5}{4x^2+10xy};\ \text{г)}\ \frac{xy+y^2}{9}\ \frac{3x}{y^2};\ \text{д)}\ \frac{8xy-8y^2}{x^2+yx}:\frac{4y^3}{x^3-xy^2};$$

$$\text{е)}\ \frac{ax+ay-cx-cy}{cx-3x-ac+3a}:\frac{cx+xy-ac-ay}{ab+4b-2a-8};\ \text{є)}\ \left(\frac{x+1}{2x-2}-\frac{1}{2x^2-2}\right)\frac{2x+2}{x+2};$$

$$\text{ж)}\ \left(\frac{t-1}{t+1}-\frac{t+1}{t-1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{t^2+1}{4t}\right);\ \text{з)}\ \left(\frac{x}{y^2+xy}+\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{y}{x}+2+\frac{x}{y}\right);$$

$$\text{и)}\ \frac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\frac{2b}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2};\ \text{і)}\ \left(\frac{a}{a^2-4}-\frac{8}{a^2+2a}\right)\frac{a^2-2a}{4-a}+\frac{a+8}{a+2};$$

$$\text{ї)}\ \frac{x^2y^2}{x^2-y^2}\,\frac{\left(\dfrac{(x+y)^2}{4xy}-1\right)\left(\dfrac{(x-y)^2}{4xy}+1\right)}{(x+y)^3-3xy(x+y)}.$$

6. Спростити вираз $\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ і знайти його числове значення, якщо $a = -2{,}5$; $b = 0{,}5$.

§ 4. Ірраціональні вирази

4.1. Нехай $a \geq 0$, n — натуральне число, більше за одиницю. Існує єдине невід'ємне число b таке, що $b^n = a$. Це число b називається *арифметичним коренем* n-го степеня з невід'ємного числа a: $b = \sqrt[n]{a}$. Число a називається *підкореневим числом*, число n називається *показником кореня*. Якщо $n = 2$, пишуть $\sqrt{a}$ замість $\sqrt[2]{a}$. Наприклад: $\sqrt[3]{64} = 4$, бо $4^3 = 64$; $\sqrt{16} = 4$, бо $4^2 = 16$; $\sqrt[5]{0} = 0$, бо $0^5 = 0$.

Поруч із терміном *«корінь»* застосовують також термін *«радикал»*.

П'ять основних властивостей арифметичного кореня:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$.
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $a \geq 0$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$.
5. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$, $a \geq 0$.

Властивість 1 узагальнюється таким чином: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\cdots\sqrt[n]{a_k}$.

Приклади

Використовуючи основні властивості арифметичного кореня, виконати дії.

1. $\sqrt{4 \cdot 25} = 2 \cdot 5 = 10$.
2. $\sqrt[3]{8 \cdot 64 \cdot 216} = \sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{64}\ \sqrt[3]{216} = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$.
3. $\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.
4. $(\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$.
5. $\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[5 \cdot 2]{3} = \sqrt[10]{3}$.
6. $\sqrt[9]{27} = \sqrt[9]{3^3} = \sqrt[3]{3}$ (показник кореня і підкореневого числа поділено на 3).

За означенням арифметичного кореня $\sqrt{a^2} = |a|$ і взагалі $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Якщо $a < 0$ і n — натуральне парне число, то рівняння $x^n = a$ не має розв'язків, отже, кореня n-го степеня не існує.

Якщо $a < 0$ і n — непарне натуральне число, більше за 1, то рівняння $x^n = a$ має єдиний розв'язок і корінь n-го степеня існує.

Зауважимо, що $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

4.2. Розглянемо деякі перетворення арифметичних коренів.

А. Винесення множника з-під знака кореня.

Приклади

1. Перетворити $\sqrt{50}$.

* $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Відповідь: $5\sqrt{2}$. *

2. Перетворити $\sqrt[3]{16}$.

* $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$. Відповідь: $2\sqrt[3]{2}$. *

3. Перетворити $\sqrt[3]{a^5}$.

* $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3 a^2} = \sqrt[3]{a^3}\ \sqrt[3]{a^2} = a\sqrt[3]{a^2}$. Відповідь: $a\sqrt[3]{a^2}$. *

4. Перетворити $\sqrt{x^4}$.

* $\sqrt{x^4} = x^2$. Відповідь: x^2. *

Б. Внесення множника під знак кореня.

Приклади

5. Перетворити $3\sqrt{5}$.

* $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\ \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$. Відповідь: $\sqrt{45}$. *

6. Перетворити $2\sqrt[3]{3}$.

* $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3}\ \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$. Відповідь: $\sqrt[3]{24}$. *

7. Перетворити $a\sqrt[3]{b}$.

* $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3}\ \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$. Відповідь: $\sqrt[3]{a^3 b}$. *

8. Перетворити $x\sqrt{y}$.

* $x\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{x^2 y} & \text{при } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^2 y} & \text{при } x < 0. \end{cases}$ Відповідь: $\sqrt{x^2 y}$ при $x \geq 0$, $-\sqrt{x^2 y}$ при $x < 0$. *

В. Добування кореня з кореня.

Приклади

9. Перетворити корені $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}}$.

* $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3 b}} = \sqrt[9]{a^3 b}$. Відповідь: $\sqrt[9]{a^3 b}$. *

10. Перетворити корені $\sqrt{a\sqrt{a}}$.

* $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^2 a}} = \sqrt[4]{a^3}$ при $a \geq 0$. Відповідь: $\sqrt[4]{a^3}$ при $a \geq 0$. *

11. Перетворити корені $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}$.

* $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^9 a}} = \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[6]{|a|^5}$. Відповідь: $\sqrt[6]{|a|^5}$. *

Г. Зведення коренів до однакового показника.

Приклади

12. Перемножити корені $\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}$.

* $\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^4}\sqrt[12]{x^3} = \sqrt[12]{x^4 x^3} = \sqrt[12]{x^7}$ при $x \geq 0$. Відповідь: $\sqrt[12]{x^7}$ при $x \geq 0$. *

13. Перемножити корені $\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^5}$.

* $\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^9}\sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^{19}} = \sqrt[12]{a^{12} a^7} = a\sqrt[12]{a^7}$ при $a \geq 0$. Відповідь: $a\sqrt[12]{a^7}$ при $a \geq 0$. *

14. Перемножити корені $\sqrt{b}\sqrt[5]{b^3}$.

* $\sqrt{b}\sqrt[5]{b^3} = \sqrt[10]{b^5}\sqrt[10]{b^6} = \sqrt[10]{b^{11}} = \sqrt[10]{b^{10} b} = b\sqrt[10]{b}$ при $b \geq 0$. Відповідь: $b\sqrt[10]{b}$ при $b \geq 0$. *

15. Спростити вираз $\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}$.

* $\sqrt{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)^2}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} =$
$= \sqrt[4]{9-8} = \sqrt[4]{1} = 1$. Відповідь: 1. *

16. Спростити вираз $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$.

* $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} = -\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} = -\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^2}\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} =$
$= -\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} = -\sqrt[6]{81-80} = -1$. Відповідь: —1. *

17. Порівняти числа $\sqrt{2}$ і $\sqrt[3]{3}$.

* $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, а $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$. Оскільки $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$, то $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.
Відповідь: $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. *

18. Порівняти $\sqrt{10}$ і $\sqrt[3]{31}$.

* $\sqrt{10} = \sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{1000}$, а $\sqrt[3]{31} = \sqrt[6]{31^2} = \sqrt[6]{961}$.
Оскільки $\sqrt[6]{1000} > \sqrt[6]{961}$, то $\sqrt{10} > \sqrt[3]{31}$. Відповідь: $\sqrt{10} > \sqrt[3]{31}$. *

19. Спростити вираз $\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\sqrt[6]{1-2\sqrt{x-x^2}}$.

* Область визначення $0 \leq x \leq 1$.

$\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\sqrt[6]{1-2\sqrt{x-x^2}} = \sqrt[6]{(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^2}\sqrt[6]{1-2\sqrt{x-x^2}} =$

$$= \sqrt[6]{1+2\sqrt{x-x^2}}\ \sqrt[6]{1-2\sqrt{x-x^2}} = \sqrt[6]{1-4(x-x^2)} = \sqrt[6]{(1-2x)^2} = \sqrt[3]{|1-2x|}.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{|1-2x|}$ при $0 \le x \le 1$. *

Часто для перетворень ірраціональних виразів застосовують *формули складних радикалів*:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

де $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$.

* Доведемо першу з них. Оскільки обидві частини рівності додатні, піднесемо їх до квадрату:

$$a+\sqrt{b} = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}}.$$

Після спрощення права частина дорівнює $a+\sqrt{b}$. Друга формула доводиться аналогічно. *

Приклади

20. Спростити вираз $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

* $\sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{9+\sqrt{32}}$. У даному випадку $a = 9$, $b = 32$, $a^2 - b = 49$. Згідно з формулою складного радикалу $\sqrt{9+\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{49}}{2}} + \sqrt{\frac{9-\sqrt{49}}{2}} =$ $= \sqrt{8} + 1 = 2\sqrt{2} + 1$. Відповідь: $2\sqrt{2} + 1$. *

21. Спростити вираз $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

* $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}}$. У даному випадку $a = 4$, $b = 12$, $a^2 - b = 4$. Згідно з формулою складного радикалу $\sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{4}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{4}}{2}} = \sqrt{3} - 1$.

Відповідь: $\sqrt{3} - 1$. *

22. Спростити вираз $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4}}}{\sqrt{a^2-4}+a+2}$.

* ОДЗ: $a \ge 2$. Згідно з формулою складних радикалів

$$\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4}} = \sqrt{2}\sqrt{a+\sqrt{a^2-4}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{4}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{4}}{2}}\right) = \sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}.$$

Тепер маємо $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4}}}{\sqrt{a^2-4}+a+2} = \dfrac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{\sqrt{a+2}\,(\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+2}}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{a+2}}$ при $a \ge 2$. *

На практиці замість формул складних радикалів часто застосовують метод *виділення квадрата (або куба) під коренем.*

Приклади

23. Спростити вираз $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

* $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$.

Відповідь: $\sqrt{3}-1$. *

24. Спростити вираз $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

* $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+3(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}=\sqrt{2}+1$.

Відповідь: $\sqrt{2}+1$. *

25. Спростити вираз $\sqrt{11+2\sqrt{30}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}$.

* 1-й спосіб. Згідно з формулами складного радикала $\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{11+\sqrt{120}}=\frac{\sqrt{11+\sqrt{1}}}{2}+\frac{\sqrt{11-\sqrt{1}}}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$, $\sqrt{11-2\sqrt{30}}=$ $=\sqrt{11-\sqrt{120}}=\frac{\sqrt{11+\sqrt{1}}}{2}-\frac{\sqrt{11-\sqrt{1}}}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$. Отже, $\sqrt{11+2\sqrt{30}}+$ $+\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{5}=2\sqrt{6}$.

2-й спосіб. $\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{6+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}+5}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$, $\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{6-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}+5}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}=|\sqrt{6}-\sqrt{5}|=\sqrt{6}-\sqrt{5}$. Отже, $\sqrt{11+2\sqrt{30}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}=2\sqrt{6}$.

3-й спосіб. Нехай $\sqrt{11+2\sqrt{30}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}=A>0$. $A^2=11+2\sqrt{30}+11-$ $-2\sqrt{30}+2\sqrt{121-120}=22+2=24$. Отже, $A=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. Відповідь: $2\sqrt{6}$. *

26. Спростити вираз $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{3\sqrt{3}-2}}}$.

* Позначимо даний вираз через $A>0$.

$$A^2=\frac{\sqrt[4]{27}+\sqrt{2}+\sqrt[4]{27}-\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{27}-2}}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{27}-2}}=\frac{2\left(\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{27}-2}\right)}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{27}-2}}=2.$$

Отже, $A=\sqrt{2}$. Відповідь: $\sqrt{2}$. *

27. Довести тотожність $\sqrt[3]{(4a-1)\sqrt{a-1}+(3-4a)\sqrt{a}}\ \sqrt{2a-1+2\sqrt{a^2-a}}=-1$ при $a\geq 1$.

* Беручи до уваги тотожність $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$, маємо

$$\sqrt[3]{(4a-1)\sqrt{a-1}+(3-4a)\sqrt{a}}=$$

$$=\sqrt[3]{(a-1)\sqrt{a-1}-a\sqrt{a}-3\sqrt{a-1}\sqrt{a}\left(\sqrt{a-1}-\sqrt{a}\right)}=\sqrt[3]{(\sqrt{a-1}-\sqrt{a})^3}.$$

Отже, $\sqrt[3]{(4a-1)\sqrt{a-1}+(3-4a)\sqrt{a}}=\sqrt{a-1}-\sqrt{a}$. Далі маємо $\sqrt{2a-1+2\sqrt{a^2-a}}=\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}\sqrt{a}+a}=\sqrt{(\sqrt{a-1}+\sqrt{a})^2}=\sqrt{a-1}+\sqrt{a}$.

Таким чином, ліва частина даної тотожності дорівнює $(\sqrt{a-1}-\sqrt{a})\times$ $\times(\sqrt{a-1}+\sqrt{a}) = a-1-a = -1$, що й треба було довести. *

Іноді стає в пригоді *метод підстановки.*

Приклади

28. Спростити вираз $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-9}}{a-\sqrt{a^2-9}}}$, якщо $a \geq 3$.

* Покладемо $\sqrt{a+3} = x > 0$, $\sqrt{a-3} = y \geq 0$. Тоді $x^2 + y^2 = 2a$ і $a = \dfrac{x^2+y^2}{2}$. Тепер маємо

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{a-\sqrt{a^2-9}}} = \sqrt{\frac{(x^2+y^2)/2+xy}{(x^2+y^2)/2-xy}} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}} = \frac{x+y}{|x-y|} = \frac{x+y}{x-y},$$

бо $x > y$. Остаточно маємо $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-9}}{a-\sqrt{a^2-9}}} = \dfrac{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}$ при $a \geq 3$. *

29. Спростити вираз $\dfrac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right) + \left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$.

* Нехай $\sqrt[3]{x} = t$. Маємо $\dfrac{8-t^3}{2+t} : \left(2+\dfrac{t^2}{2+t}\right) + \left(t+\dfrac{2t}{t-2}\right)\dfrac{t^2-4}{t^2+2t}$.

1) $\dfrac{8-t^3}{2+t} : \dfrac{4+2t+t^2}{2+t} = \dfrac{8-t^3}{4+2t+t^2} = 2-t$; 2) $t+\dfrac{2t}{t-2} = \dfrac{t^2}{t-2}$;

3) $\dfrac{t^2}{t-2}\,\dfrac{t^2-4}{t^2+2t} = \dfrac{t(t+2)}{t+2} = t$; 4) $2-t+t = 2$. Відповідь: 2. *

Розглянемо *звільнення від ірраціональності в знаменнику.* Ця дія виконується за допомогою так званих *спряжених виразів* $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ та $\sqrt{u}-\sqrt{v}$.

Приклади

30. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

* Скористаємося основною властивістю дробу і домножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений знаменнику: $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$. *

31. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

$* \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$. Відповідь: $\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$. *

32. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

$$* \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6+2\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(6-2\sqrt{15})}{(6+2\sqrt{15})(6-2\sqrt{15})} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(6-2\sqrt{15})}{36-60} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{15}-3)}{12}. \text{ Відповідь: } \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{15}-3)}{12}. *$$

33. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$.

$$* \frac{1}{\sqrt[3]{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)} = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{3+1} = \frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{4}$. *

34. Довести тотожність $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

* З одного боку, $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5} =$

$= \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{2} = \sqrt{5}+\sqrt{7}$. Із другого боку, $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$.

Таким чином, ми привели обидві частини вихідної рівності до одного й того самого виразу.*

35. Спростити вираз $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$, якщо $x = \frac{a^2+1}{2a}$.

* Помітимо, що $a > 0$, бо інакше $x < 0$ і $\sqrt{x-1}$ не існує. У такому разі

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} =$$

$$= \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{2}.$$

При $x = \frac{a^2+1}{2a}$ маємо $\sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{a^2+1}{2a}-1} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{2a}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{2a}}$,

$\sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{a^2+1}{2a}} = \sqrt{\frac{(a+1)^2}{2a}} = \frac{a+1}{\sqrt{2a}}$. Вираз приймає вигляд

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{2a}}\left(\frac{a+1}{\sqrt{2a}}+\frac{|a-1|}{\sqrt{2a}}\right)\Big/2=\frac{|a-1|(a+1+|a-1|)}{4a}=A.$$

Тепер маємо два випадки:

1) $0<a\le 1$, тоді $A=\dfrac{(1-a)(a+1+1-a)}{4a}=\dfrac{1-a}{2a}$;

2) $1<a$, тоді $A=\dfrac{(a-1)(a+1+a-1)}{4a}=\dfrac{a-1}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{1-a}{2a}$, якщо $0<a\le 1$; $\dfrac{a-1}{2}$, якщо $a>1$. *

4.3. Якщо $a>0$, m — ціле, а n — натуральне число, більше ніж одиниця, то за означенням $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Наприклад, $3^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{3}$, $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$, $4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$.

Таким чином, означено піднесення додатного дійсного числа до раціонального степеня.

Основні п'ять властивостей раціонального степеня.

$$1.\ a^p a^q=a^{p+q}.\quad 2.\ a^p:a^q=a^{p-q}.\quad 3.\ a^p b^p=(ab)^p.$$

$$4.\ \frac{a^p}{b^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p.\quad 5.\ (a^p)^q=a^{pq}$$

($a>0$, $b>0$, p і q — раціональні числа). Підкреслимо, що раціональний степінь від'ємного числа не означається.

Приклади

1. Виконати дії $\dfrac{x-1}{x^{1/4}+x^{1\cdot 2}}\cdot\dfrac{x^{1\cdot 4}+x^{1\cdot 2}}{x^{1\cdot 2}+1}\,x^{1\cdot 4}+1$.

* $\dfrac{x-1}{x^{1\cdot 2}(x^{1\cdot 4}+1)}\cdot\dfrac{x^{1\cdot 4}(x^{1\cdot 4}+1)}{x^{1\cdot 2}+1}\,x^{1\cdot 4}+1=\dfrac{x-1}{x^{1\ 2}+1}+1=\dfrac{(x^{1\cdot 2})^2-1}{x^{1\ 2}+1}+1=x^{1\ 2}-1+1=x^{1\ 2}$.

Відповідь: $x^{1\cdot 2}$. *

2. Спростити вираз $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{1\cdot 2}-a^{-1\cdot 2}}-\dfrac{2}{a^{3\cdot 2}}-\dfrac{1-a^{-2}}{a^{1\cdot 2}+a^{-1\ 2}}$.

* 1) $\dfrac{a-\frac{1}{a^2}}{a^{1\cdot 2}-\frac{1}{a^{1\cdot 2}}}=\dfrac{a^3-1}{a^2}:\dfrac{a-1}{a^{1\cdot 2}}=\dfrac{a^2+a+1}{a^{3\ 2}}$; 2) $\dfrac{a^2+a+1}{a^{3\cdot 2}}-\dfrac{2}{a^{3\ 2}}=\dfrac{a^2+a-1}{a^{3\ 2}}$;

3) $\dfrac{1-a^{-2}}{a^{1\cdot 2}+a^{-1\cdot 2}}=\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right):\left(a^{1\ 2}+\dfrac{1}{a^{1\ 2}}\right)=\dfrac{a^2-1}{a^2}:\dfrac{a+1}{a^{1\ 2}}=\dfrac{a-1}{a^{3\ 2}}$;

4) $\dfrac{a^2+a-1}{a^{3/2}} - \dfrac{a-1}{a^{3/2}} = \dfrac{a^2}{a^{3/2}} = a^{1/2}$. Відповідь: $a^{1/2}$. *

4.4. Нехай $a > 0$, а α — ірраціональне число.

Якщо $a = 1$, то $a^\alpha = 1^\alpha = 1$ за означенням.

Якщо $a > 1$ і p, q — раціональні числа, причому $p < \alpha < q$, то a^α — число, що задовольняє подвійну нерівність $a^p < a^\alpha < a^q$.

Якщо $0 < a < 1$, а p, q — раціональні числа, причому $p < \alpha < q$, то a^α — число, що задовольняє подвійну нерівність $a^p > a^\alpha > a^q$.

Степінь із дійсним показником має ті самі п'ять властивостей, що й степінь із раціональним показником.

Вправи

1. Обчислити: а) $\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}$; б) $\sqrt{1\frac{11}{25}\cdot 1\frac{7}{9}}$.

2. Винести множник з-під знака кореня: а) $\sqrt{80}$; б) $\sqrt[3]{128}$; в) $\sqrt[4]{a^6}$; г) $\sqrt[5]{x^7}$.

3. Внести множник під знак кореня: а) $3\sqrt{10}$; б) $3\sqrt[4]{5}$; в) $a\sqrt[4]{b}$.

4. Перетворити корені: а) $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$; б) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}$; в) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$.

5. Перемножити корені: а) $\sqrt{a}\sqrt[5]{a}$; б) $\sqrt[3]{x}\sqrt{x}$; в) $\sqrt[4]{b^3}\cdot\sqrt{b}$.

6. Спростити вираз:

а) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}\ \sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[6]{97+56\sqrt{3}}\ \sqrt[3]{4\sqrt{3}-7}$.

7. Порівняти числа: а) $\sqrt{13}$ і $\sqrt[3]{48}$; б) $\sqrt{10}+\sqrt{11}$ і $\sqrt{8}+\sqrt{13}$.

8. Спростити вираз:

а) $\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\ \sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}$, якщо $-1 \le x \le 1$;

б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})$;

г) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$; д) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$.

9. Довести тотожність $\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}=2$.

10. Спростити вираз:

а) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, якщо $x=\dfrac{2}{a+\frac{1}{a}}$;

б) $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

в) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$;

г) $\dfrac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{2/3}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$; д) $\left(\dfrac{2a+a^{1/2}b^{1/2}}{3a}\right)^{-1}\left(\dfrac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a-a^{1/2}b^{1/2}}-\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$.

11. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$.

Відповіді до вправ

§ 1. 1. а) 3^6; б) 4^{m+3}; в) 7^{k-2}; г) $(n-k)^8$. **2.** а) $3\frac{6}{25}$; б) $-150\,000$; в) $662\frac{1}{27}$. **3.** а) $1{,}874\cdot10^1$; б) $5\cdot10^{-3}$; в) $8\cdot10^{-3}$; г) $3{,}29\cdot10^0$. **4.** а) $x\neq\pm3$; б) $a\neq\pm b$; в) $x\in[0;4)\cup(4;\infty)$. **5.** а) $x\neq-1$; б) $x\in[0;\infty)$; в) $x\in[0;\infty)$.

§ 2. 1. а) $7{,}2a^4$; б) $6x^3y^3$. **2.** а) $8a^4b^3$; б) $3x^5y^4z^3$. **3.** а) $4x^6y^2z^4$; б) $9a^4b^4c^2$. **4.** а) $4x^3y^2+4x^4y^2-3x^2y^2+3x^2y^3+2x^3y^3$; б) $2abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+b^2a+bc^2$. **5.** а) $9a^2b^2+4c^2-b^2-16a^2c^2-20abc$; б) $13a^2-24ab+13b^2$; в) $24a^2b+2b^3$; г) $54a^3+18a^2b$. **6.** а) $2xy(5y-4x)$; б) $(x-2y)(2x-y)$; в) $(a-4)(b+3)$; г) $(8a-11b)(8a+11b)$; д) $(5a-4b)(25a^2+20ab+16b^2)$; е) $(a+3b)(3a+b)$.

§ 3. 1. а) a^2-ab+b^2; б) $\dfrac{x+4y}{x-y}$; в) $\dfrac{a-b}{3(a^2+ab+b^2)}$. **2.** 2. **3.** 12. **4.** а) $\dfrac{3x^2}{18x^2y^2}$, $\dfrac{2(x^2+y^2)}{18x^2y^2}$ та $\dfrac{3x-x^2}{18x^2y^2}$; б) $\dfrac{21ax+7bx}{9a^2-b^2}$ та $\dfrac{18ay-6by}{9a^2-b^2}$; в) $\dfrac{10(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2}$, $\dfrac{5(a-b)^2}{(a^2-b^2)^2}$ та $\dfrac{6(a+b)^2}{(a^2-b^2)^2}$. **5.** а) $\dfrac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; б) $\dfrac{b^2+14b-7}{6(b^2-1)}$; в) $\dfrac{2x+5}{2x(2x-5y)}$; г) $\dfrac{x^2+xy}{3y}$; д) $\dfrac{2(x-y)^2}{y^2}$; е) $\dfrac{(x+y)(a-c)(a+4)(b-2)}{(c-3)(x-a)(c+y)(x-a)}$; є) $\dfrac{x}{x-1}$; ж) $\dfrac{t-1}{t+1}$; з) $\dfrac{1}{x+y}$; и) 1; і) $\dfrac{12}{a+2}$; ї) $\dfrac{x-y}{16(x^2-xy+y^2)}$. **6.** 3,75.

§ 4. 1. а) 84; б) $1\frac{3}{5}$. **2.** а) $4\sqrt{5}$; б) $4\sqrt[3]{2}$; в) $|a|\sqrt{|a|}$; г) $x\sqrt[5]{x^2}$. **3.** а) $\sqrt{90}$; б) $\sqrt[4]{405}$; в) $\sqrt[4]{a^4b}$ при $a\geq0$, $-\sqrt[4]{a^4b}$ при $a<0$. **4.** а) $a\sqrt[4]{a^3}$ при $a\geq0$; б) $\sqrt[5]{x^3}$; в) $\sqrt[6]{x^5}$. **5.** а) $\sqrt[10]{a^7}$; б) $\sqrt[6]{x^5}$; в) $b\sqrt[4]{b}$. **6.** а) 1; б) —1. **7.** а) $\sqrt{13}<\sqrt[3]{48}$; б) $\sqrt{10}+\sqrt{11}>\sqrt{8}+\sqrt{13}$; **8.** а) $\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{1-x^2}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) $2+\sqrt{3}$; г) 2 при $x\geq2$, $2\sqrt{x-1}$ при $1\leq x<2$; д) $\sqrt{2}$. **10.** а) a при $|a|>1$; $\frac{1}{a}$ при $|a|\leq1$, $a\neq0$; б) 1; в) $\sqrt{a^2-1}+a^2-1$; г) $a^{\frac{2}{3}}$; д) $3\sqrt{b}$. **11.** а) $\dfrac{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3}$; б) $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-1)}{4}$; в) $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$.

Тема 3. МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. Канонічна форма многочлена

1.1. *Многочленом* від x над множиною **М** називається вираз $f(x)$, який можна подати у вигляді

$$f(x) = b_0 x^{m_0} + b_1 x^{m_1} + \ldots + b_k x^{m_k},$$

де $m_0, m_1, \ldots, m_k$ — цілі невід'ємні числа; $b_0, b_1, \ldots, b_k$ — числа з множини **М**; x — змінна, що набуває будь-яких значень із множини **М**. (Вважається, що числа $m_0, m_1, \ldots, m_k$ попарно не рівні.)

Ми будемо розглядати лише многочлени над множиною всіх дійсних чисел.

Вирази $b_i x^{m_i}$ $(i = 0,1,\ldots,k)$ називаються *членами многочлена*, число b_i називається *коефіцієнтом члена* $b_i x^{m_i}$, а число m_i — його *степенем*. Числа $b_0, b_1, \ldots, b_k$ називаються *коефіцієнтами многочлена*. Найбільший зі степенів тих членів, коефіцієнти яких відмінні від нуля, називається *степенем многочлена*. Наприклад,

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 0x^{10} - 4x^5 - 6 \qquad (3.1)$$

є многочленом п'ятого степеня.

Якщо змінній x надати певного значення α, то дістанемо цілком визначене число $f(\alpha)$, що називається *числовим значенням многочлена* $f(x)$ при $x = \alpha$. Якщо всі коефіцієнти многочлена $f(x)$ є нулі, такий многочлен називається *нуль-многочленом*. Його степінь не визначений. Кожний многочлен від однієї змінної можна подати в канонічній формі:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — дійсні числа, $a_0 \neq 0$.

Член $a_0 x^n$ називається *старшим членом многочлена*, а число a_0 — *старшим коефіцієнтом многочлена*. Число a_n називається *вільним членом многочлена*, де n — степінь многочлена.

Канонічна форма многочлена (3.1) така: $f(x) = -4x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6$. Тут старший коефіцієнт многочлена (–4), а вільний член (–6).

Многочлен, старшим членом якого є вільний член (число a_n) називається *многочленом нульового степеня* (якщо $a_n \neq 0$).

Отже, *будь-яке дійсне число, відмінне від нуля, — це многочлен нульового степеня.*

У канонічній формі многочлена відсутні члени, коефіцієнти яких дорівнюють нулю, адже многочлен (3.1) можна подати у вигляді $f(x) = -4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 0x - 6$.

Канонічною формою нуль-многочлена є число 0.

Приклад

Подати в канонічній формі многочлен $f(x) = (x - 2)(x^2 + 1) + 4x - 1$.

* $f(x) = x^3 - x - 2x^2 - 2 + 4x - 1 = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$. Відповідь: $x^3 - 2x^2 + 5x - 3$. *

Два многочлени називаються тотожними, якщо їх значення рівні при будь-якому дійсному x. Запис $f_1(x) = f_2(x)$ означає, що многочлени $f_1(x)$ та $f_2(x)$ тотожні.

Теорема. *Для того щоб задані в канонічній формі многочлени були тотожними, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти їх членів, що містять x в однакових степенях, були рівні.* (Ясно, що ці многочлени мають однаковий степінь.)

Наслідок 1. *Якщо заданий у канонічній формі многочлен тотожно дорівнює нулю, то всі його коефіцієнти нулі.*

Наслідок 2. *Будь-який многочлен можна подати в канонічній формі єдиним способом.*

1.2. Сума, різниця, добуток двох многочленів є многочлен. Дії над многочленами зводяться до дій над їхніми коефіцієнтами. Додавання (віднімання) многочленів зводиться до додавання (віднімання) коефіцієнтів при однакових степенях x.

Приклади

1. Додати многочлени $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - x - 3$ та $g(x) = 2x^3 - 4x + 1$.

* $f(x) + g(x) = 5x^4 + (-4 + 2)x^3 + (7 + 0)x^2 + (-1 - 4)x - 3 + 1 = 5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x - 2$.
Відповідь: $5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x - 2$. *

2. Перемножити многочлени $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 1$ та $g(x) = 3x^2 - x - 2$.

* $f(x) \cdot g(x) = (2x^3 + x^2 - 3x - 1)(3x^2 - x - 2) = 2 \cdot 3x^5 + (2(-1) + 1 \cdot 3)x^4 + (2(-2) + 1(-1) + (-3)3)x^3 + (1(-2) + (-3)(-1) + (-1)3)x^2 + ((-3)(-2) + (-1)(-1))x + (-1)(-2) = 6x^5 + x^4 - 14x^3 - 2x^2 + 7x + 2$. Відповідь: $6x^5 + x^4 - 14x^3 - 2x^2 + 7x + 2$. *

Нехай
$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Тоді $f(x) \cdot g(x) = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m) = c_0x^{n+m} + c_1x^{n+m-1} + \ldots + c_{n+m}$.

У результаті множення многочлена n-го степеня на многочлен m-го степеня виходить многочлен $(n + m)$-го степеня. Коефіцієнти $c_0, c_1, \ldots, c_{n+m}$ називаються *неозначеними коефіцієнтами*, а метод їх знаходження — *методом неозначених коефіцієнтів*. У даному випадку $c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_1b_0 + a_0b_1$, $c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2$ і т.д.

Приклади

3. Розкласти на множники многочлен
$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3.$$

* Нехай $f(x) = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2)$, де a_1, a_2, b_1, b_2 — неозначені коефіцієнти. Далі маємо $(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = x^4 + (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + a_1a_2 + b_2)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2 = g(x)$.

Оскільки многочлени $f(x)$ та $g(x)$ тотожні, їхні канонічні форми збігаються. Це приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ b_1 + a_1a_2 + b_2 = -3, \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 4, \\ b_1b_2 = -3, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} a_1 = -a_2, \\ b_1 - a_1^2 + b_2 = -3, \\ a_1b_2 - a_1b_1 = 4, \\ b_1b_2 = -3. \end{cases}$$

Спробуємо розв'язати цю систему методом добору. Візьмемо $b_1 = 1$, $b_2 = -3$. Тоді маємо

$$\begin{cases} a_2 = -a_1, \\ -2 - a_1^2 = -3, \\ -3a_1 - a_1 = 4. \\ b_1 = 1.\ b_2 = -3. \end{cases}$$

звідки $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -3$. Відповідь: $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 3)$. *

4. Відомо, що $\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$. Знайти A та B.

* $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A - 3B}{x^2-5x+6}$. Многочлени $2x + 1$ та $(A + B)x - 2A - 3B$ тотожні. Це приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ -2A - 3B = 1, \end{cases}$$

звідки $A = 7$, $B = -5$. Відповідь: $A = 7$, $B = -5$. *

5. Довести, що многочлен $(x-1)x(x+1)(x+2) + 1$ є квадратом тричлена.

* $f(x) = (x-1)x(x+1)(x+2) + 1 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Нехай $f(x) = (x^2 + ax + b)^2$, де a, b — невизначені коефіцієнти. Тоді $f(x) = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2$. Звідси одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2a = 2, \\ a^2 + 2b = -1, \\ 2ab = -2, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $a = 1$, $b = -1$.

Отже, $(x-1)x(x+1)(x+2) + 1 = (x^2 + x - 1)^2$. *

Вправи

1. Подати в канонічній формі многочлен:

а) $f(x) = (x-1)x(x+1) + 4$; б) $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$;

в) $f(x) = x(x+1)(x+2) + (x+1)(x+2)(x+3) + (x+2)(x+3)(x+4)$.

2. Дано многочлени $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$ та $g(x) = 2x^3 - 2x + 1$. Знайти многочлени: а) $f(x) + g(x)$; б) $f(x) - g(x)$; в) $f(x) \cdot g(x)$.

3. Дано многочлени $a = x^2 - x + 2$, $b = 4x^2 + 3x + 1$, $c = 2x^2 + 5x + 4$, $x \in \mathbf{R}$. Довести, що $2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(ab + bc + ca)$.

4. Дано многочлени $f(x) = x^2 + x - 1$ та $g(x) = 5x^2 - x + 13$. Довести, що $f(x) = \frac{3}{5}g(x-1) - \frac{2}{5}g(2-x)$ та $g(x) = 3f(x+1) + 2f(2-x)$.

5. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів розкласти на множники многочлен: а) $x^4 - x^2 + 2x - 1$; б) $x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 96x - 144$; в) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + 3$.

6. Відомо, що $\frac{1-4x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$. Знайти A та B.

7. Довести, що многочлен $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$ є квадратом тричлена, і знайти цей тричлен.

§ 2. Подільність многочленів. Корені многочленів

2.1. Ділення многочленів багато в чому нагадує ділення натуральних чисел.

Нехай $F(x)$ та $f(x)$ — деякі многочлени, причому степінь многочлена $F(x)$ не менший за степінь многочлена $f(x)$.

1. Якщо існує такий многочлен $q(x)$, що $F(x) = f(x) \cdot q(x)$, то кажуть, що многочлен $F(x)$ ділиться на многочлен $f(x)$ без остачі. Наприклад, многочлен $F(x) = x^3 - 1$ ділиться без остачі на многочлен $f(x) = x^2 + x + 1$, бо $F(x) = f(x) \cdot (x - 1)$.

Многочлен $F(x)$ називається *діленим*, многочлен $f(x)$ — *дільником*, а многочлен $q(x)$ — *часткою*.

2. Якщо такого многочлена $q(x)$ не існує, то відбувається ділення з остачею.

Поділити многочлен $F(x)$ на многочлен $f(x)$ означає подати многочлен $F(x)$ у вигляді

$$F(x) = f(x) \cdot q(x) + r(x),$$

де степінь многочлена $r(x)$ менший від степеня многочлена $f(x)$. Многочлен $r(x)$ називається *остачею*. Можна довести, що для будь-яких многочленів $F(x)$ та $f(x)$ многочлени $q(x)$ та $r(x)$ існують і визначаються єдиним способом. Для ділення многочлена на многочлен існує правило ділення «кутом».

Приклади

1. Розділити многочлен $F(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2$ на многочлен $f(x) = x^2 - x - 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2 & x^2 - x - 1 \\ \hline x^4 - x^3 - x^2 & x^2 - x + 3 \\ \hline -x^3 + 4x^2 - x & \\ -x^3 + x^2 + x & \\ \hline 3x^2 - 2x - 2 & \\ 3x^2 - 3x - 3 & \\ \hline x + 1 & \end{array}$$

Відповідь: $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2 = (x^2 - x - 1)(x^2 - x + 3) + x + 1$ (тут $q(x) = x^2 - x + 3$, а $r(x) = x + 1$.) *

2. Розділити $F(x) = x^5 - x + 1$ на $f(x) = x^2 - x + 1$.

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 1 & x^2 - x + 1 \\ \hline x^5 - x^4 + x^3 & x^3 + x^2 - 1 \\ \hline x^4 - x^3 + 0x^2 & \\ x^4 - x^3 + x^2 & \\ \hline -x^2 - x + 1 & \\ -x^2 + x - 1 & \\ \hline -2x + 2 & \end{array}$$

Відповідь: $x^5 - x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1) - 2x + 2$ (тут $q(x) = x^3 + x^2 - 1$, $r(x) = -2x + 2$). *

3. При якому значенні a многочлен $F(x) = 2x^3 - x^2 + ax - 15$ ділиться на многочлен $x + 3$ без остачі?

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + ax - 15 & x + 3 \\ \hline 2x^3 + 6x^2 & 2x^2 - 7x + a + 21 \\ \hline -7x^2 + ax & \\ -7x^2 - 21x & \\ \hline (a + 21)x - 15 & \\ (a + 21)x + 3a + 63 & \\ \hline -3a - 78 & \end{array}$$

Ми бачимо, що $r(x) = -3a - 78$. Якщо ділення відбувається без остачі, то $r(x) = 0$. Отже, $-3a - 78 = 0$ і $a = -26$. Відповідь: $a = -26$. *

4. При яких значеннях a і b многочлен $x^3 - 2x^2 + ax + b$ ділиться без остачі на многочлен $x^2 - 1$?

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 + ax + b & x^2 - 1 \\ \underline{-\,x^3 \qquad - x} & \\ -2x^2 + (a+1)x + b & x - 2 \\ \underline{-\,2x^2 \qquad + 2} & \\ (a+1)x + b - 2 & \end{array}$$

Ми одержали остачу $r(x) = (a + 1)x + b - 2$. Якщо ділення відбувається без остачі, то $r(x) = 0$, звідки маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a + 1 = 0, \\ b - 2 = 0, \end{cases} \text{ і } a = -1,\ b = 2.$$

Перевірка: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^2 - 1)(x - 2)$. Відповідь: $a = -1$, $b = 2$. *

2.2. В деяких випадках ділення «кутом» можна замінити коротшою процедурою.

Теорема Безу* . *Остача від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює $F(a)$ (тобто результату підстановки числа a в многочлен $F(x)$).*

* За означенням ділення з остачею $F(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$, де r — многочлен нульового степеня або деяке число. Підставляючи в цю рівність значення $x = a$, матимемо $F(a) = r$, що й потрібно було довести. *

Приклади

1. Знайти остачу від ділення многочлена $F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ на двочлен $x - 1$.

* Згідно з теоремою Безу $r = F(1) = 1$. (Як бачимо, ми обійшлися без ділення «кутом».) Відповідь: 1. *

2. При якому значенні a остача від ділення многочлена $F(x) = 4x^3 - ax^2 + 3x - 5$ на двочлен $x + 1$ дорівнює 5?

* Згідно з теоремою Безу $F(-1) = 5$, або $-12 - a = 5$, звідки $a = -17$. Відповідь: -17. *

3. У разі ділення деякого многочлена на двочлен $x - 1$ виходить остача 3, а в разі ділення того самого многочлена на двочлен $x - 2$ виходить остача 5. Яка буде остача в разі ділення цього многочлена на тричлен $x^2 - 3x + 2$?

* Нехай многочлен $F(x)$ — ділене. Згідно з теоремою Безу $F(1) = 3$, $F(2) = 5$. Згідно з означенням ділення з остачею $F(x) = (x^2 - 3x + 2)q(x) + r(x)$, де $r(x)$ — многочлен, степінь якого не вищий за одиницю. Отже, $F(x) = (x - 1)(x - 2)q(x) + ax + b$. Тепер маємо $F(1) = 3 = a + b$; $F(2) = 5 = 2a + b$. З одержаної системи рівнянь знаходимо, що $a = 2$, $b = 1$. Відповідь: $2x + 1$. *

Число α називається *коренем многочлена $F(x)$*, якщо $F(\alpha) = 0$. Наприклад, число 1 є коренем многочлена $F(x) = x^2 - 6x + 5$, бо $F(1) = 0$.

Наслідок із теореми Безу. *Для того щоб число α було коренем многочлена $F(x)$, необхідно і достатньо, щоб він ділився на двочлен $x - \alpha$ без остачі.*

Приклади

4. Довести, що многочлен $F(x) = x^n - a^n$ ділиться без остачі на $x - a$ при $n \in \mathbb{N}$.

* $F(a) = a^n - a^n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Отже, $F(x)$ ділиться на $x - a$ без остачі. *

5. Довести, що многочлен $x^n + a^n$ не ділиться на $x - a$ без остачі ($a \neq 0$) при $n \in \mathbb{N}$.

* Нехай $F(x) = x^n + a^n$. Тоді $F(a) = 2a^n \neq 0$. Отже, $x = a$ не є коренем многочлена $F(x)$. *

6. Розкласти на множники многочлен $F(x) = 2x^3 - x - 51$.

---

* Безу Е. (1730–1783) — французький математик

* $F(3) = 2 \cdot 27 - 3 - 51 = 0$. Отже, $x = 3$ — корінь многочлена $F(x)$. Поділимо $F(x)$ на $x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 0x^2 - x - 51 & x - 3 \\ \underline{-\,2x^3 - 6x^2} & \\ 6x^2 - x & 2x^2 + 6x + 17 \\ \underline{-\,6x^2 - 18x} & \\ 17x - 51 & \\ \underline{17x - 51} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $2x^3 - x - 51 = (x - 3)(2x^2 + 6x + 17)$. Многочлен $2x^2 + 6x + 17$ далі не розкладається, бо не має коренів. Відповідь: $(x - 3)(2x^2 + 6x + 17)$. *

Видно, що задача знаходження коренів многочлена рівносильна задачі розкладання його на множники.

Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — попарно різні корені многочлена $F(x)$, то $F(x)$ ділиться без остачі на кожен із двочленів $x - \alpha_1, x - \alpha_2, \ldots, x - \alpha_n$. Тоді $F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)q(x)$, де $q(x)$ — деякий многочлен.

Теорема. *Многочлен n-го степеня не може мати більше ніж n коренів, якщо він не є нуль-многочленом.*

* Дійсно, нехай $F(x)$ — многочлен n-го степеня, що не є нуль-многочленом і має $n + 1$ корінь — $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Тоді $F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1})q(x)$, де $q(x)$ — деякий многочлен. Очевидно, що степінь многочлена $F(x)$ дорівнює $n + 1 + p$, де p — степінь многочлена $q(x)$ $(p \geq 0)$. Оскільки $n + 1 + p > n$, ми прийшли до протиріччя. *

Наслідок. *Якщо многочлен n-го степеня має більше ніж n коренів, то він є нуль-многочленом.*

Приклад

7. Довести тотожність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1.$$

(Тут a, b, c — попарно не рівні між собою числа.)

* Розглянемо многочлен другого степеня

$$F(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} - 1.$$

Цей многочлен має три корені: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$. Отже, він є нуль-многочленом, що й завершує доведення. *

2.3. Теорема Безу дає змогу знайти остачу від ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $x - a$, не роблячи самого ділення. Але вона не надає можливості знайти частку від цього ділення.

Наведемо схему для ділення многочлена на двочлен, що замінює ділення «кутом». Ця схема називається *схемою Горнера** .

Нехай $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. У результаті ділення многочлена $F(x)$ на двочлен $(x - \alpha)$ маємо $F(x) = (x - \alpha)q(x) + r$, де $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$. Одержи-

* Горнер В. (1786–1837) — англійський математик

мо рівність $a_0x^n + a_1x^{n+1} + \ldots + a_n = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + r$. Розкривши дужки в правій частині цієї рівності і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах, матимемо: $a_0 = b_0$, $a = b_k - \alpha b_{k-1}$ (якщо $k = 1,2,\ldots,n$). Звідси одержимо, що $b_0 = a_0$ і $b_k = a_k + \alpha b_{k-1}$ при $k = 1,2,\ldots,n$. Тепер складемо таблицю для здобування многочлена $q(x)$ та r:

a_0	a_1	a_2	...	a_n
b_0	$b_1 = a_1 + \alpha b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha b_1$	...	$r = a_n + \alpha b_{n-1}$

Приклади

1. Поділити многочлен $F(x) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x + 2$ на двочлен $x - 2$.

* Проведемо ділення за допомогою схеми Горнера (тут $\alpha = 2$):

	2	–4	5	–1	2
$\alpha = 2$	2	$-4 + 2 \cdot 2 = 0$	$5 + 2 \cdot 0 = 5$	$-1 + 2 \cdot 5 = 9$	$2 + 2 \cdot 9 = 20$

Відповідь: $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x + 2 = (x - 2)(2x^3 + 5x + 9) + 20$. *

2. Поділити многочлен $F(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 3$ на двочлен $x + 1$.

* Складемо схему Горнера:

	3	–5	2	–1	4	–3
$\alpha = -1$	3	–8	10	–11	15	–18

Відповідь: $3x^5 - 5x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 3 = (x + 1)(3x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 11x + 15)$ 18. *

Проілюструємо на прикладі поняття *кратності кореня*. Нехай $F(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$. Поділимо многочлен $F(x)$ на двочлен $x - 1$ за допомогою схеми Горнера:

	1	–5	9	–7	2
$\alpha = 1$	1	–4	5	–2	0

Ми бачимо, що $F(x) = (x - 1)(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$. Отже, $x = 1$ є коренем многочлена $F(x)$. Та сама схема Горнера дає змогу поділити многочлен $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ на двочлен $x - 1$.

	1	–5	9	–7	2
$\alpha = 1$	1	–4	5	–2	0
$\alpha = 1$	1	–3	2	0	

Маємо $F(x) = (x - 1)^2(x^2 - 3x + 2)$. Продовжуючи ділення, здобудемо $F(x) = (x - 1)^3(x - 2)$.

	1	–5	9	–7	2
$\alpha = 1$	1	–4	5	–2	0
$\alpha = 1$	1	–3	2	0	
$\alpha = 1$	1	–2	0		

Многочлен $F(x)$ ділиться на $(x-1)^3$, але не ділиться на $(x-1)^4$. У такому разі кажуть, що число 1 є коренем кратності 3 многочлена $F(x)$.

Натуральне число n називається *кратністю кореня* α многочлена $F(x)$, якщо $F(x)$ ділиться без остачі на $(x-\alpha)^n$, але не ділиться без остачі на $(x-\alpha)^{n+1}$.

Приклади

3. Знайти кратність кореня $\alpha = 2$ многочлена $F(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 8x - 4$.

* Застосуємо схему Горнера:

	1	–3	1	–1	8	–4
$\alpha = 2$	1	–1	–1	–3	2	0
$\alpha = 2$	1	1	1	–1	0	
$\alpha = 2$	1	3	7	13		

Отже, $F(x) = (x-2)^2(x^3 + x^2 + x - 1) = (x-2)^3(x^2 + 3x + 7) + 13(x-2)^2$. **Відповідь:** число 2 є коренем многочлена $F(x)$ кратності 2. *

4. Розкласти на множники многочлен $F(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12$.

* Складемо схему Горнера:

	1	–5	3	13	–8	–12
$\alpha = -1$	1	–6	9	4	–12	0
$\alpha = -1$	1	–7	16	–12	0	
$\alpha = 2$	1	–5	6	0		
$\alpha = 2$	1	–3	0			

Відповідь: $F(x) = (x+1)^2(x-2)^2(x-3)$. *

5. У многочлені $F(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ запровадити підстановку $y = x + 1$.

* Звичайно, можна замість x підставити $y - 1$: $2(y-1)^3 - 5(y-1)^2 + 4(y-1) - 3 = 2(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) - 5(y^2 - 2y + 1) + 4y - 7 = 2y^3 - 11y^2 + 20y - 14$. Але в разі великих степенів многочлена така процедура буде досить громіздкою. На допомогу приходить схема Горнера:

	2	–5	4	–3
$\alpha = -1$	2	–7	11	–14
$\alpha = -1$	2	–9	20	
$\alpha = -1$	2	–11		

Із цієї схеми видно, що $F(x) = y(2x^2 - 7x + 11) - 14 = y^2(2x - 9) + 20y - 14 = 2y^3 - 11y^2 + 20y - 14$. **Відповідь:** $2y^3 - 11y^2 + 20y - 14$. *

6. У многочлені $F(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5$ запровадити підстановку $y = x - 2$.

* Складемо схему Горнера:

	3	1	–2	–4	–5
$\alpha = 2$	3	7	12	20	35
$\alpha = 2$	3	13	38	96	
$\alpha = 2$	3	19	76		
$\alpha = 2$	3	25			

Відповідь: $F(x) = 3y^4 + 25y^3 + 76y^2 + 96y + 35$. *

2.4. Лишається відкритим питання, як знайти корені многочлена. У загальному вигляді це питання розглядається в курсі вищої алгебри. Ми покажемо, як знайти раціональні корені многочлена з раціональними коефіцієнтами.

Якщо число α є коренем многочлена $F(x)$, то воно ж є коренем многочлена $F_1(x) = p \cdot F(x)$, де p — ціле число, що не дорівнює нулю.

Якщо серед коефіцієнтів многочлена $F(x)$ є дроби, потрібно домножити $F(x)$ на К, де К — найменше спільне кратне знаменників цих дробів. Наприклад, $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{4}$. У цьому випадку К(2,3,4) = 12. Тоді $F_1(x) = 12F(x) = 6x^3 - 4x^2 + 24x - 3$.

Многочлен із цілими коефіцієнтами $F_1(x)$ має ті самі корені, що й многочлен $F(x)$.

Далі розглядатимемо лише многочлени із цілими коефіцієнтами. Многочлен називається *зведеним*, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці. Ось приклади зведених многочленів: $x^3 - 4x^2 - x - 3$, $x^5 + 2x^4 - x + 2$. Нехай $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ і $a_0 \neq 1$, $a_0 \neq 0$. Розглянемо многочлен $F_1(x) = a_0^{n-1} \cdot F(x) = a_0^n x^n + a_1 a_0^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0^{n-1} a_{n-1} x + a_0^{n-1} a_n$ Після підстановки $y = a_0x$ маємо $F_2(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_0^{n-2} a_{n-1} y + a_0^{n-1} a_n$. Ми одержали зведений многочлен $F_2(y)$ із цілими коефіцієнтами, причому, якщо β — корінь многочлена $F_2(y)$, то $\alpha = \frac{\beta}{a_0}$ — корінь многочлена $F(x)$.

Приклад

1. Знайти корені многочлена $F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$.

* $F_1(x) = 2^2 \cdot 2x^3 - 2^2 \cdot 3x^2 - 2^2 \cdot 5x + 2^2 \cdot 1 = 8x^3 - 12x^2 - 20x + 4$. Поклавши $y = 2x$, одержуємо многочлен $F_2(y) = y^3 - 3y^2 - 10y + 4$. Якщо β — корінь многочлена $F_2(y)$, то $\alpha = \frac{\beta}{2}$ — корінь многочлена $F(x)$. *

Таким чином, знаходження коренів многочлена зводиться до відшукання раціональних коренів зведеного многочлена із цілими коефіцієнтами.

Теорема. *Якщо зведений многочлен із цілими коефіцієнтами має раціональний корінь, то цей корінь — ціле число, що є дільником вільного члена.*

* Нехай $F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ — зведений многочлен із цілими коефіцієнтами, $\alpha = \frac{p}{q}$ — його раціональний корінь (можна вважати, що дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний). Тоді

$$F\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0,$$

звідки

$$p^n = -q\left(a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}\right). \quad (3.2)$$

$$a_nq^n = -p\left(p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}\right). \quad (3.3)$$

Із рівності (3.2) маємо $p'' = -qM$, де M — деяке ціле число. Звідси ясно, що p'' ділиться на q. Але за умовою p і q взаємно прості, бо дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний. Отже, $q = \pm 1$. Тепер із рівності (3.3) маємо $a_n(\pm 1)'' = -pL$, де L — деяке ціле число. Тепер ясно, що a_n ділиться на p. Отже, $\alpha = \frac{p}{\pm 1}$ — ціле число, що є дільником вільного члена a_n. *

Приклади

2. Знайти раціональні корені многочлена $F(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

* Якщо цей многочлен має раціональний корінь, то це — ціле число, що є дільником числа 6. Отже, раціональні корені даного многочлена слід шукати серед чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Складемо схему Горнера:

	1	–2	–5	6
$\alpha = 1$	1	–1	–6	0

Таким чином, $F(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$. Відповідь: $x \in \{-2; 1; 3\}$. *

3. Знайти раціональні корені многочлена $F(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$.

* Раціональні корені многочлена слід шукати серед чисел $\pm 1, \pm 3$. Складемо схему Горнера:

	1	–4	2	–3
$\alpha = 1$	1	–3	1	–4
$\alpha = -1$	1	–5	7	–10
$\alpha = 3$	1	–1	–1	–6
$\alpha = -3$	1	–7	23	–72

Ми бачимо, що жодне із вказаних чисел не підходить. Відповідь: многочлен не має раціональних коренів. *

4. Знайти раціональні корені многочлена $F(x) = 2x^3 - x^2 - 14x - 12$.

* Для одержання зведеного многочлена домножимо многочлен $F(x)$ на 2^2: $F_1(x) = 2^2F(x) = 8x^3 - 4x^2 - 56x - 48$. Покладемо $2x = y$. Тоді $F_2(y) = y^3 - y^2 - 28y - 48$. Число 48 має багато дільників: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 48$. Пошук кореня за схемою Горнера може виявитися задовгим:

	1	–1	–28	–48
$\alpha = 1$	1	0	–28	–76
$\alpha = -1$	1	–2	–26	–22
$\alpha = 2$	1	1	–26	–100
$\alpha = -2$	1	–3	–22	–4
$\alpha = 3$	1	2	–22	–114
$\alpha = -3$	1	–4	–16	0

Зі схеми видно, що $F_2(y) = (y + 3)(y^2 - 4y - 16)$. Тричлен $y^2 - 4y - 16$ має ірраціональні корені $y_1 = 2 - 2\sqrt{5}$ та $y_2 = 2 + 2\sqrt{5}$.

Отже, многочлен $F_2(y)$ має єдиний раціональний корінь $y = -3$. Відповідно многочлен $F(x)$ має єдиний раціональний корінь $x = -\frac{3}{2}$. Відповідь: $x = -\frac{3}{2}$. *

Зауваження. Ясно, що многочлен $F(x)$ має такі дійсні корені: $x = -\frac{3}{2}$. $x = 1 - \sqrt{5}$ та $x = 1 + \sqrt{5}$.

Для того щоб скоротити процедуру перебору за схемою Горнера, доведемо теорему.

Теорема. *Нехай α — раціональний корінь зведеного многочлена із цілими коефіцієнтами $F(x)$ і k — ціле число, тоді $F(k)$ ділиться на $\alpha - k$.*

* Згідно з теоремою Безу

$$F(x) = (x - k)\,q(x) + F(k). \qquad (3.4)$$

Оскільки $F(x)$ — зведений многочлен із цілими коефіцієнтами, то і $q(x)$ — зведений многочлен із цілими коефіцієнтами. Із рівності (3.4) маємо $F(\alpha) = (\alpha - k)\,q(\alpha) + F(k)$, де α — корінь многочлена $F(x)$. Отже, $F(\alpha) = 0$ і $F(k) = -q(\alpha)(\alpha - k)$. Оскільки $F(k)$ і $q(\alpha)$ — цілі числа, то $F(k)$ ділиться на $\alpha - k$. *

Приклади

5. Знайти раціональні корені многочлена $F(x) = x^3 - 6x^2 - x - 30$.

* Раціональні корені слід шукати серед чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$.

Складемо схему Горнера ($F(1) = 24$):

	1	–6	–1	30
$\alpha = 1$	1	–5	–6	24
$\alpha = -1$	1	–7	6	24
$\alpha = 2$	1	–4	–9	12
$\alpha = -2$	1	–8	15	0

Згідно зі щойно доведеною теоремою, якщо α — корінь многочлена $F(x)$, то число $F(1) = 24$ ділиться на $\alpha - 1$. Таким чином, коренями «претендують» бути числа –1, 2, –2, 3, –3, 5, –5. Йдучи далі за схемою Горнера, бачимо, що –1 і 2 не є коренями, а $F(2) = 12$. Отже, якщо α — корінь многочлена $F(x)$, то 12 ділиться на $\alpha - 2$. Залишається перевірити три числа: –2, 3 та 5. Зі схеми Горнера маємо: $F(x) = (x + 2)(x^2 - 8x + 15) = (x + 2)(x - 3)(x - 5)$. Відповідь: $x \in \{-2; 3; 5\}$. *

Як буде показано далі, у ряді випадків за допомогою штучних прийомів удається знайти всі дійсні корені многочлена з дійсними коефіцієнтами.

Вправи

1. За допомогою ділення «кутом» поділити многочлен $F(x)$ на многочлен $f(x)$:

а) $F(x) = x^3 + 1$, $f(x) = x - 2$; б) $F(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x - 1$, $f(x) = x^2 - x$;

в) $F(x) = 3x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x - 6$, $f(x) = x^4 + 2x + 2$; г) $F(x) = 5x^4 - 4x^3 - 2x - 1$, $f(x) = x^2 + x + 2$.

2. При якому значенні a многочлен $F(x) = 4x^3 - 2x^2 - ax - 8$ ділиться на $x - 2$ без остачі?

3. При яких значеннях a і b многочлен $F(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + ax + b$ ділиться на многочлен $f(x) = x^2 - x + 2$ без остачі?

4. Знайти a, b, c, при яких многочлен $F(x) = 2x^4 - ax^2 + bx + c$ ділиться на $x + 2$ без остачі, а в разі ділення на $x^2 - 1$ має в остачі x.

5. Знайти остачу від ділення:

а) многочлена $F(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 4$ на $x - 2$;

б) многочлена $F(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 7x^2 + 6x + 2$ на $x + 3$;

в) многочлена $F(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x + 2$ на $x - 4$.

6. При якому значенні a остача від ділення многочлена $F(x) = 3x^4 - ax^3 + 2x^2 - 4x + 2$ на $x + 2$ дорівнює 2?

7. У разі ділення деякого многочлена на двочлен $x + 1$ виходить остача 2, а в разі ділення того самого многочлена на $x - 3$ виходить остача 1. Яка буде остача в разі ділення цього многочлена на тричлен $x^2 - 2x - 3$?

8. Довести, що при натуральному непарному n многочлен $x^n + a^n$ ділиться на $x + a$ без остачі.

9. Довести, що при натуральному парному n многочлен $x^n - a^n$ ділиться на $x + a$ без остачі.

10. Розкласти на множники многочлени:

а) $x^3 - x^2 - 5x + 6$; б) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 7x + 2$; в) $x^3 - 13x - 12$; г) $2x^3 + x^2 - 8x - 4$;

д) $3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$.

11. Довести тотожність

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$$

(числа a, b, c попарно не рівні).

12. Знайти кратність кореня:

а) $\alpha = 2$ многочлена $x^3 - 12x + 16$; б) $\alpha = -1$ многочлена $x^4 - 6x^2 - 8x - 3$;

в) $\alpha = 1$ многочлена $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2$.

13. У многочлені $F(x)$ запровадити підстановку:

а) $F(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 4$, $y = x - 2$; б) $F(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 3$, $y = x + 1$.

14. Знайти раціональні корені многочленів:

а) $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$; б) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$; в) $6x^3 + x^2 - 7x + 2$;

г) $8x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$; д) $x^4 - x^3 + x^2 + 2$;

е) $x^4 - x^3 - 28x^2 - 20x + 48$; є) $x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120$.

15. Розв'язати рівняння, знайшовши спочатку їх раціональні корені:

а) $x^3 + 6x^2 + 2x - 15 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 - 9x + 4 = 0$; в) $6x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0$;

г) $10x^4 + 13x^3 - 8x^2 - 4x + 1 = 0$.

Відповіді до вправ

§ 1. 1. а) $f(x) = x^3 - x + 4$; б) $f(x) = 2x^2 + 2$; в) $f(x) = 3x^3 + 18x^2 + 39x + 30$. **2.** а) $f(x) + g(x) = 6x^3 - 5x^2 - x$; б) $f(x) - g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$; в) $f(x) \cdot g(x) = 8x^5 - 6x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x - 1$. **5.** а) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$; б) $(x^2 + 2x - 6)(x^2 - 8x + 24)$; в) $(x - 1)^2(x^2 - x + 3)$. **6.** $A = -\frac{3}{2}$; $B = -\frac{5}{2}$. **7.** $(x^2 + 5x + 5)^2$.

§ 2. 1. а) $x^3 + 1 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 9$; б) $F(x) = f(x)(2x^2 - x - 3) - 8x + 1$; в) $F(x) = f(x)(3x^2 + 2) - 8x^3 - 6x^2 - 3x - 10$; г) $F(x) = f(x)(5x^2 - 9x + 9) + 11x - 19$. **2.** $a = -24$. **3.** $a = -3$, $b = -2$. **4.** $a = 9\frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = 7\frac{1}{3}$. **5.** а) 10; б) –997; в) 266. **6.** $a = -8$. **7.** $-\frac{1}{4}x + 1\frac{3}{4}$. **10.** а) $(x - 2)(x^2 + x - 3)$; б) $(x + 2)(x^3 - 4x + 1)$; в) $(x + 1)(x + 3)(x - 4)$; г) $(2x + 1)(x + 2)(x - 2)$; д) $(3x - 1)(x^2 - x + 2)$. **12.** а) 2; б) 3; в) 4. **13.** а) $4y^3 + 18y^2 + 27y + 10$; б) $3y^4 - 14y^3 + 23y^2 - 17y + 8$. **14.** а) $x \in \{-1; 3\}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = \frac{1}{3}$; г) $x \in \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$; д) раціональних коренів немає; е) $x \in \{-4; -2; 1; 6\}$; є) $x \in \{-5; -3; 2; 4\}$. **15.** а) $x_1 = -5$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) $x_1 = 4$, $x_2 = -1 \pm \sqrt{2}$; в) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$; г) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Тема 4. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЇ

§ 1. Множини. Поняття функції

1.1. Під *множиною* розуміють будь-яку сукупність, об'єднання довільних об'єктів, що при цьому називаються *елементами утвореної ними множини*. Запис $a \in \mathbf{M}$ означає, що a є елементом множини **M**. Якщо a не є елементом множини **M**, то пишуть: $a \notin \mathbf{M}$. Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою множиною* і позначається символом $\varnothing$. Множина, елементами якої є числа або проміжки числової осі, називається *числовою множиною*. Якщо множина містить небагато елементів, їх можна вказати у фігурних дужках: $\mathbf{M} = \{a, b, c, n\}$, $A = \{3; 7; 16\}$. Якщо множина A містить багато елементів, її позначають так: $A = \{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ вказує на властивість кожного з елементів множини A. Наприклад, $A = \{x \mid x = 3k\}$ — множина всіх цілих чисел, що діляться на 3; $B = \{x \mid x^2 - 1 \le 0\}$ — множина всіх розв'язків нерівності $x^2 - 1 \le 0$. Звичайно, $B = [-1; 1]$. Зрозуміло, що так само можна позначати й множини, що містять небагато елементів. Наприклад, $C = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ — множина розв'язків рівняння $x^2 - 1 = 0$, тобто $C = \{-1; 1\}$.

1.2. Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то множина A називається *підмножиною* множини B. Позначається це так: $A \subset B$. Наприклад, якщо $A = \{x \mid x = 2n - 1\}$ (множина непарних натуральних чисел), **N** — множина натуральних чисел, то $A \subset \mathbf{N}$; якщо $A_1 = \{2; 4; 6\}$, $A = \{1; 2; 3; 4; 6\}$, то $A_1 \subset A$; $[0; 1) \subset [0; 1]$ і т.д. Зазначимо, що для важливих множин **N**, **Z**, **Q**, **R**, які розглядалися в темі 1, мають місце співвідношення: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини за означенням. Якщо водночас виконуються співвідношення $A \subset B$ і $B \subset A$, то кажуть, що множини A і B збігаються: $A = B$.

1.3. *Об'єднанням* множин A і B (рис. 4.1) називається множина C усіх тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із множин A, B, що позначається так: $C = A \cup B$.

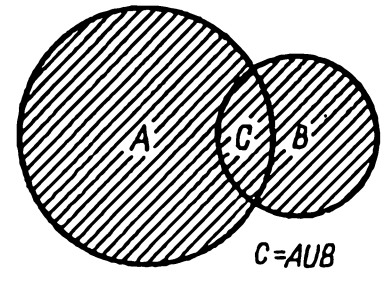


Рис. 4.1

Аналогічно об'єднанням кількох множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається множина C усіх тих і тільки тих елементів, що належать хоча б одній із цих множин: $C = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, або $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Об'єднання нескінченної послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ позначається так: $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Перерізом множин A і B (рис. 4.2) називається множина C їх усіх спільних елементів: $C = A \cap B$. Перерізом кількох множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається множина C їх

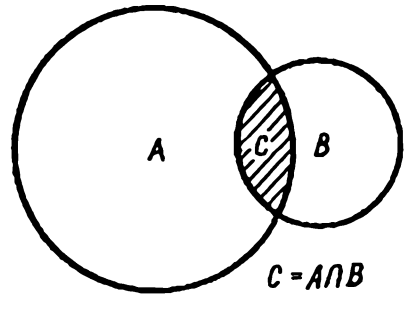


Рис. 4.2

усіх спільних елементів, що позначається так: $C = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, або $C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Переріз нескінченної послідовності множин $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ позначається так: $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Приклади

1. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. $B = \{2; 3; 6\}$. Об'єднання множин $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, переріз $A \cap B = \{2; 3\}$.

2. $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{-1\}$. Об'єднання множин $A \cup B = \{-1; 1; 2; 3\}$, переріз $A \cap B = \varnothing$.

3. $A = [0; 1)$. $B = (1/2; 2]$. Об'єднання множин $A \cup B = [0; 2]$; переріз $A \cap B = (1/2; 1)$.

4. $A = [-3; 4]$. $B = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. Об'єднання множин $A \cup B = (-\infty; +\infty) = \mathbf{R}$, переріз $A \cap B = [-3; -1) \cup (2; 4]$.

5. $A_i = (-i; i)$, $i \in \mathbf{N}$. Об'єднання цих множин $\bigcup_{i=1}^{5} A_i = (-5; 5)$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbf{R}$, переріз $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (-1; 1)$.

1.4. *Функцією* називається відповідність, при якій кожному елементу x із множини D відповідає деякий певний елемент y із множини E. Незалежна змінна x називається *аргументом*, а величина y — *функцією*.

При цьому множину D називають *областю визначення функції* і позначають так: $D(f)$. Запис $f(x_0) = y_0$ означає, що елементу $x_0 \in D$ відповідає елемент $y_0 \in E$. Множина, що складається з усіх елементів $f(x)$, де $x \in D$, називається *областю значень функції* і позначається так: $E(f)$. Якщо $D(f)$ та $E(f)$ — числові множини, то функція називається *числовою*. Далі розглядатимемо лише числові функції. Числовою функцією з областю визначення D називається відповідність, при якій кожному числу $x \in D$ відповідає деяке цілком означене число y.

Отже, з одного боку, слово *функція* означає відповідність, при якій кожному x відповідає певне y, а з другого — функцією називають число $y(f(x))$. Точніше називати y *значенням функції* f у точці x.

Приклади

1. $y = 3x - 2$. $x \in [-1; 3]$. Область визначення $D(f) = [-1; 3]$. Область значень $E(f) = [-5; 7]$.

2. $f(x) = 3x - 2$. Оскільки область зміни x не вказано, природно областю визначення функції вважати множину всіх значень змінної x, при яких ця відповідність має зміст. Отже, у даному випадку $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Легко бачити, що $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Знайдемо значення функції при кількох значеннях аргумента: $f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. $f(0) = -2$, $f(-1) = -5$. $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{3}{a} - 2$.

3. $y = \frac{5}{x+2}$. Тут $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. Для знаходження області значень $E(f)$ виразимо x через y: $x = 5/y - 2$. Звідси видно, що $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Знайдемо значення функції при деяких значеннях x: $y(0) = 5/2 = 2{,}5$. $y(2) = 5/4$. $y(a - 2) = 5/a$.

1.5. Проведемо дві взаємно перпендикулярні прямі (рис. 4.3). Кожну з них розглядатимемо як числову вісь. Спільна точка O прямих є *початком відліку* на кожній із них. Найчастіше одиничні відрізки на цих осях беруть рівними, але вони можуть бути й різними. Ці прямі утворюють систему координат і називаються *координатними осями*. Горизонтальна вісь Ox називається *віссю абсцис*, а вертикальна Oy — *віссю ординат*. Кожна пара дійсних чисел відповідає деякій точці координатної

площини. І навпаки — кожна точка координатної площини має свою пару координат. Осі координат розбивають координатну площину на чотири *квадранти* (самі осі не належать квадрантам).

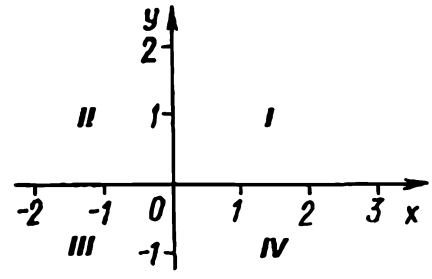


Рис. 4.3

Усі точки з координатами $(x; y)$ розміщені в першому квадранті, якщо $x > 0$, $y > 0$, у другому, якщо $x < 0$, $y > 0$, у третьому, якщо $x < 0$, $y < 0$, у четвертому, якщо $x > 0$, $y < 0$.

Графіком функції $y = f(x)$ у вибраній системі координат називається множина всіх тих і лише тих точок $A(x; y)$, для яких виконується рівність $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Щоб побудувати графік функції, треба знати її властивості, а значить, дослідити функцію за певною схемою (про це йтиметься в темі 13). Нескладні графіки будують за точками (рис. 4.4). Наприклад, відомо, що графіком лінійної функції $y = 2x - 1$ є пряма (рис. 4.4). Оскільки пряма цілком визначається двома своїми точками, складаємо табличку:

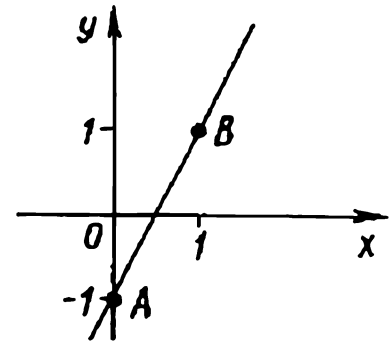


Рис. 4.4

x	0	1
y	–1	1

Із цієї таблички видно, що точки $A(0; -1)$ та $B(1; 1)$ лежать на прямій. Отже, пряма AB — шуканий графік. Зазначимо, що побудувати графік функції по точках без дослідження властивостей функції, якщо бути точними, не можна.

Ортогональна проекція графіка функції на вісь Ox дає уявлення про область визначення, а на вісь Oy — про область значень цієї функції. Точка перетину графіка функції $f(x)$ із віссю Ox має координати $(x; 0)$, а з віссю Oy — $(0; f(0))$.

1.6. Для того щоб задати функцію f, треба:

1) встановити область $D(f)$ визначення функції;

2) задати закон відповідності, за яким для кожного $x \in D(f)$ знаходитимемо число y.

Основні способи задання цього закону: аналітичний, графічний, табличний і словесний.

Аналітичний спосіб — задання функції формулою, з якої видно, які операції треба виконати над значенням аргументу x, щоб знайти відповідне значення y.

Наприклад, функції

$$y = 3x - 1,\ y = 1 - x^2,\ y = \sqrt{x+2},\ y = \frac{2x-1}{x+5}$$

задані аналітичним способом.

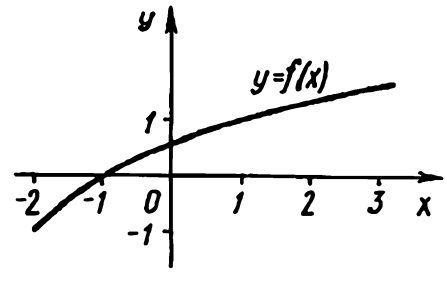


Рис. 4.5

Графічний спосіб задання функції полягає в тому, що дається графік функції. Наприклад, на рис. 4.5 зображено графік деякої функції $y = f(x)$, з якого видно, що $D(f) = [-2; 3]$, $E(f) = [-1; 3/2]$. Важливим є вміння «читати» графік, тобто встановлювати властивість

функції за її графіком. Наприклад, із рис. 4.5 видно, що дана функція має єдиний корінь: $x = -1$; зростає на всій області визначення; $f(x) < 0$ при $x \in [-2; -1)$; $f(x) > 0$ при $x \in (-1;3]$.

Графічно функцію задають тоді, коли аналітичний спосіб застосувати важко (або неможливо). На практиці часто використовують прилади (електрокардіограф, барограф та ін.).

Табличний спосіб задання функції полягає в тому, що складають таблицю із двох рядків. У верхньому рядку записують значення аргументу, в нижньому — відповідне значення функції:

x	0	1	2	3	-2	1
y	1	-2	3	-1	4	0

У цій таблиці задана функція f, для якої $D(f) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $E(f) = \{-2; -1; 0; 1; 3; 4\}$. Якщо множина $D(f)$ нескінченна, то функцію f табличним способом задати неможливо. У цьому випадку беруть багато значень аргументу і використовують деякі властивості функцій (наприклад, у разі користування таблицями логарифмів).

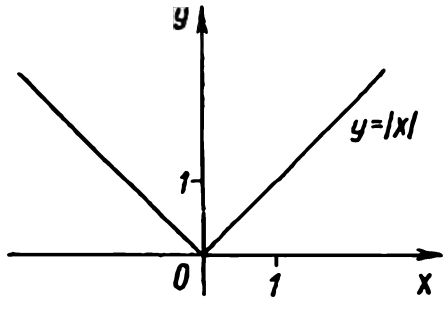


Рис. 4.6

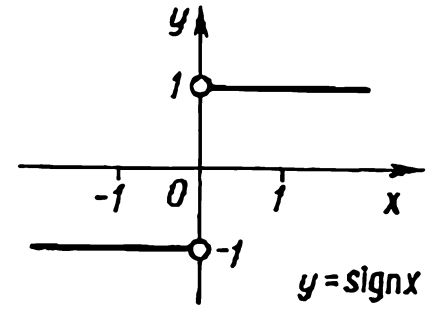


Рис. 4.7

Словесний спосіб задання функції полягає в тому, що закон відповідності задається словами. Відому функцію $f(x) = |x|$ задають словесним способом:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0, \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

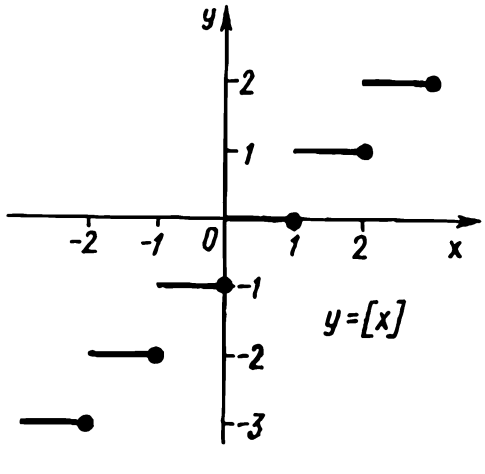


Рис. 4.8

Наведемо ще приклади таких функцій. Функцію $f(x) = \operatorname{sign} x$ (читається «сигнум x») задають словесним способом:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Функцію $f(x) = [x]$ (ціла частина x) задають словесним способом: ціла частина дійсного числа x — це найбільше ціле число, що не перевищує x. Наприклад: $[2, 3] = 2$; $[-1,8] = -2$. На рис. 4.6–4.8 показано графіки цих функцій.

Вправи

1. Знайти $A \cup B$ та $A \cap B$, якщо:

а) $A = \{-3; -2; 0; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$; б) $A = [0;2]$, $B = [3; 4]$; в) $A = \{2; 3; 4\}$. $B = \{5: 6; 7\}$: г) $A = [-3; 3)$, $B = (-1; 0) \cup (0; 1)$.

2. Задати множини за допомогою всіх їх елементів:

а) $M = \{x \mid x^3 + 1 = 0\}$; б) $A = \{x \mid x^4 - 5x^2 + 6 = 0\}$; в) $B = \{x \mid x^2 + 2 = 0\}$.

3. Задати множини за допомогою числових проміжків:

а) $A = \{x \mid 3x - 1 > 0\}$; б) $B = \{x \mid 1 - x - x^2 \geq 0\}$; в) $C = \{x \mid |x - 4| < 2\}$; г) $D = \left\{x \middle| \frac{1-5x}{x+2} < 0\right\}$.

4. Відомо, що $A \subset B$. Довести, що $A \cup B = B$ та $A \cap B = A$.

5. $A_i = [0; 1/i]$, де $i \in \mathbb{N}$. Знайти: а) $\bigcup_{i=1}^{5} A_i$ та $\bigcap_{i=1}^{5} A_i$; б) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ та $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$;

6. Довести твердження: якщо $A \cap B = A$, то $A \subset B$.

7. Дано функцію $y = 4 - 3x$. Побудувати графік цієї функції. Знайти: а) множини $D(f)$ та $E(f)$; б) $f(0), f(-2)$. $f\left(\frac{1}{a}\right)$.

8. Дано функцію $y = \frac{4}{2x-1}$. Знайти: а) множини $D(f)$ та $E(f)$; б) $f(-1), f(0), f(2), f(1/a)$.

9. Знайти області визначення функцій:

а) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x+4}$; в) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2}$; г) $f(x) = 3\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}\right)^{-1}$; д) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$; е) $f(x) = \sqrt{x^2+x-12}$; є) $f(x) = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)x^{-1}$; ж) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{1-x}$.

10. Чи може бути крива, зображена на рис. 4.9, графіком деякої функції?

11. Назвати корені та знаки функції, графік якої дано на рис. 4.10. Знайти для цієї функції $D(f)$ та $E(f)$.

12. Побудувати графіки функцій:

а) $y = |1 - 3x|$; б) $y = |1 - x^2|$; в) $y = |\operatorname{sign} x|$; г) $y = \operatorname{sign} |x|$; д) $y = [\operatorname{sign} x]$; е) $y = \operatorname{sign} [x]$.

13. Довести тотожності: а) $x = |x| \operatorname{sign} x$; б) $|\operatorname{sign} x| = \operatorname{sign} |x|$.

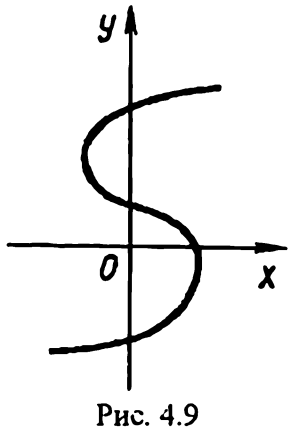


Рис. 4.9

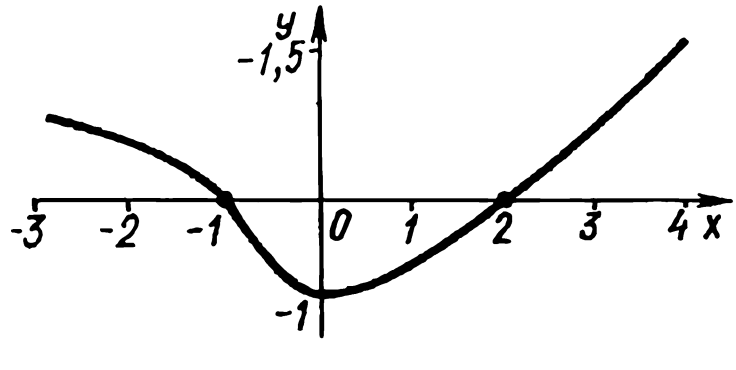


Рис. 4.10

§ 2. Загальні властивості функцій

2.1. Якщо область визначення функції $f(x)$ симетрична відносно початку координат і виконується рівність $f(-x) = f(x)$, то така функція називається *парною*. Приклади парних функцій: а) $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $y = |x|$, в) $y = \cos x$.

Якщо область визначення функції $f(x)$ симетрична відносно початку координат і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, то така функція називається *непарною*. Приклади непарних функцій: а) $y = x^{2n-1}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $y = \sin x$; в) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Впевнимось, наприклад, що функція $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ непарна. Область визначення функції $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симетрична відносно початку координат. Крім того,

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x).$$

Отже, згідно з означенням дана функція непарна.

Тепер розглянемо функцію $y = \dfrac{1}{x-1}$. Область визначення функції $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ несиметрична відносно початку координат. Отже, дана функція ні парна, ні непарна.

Нехай $f(x) = x^2 + x$. Область визначення функції $D(f) = \mathbf{R}$ симетрична відносно початку координат. Крім того, $f(-x) = (-x)^2 + (-x)$. Як видно, жодна з рівностей $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$ не виконується. Отже, дана функція не належить ні до парних, ні до непарних. Такі функції називатимемо *несиметричними*.

Нехай точки $A(x; f(x))$ і $A_1(-x; f(-x))$ лежать на графіку парної функції. Оскільки функція парна, то $f(-x) = f(x)$ і $A_1(-x; f(x))$. Це означає, що точки A та A_1 симетричні відносно осі ординат. Отже, графік парної функції — це лінія, симетрична відносно осі ординат. Аналогічно встановимо, що графік непарної функції — це лінія, симетрична відносно початку координат.

2.2. Функція $f(x)$ зростає на множині $\mathbf{M}$, якщо для будь-яких чисел x_1, x_2 із цієї множини таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $f(x)$ спадає на множині $\mathbf{M}$, якщо для будь-яких чисел x_1, x_2 із цієї множини таких, що $x_1 < x_2$, справджується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція, що зростає або спадає на деякій множині, називається *монотонною* на цій множині.

Приклади

1. Дослідити на монотонність функцію $f(x) = 4x + 1$.

* $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Нехай $x_1 < x_2$, тоді $f(x_2) - f(x_1) = 4(x_2 - x_1) > 0$. Отже, $f(x_2) > f(x_1)$. Відповідь: функція зростає на всій області визначення. *

2. Дослідити на монотонність функцію $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$, $x \in (2; +\infty)$.

* Нехай $2 < x_1 < x_2$. Маємо

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+3}{x_2-2} - \frac{x_1+3}{x_1-2} = \frac{5(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)} < 0.$$

Отже, $f(x_2) < f(x_1)$. Відповідь: функція спадає. *

Складніші функції досліджують за допомогою похідної (див. тему 13).

2.3. Функція $f(x)$ називається *обмеженою зверху* на деякій множині **P**, якщо існує число M таке, що $f(x) \le M$ для будь-якого $x \in \mathbf{P}$.

Функція $f(x)$ називається *обмеженою знизу* на множині **P**, якщо існує число m таке, що $f(x) \ge m$ для будь-якого $x \in \mathbf{P}$.

Функція $f(x)$ називається *обмеженою на множині* **P**, якщо існують числа m і M такі, що $m \le f(x) \le M$ для будь-якого $x \in \mathbf{P}$.

Наприклад: а) функція $y = \sin x$ обмежена на всій числовій осі, бо $-1 \le \sin x \le 1$; при будь-якому $x \in \mathbf{R}$; б) функція $y = -x^2$ обмежена зверху на всій числовій осі, бо $-x^2 \le 0$ при $x \in \mathbf{R}$; в) функція $y = 1/x$ обмежена знизу на множині $\mathbf{P} = (0; +\infty)$, бо $1/x \ge 0$ при $x \in \mathbf{P}$.

Якщо функція обмежена на деякій множині, то її графік лежить між горизонтальними прямими $y = m$ та $y = M$ (рис. 4.11).

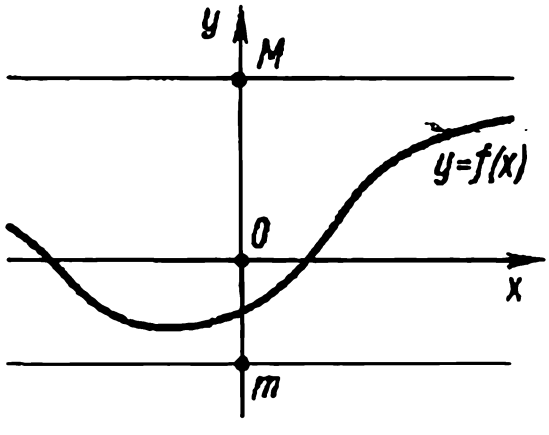


Рис. 4.11

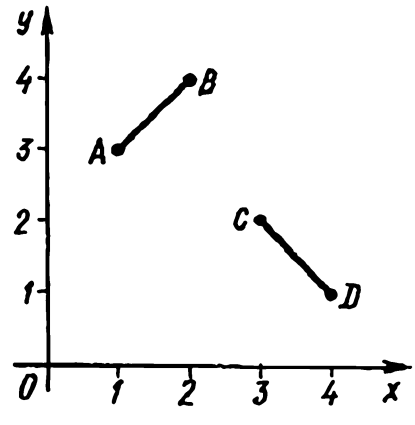


Рис. 4.12

2.4. Нехай функція $f(x)$ має таку властивість: якщо $x_1, x_2 \in D(f)$ і $x_1 \ne x_2$, то $f(x_1) \ne f(x_2)$. Прикладом такої функції може бути будь-яка монотонна функція. Тоді існує функція $\varphi(y)$, яка кожному $y \in E(f)$ ставить у відповідність таке x, що $f(x) = y$. Ця функція називається оберненою до функції f. Зрозуміло, що $D(\varphi) = E(f)$ і $E(\varphi) = D(f)$. На рис. 4.12 показано графік функції f, що складається з двох відрізків: AB та CD, причому $A(1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(3; 2)$, $D(4; 1)$. Область визначення $D(f) = [1; 2] \cup [3; 4]$, область значень $E(f) = [1; 2] \cup [3; 4]$; кожному $y_0 \in E(f)$ відповідає цілком певне значення $x_0 \in D(f)$. Зверніть увагу на те, що ця функція не є монотонною. Для того щоб дана функція мала обернену, необхідно і достатньо, щоб будь-яка горизонтальна пряма перетинала її графік не більше як в одній точці.

Інколи можна дістати обернену функцію, задану аналітично.

Якщо точка $T(a; b)$ належить графіку функції f, то точка $P(b; a)$ належить графіку оберненої функції. Розглянемо рис. 4.13. Нехай $TA \perp Oy$, $PB \perp Ox$. Прямокутні трикутники OAT і OBP рівні за двома катетами, ($TA = PB = a$, $OA = OB = b$). Отже, $OT = OP$, тобто трикутник OTP рівнобедрений. Його бісектриса лежить на прямій $y = x$. Оскільки бісектриса рівнобедреного трикутника є одночасно його висотою і медіаною, точки T і P симетричні відносно прямої $y = x$. Це, у свою чергу, означає, що графіки даної та оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

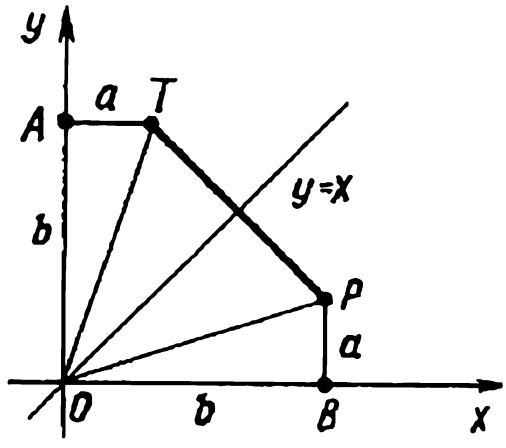


Рис. 4.13

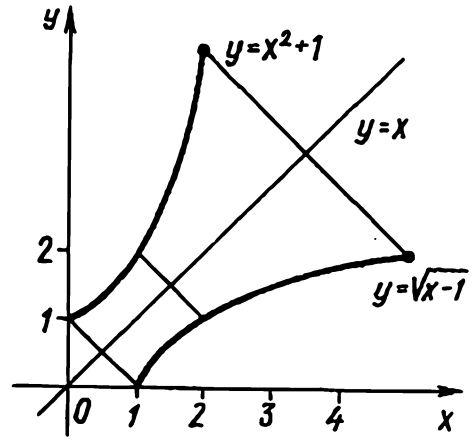


Рис. 4.14

Отже, якщо графік функції симетричний відносно прямої $y = x$, то вона обернена сама до себе. Такою, наприклад, є функція $y = 1/x$.

На рис. 4.14 показано графіки двох взаємно обернених функцій $y = \sqrt{x-1}$ та $y = x^2 + 1$, $x \in [0; +\infty)$.

Приклади

1. Знайти функцію, обернену до функції $y = 4x - 1$.

* Виразимо x через y: $x = \frac{y+1}{4}$. Замінивши тепер x на y та y на x, маємо $y = \frac{x+1}{4}$. Функції $y = 4x - 1$ та $y = \frac{x+1}{4}$ взаємно обернені. *

2. Знайти функцію, обернену до функції $y = \frac{x+3}{x-1}$.

* Виразимо x через y: $x = \frac{y+3}{y-1}$. Замінивши x на y та y на x, маємо $y = \frac{x+3}{x-1}$. Отже, функція $y = \frac{x+3}{x-1}$ є оберненою до себе. *

2.5. Нехай задано числові функції f та g такі, що $E(g) \subset D(f)$. Розглянемо функцію φ, яка будь-якому $x_0 \in D(g)$ ставить у відповідність число $f(g(x_0))$. Ця функція називається *складеною* і позначається так: $\varphi(x) = f(g(x))$, де g називається *внутрішньою*, а f — *зовнішньою* функцією.

Приклади

1. Утворити складені функції $f(g(x))$ та $g(f(x))$, якщо $g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

* Маємо $f(g(x)) = \frac{1}{(1/x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}$, $g(f(x)) = 1 : \frac{1}{x^2+1} = x^2 + 1$. Отже, $f(g(x)) \neq g(f(x))$. *

2. Утворити складену функцію $f(g(x))$, якщо, $g(x) = \sqrt{x+1}$, $f(x) = x^2 - 1$.

* Маємо $\varphi(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x$. Отже, $f(g(x)) = x$, $x \in [-1; +\infty)$, бо $D(g) = [-1; +\infty)$.

Зауважимо. що $f(g(x)) = x$, $x \in D(g)$, коли f і g — взаємно обернені функції. *

3. Дано складену функцію $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Визначити внутрішню та зовнішню функції.

* Внутрішня функція $g(x) = x^2 - x + 1$, зовнішня функція $f(x) = \sqrt{x}$. *

2.6. Покажемо, як будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень.

1. Якщо графік функції $y = f(x)$ паралельно перенести на відстань a по осі Oy, то дістанемо графік функції $y = a + f(x)$ (рис. 4.15). Дійсно, кожна точка $A(x; y)$ графіка функції $f(x)$ внаслідок такого перенесення переходить у точку $A'(x; a + y)$.

2. Якщо графік функції $y = f(x)$ паралельно перенести на відстань a по осі Ox, то дістанемо графік функції $y = f(x - a)$ (рис. 4.16). Дійсно, кожна точка $A(x; y)$ графіка функції $f(x)$ внаслідок такого перенесення переходить у точку $A'(x + a; y)$, що належить графіку функції $y = f(x - a)$.

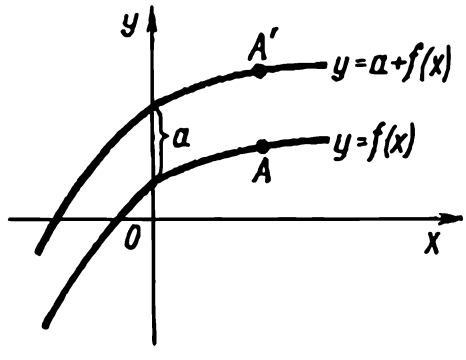


Рис. 4.15

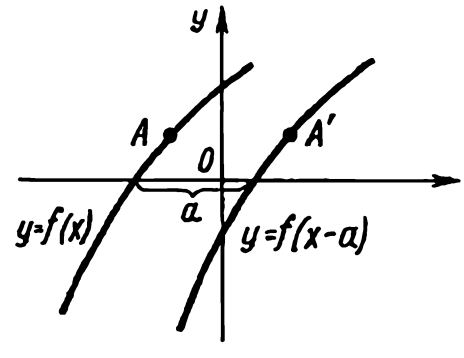


Рис. 4.16

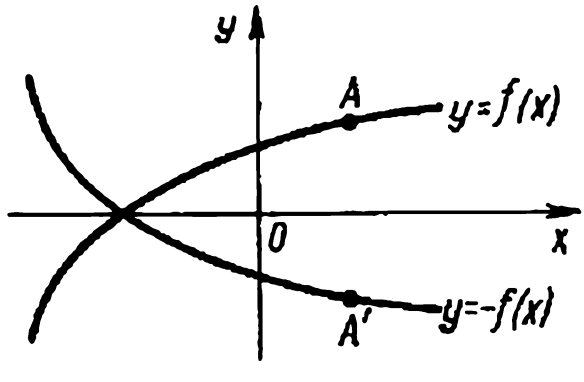


Рис. 4.17

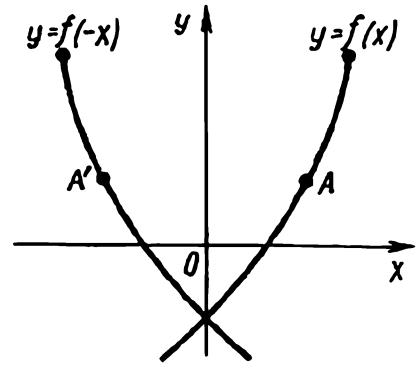


Рис. 4.18

3. Якщо графік функції $y = f(x)$ зобразити симетрично осі Ox, то дістанемо графік функції $y = -f(x)$ (рис. 4.17). Кожна точка $A(x; y)$ графіка функції $f(x)$ має симетричну точку $A'(x; -y)$, що належить графіку функції $y = -f(x)$.

4. Якщо графік функції $y = f(x)$ зобразити симетрично осі Oy, то дістанемо графік функції $y = f(-x)$ (рис. 4.18). Кожна точка $A(x; y)$ графіка функції $y = f(x)$ має симетричну точку $A'(-x; y)$, що належить графіку функції $y = f(-x)$.

5. Ординати точок графіка функції $y = kf(x)$ ($k > 0$) в k разів більше ординат відповідних точок графіка $y = f(x)$. Отже, щоб побудувати графік функції $y = kf(x)$, треба

ординату кожної точки графіка $y = f(x)$ збільшити в k разів (якщо $k > 1$) або зменшити в $1/k$ разів (якщо $0 < k < 1$). Якщо $k < 0$, то спочатку будують графік функції $y = -f(x)$ (перетворення 3), а потім ординату кожної точки збільшують (або зменшують) в $|k|$ разів. На рис. 4.19 показано суцільною лінією графік функції $y = 2f(x)$, штриховою — функції $y = f(x)$.

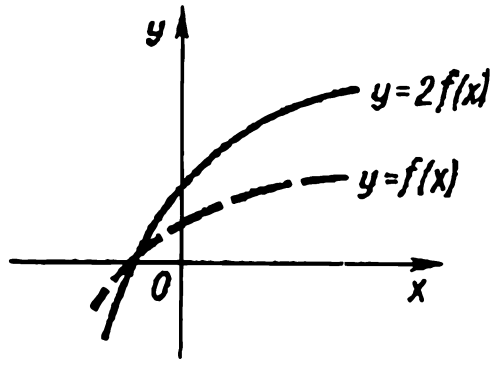


Рис. 4.19

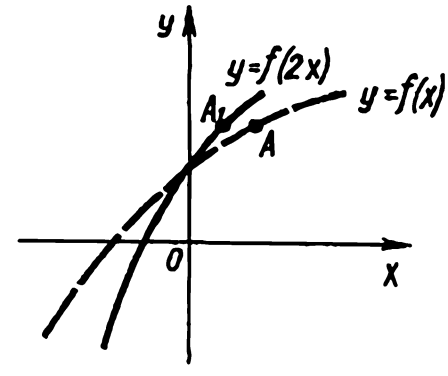


Рис. 4.20

6. Якщо точка $A(x; y)$ графіка функції $y = f(x)$ переходить у точку $A_1(kx; y)$ $(k > 0)$, то вона попадає на графік функції $y = f(x/k)$. Отже, збільшивши абсцису кожної точки графіка функції $y = f(x)$ в k разів $(k > 1)$, дістанемо графік функції $y = f(x/k)$. Якщо ж узяти $0 < k < 1$, то абсциси точок зменшуються в k разів. На рис. 4.20 показано суцільною лінією графік функції $y = f(2x)$ і штриховою — функції $y = f(x)$.

7. Щоб побудувати графік функції

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0, \end{cases}$$

треба лишити без зміни ті частини графіка, де $f(x) \geq 0$, а ті частини графіка, де $f(x) < 0$, зобразити симетрично осі Ox (рис. 4.21).

8. Функція $y = f(|x|)$ парна, тобто $f(|x|) = f(x)$ при $x \geq 0$, а тому графіком функції $y = f(|x|)$ є частина графіка функції $y = f(x)$, що знаходиться праворуч від осі Oy, а також лінія, симетрична до цієї частини відносно осі Oy (рис. 4.22).

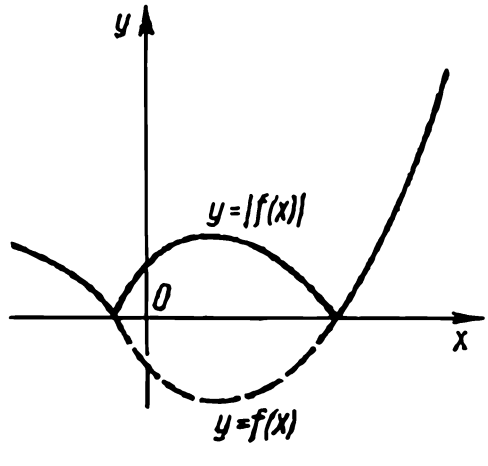


Рис. 4.21

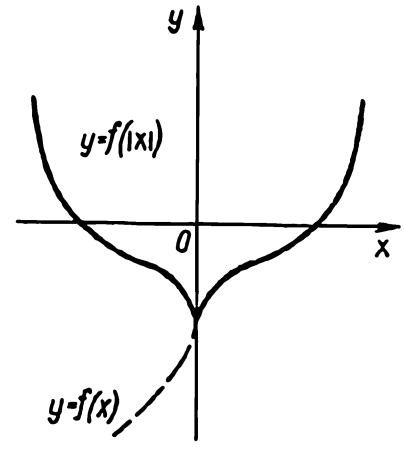


Рис. 4.22

Приклад

Побудувати графік функції $y = \left|\sqrt{x+2} - 3\right|$.

* Щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{x+2}$, перенесемо графік функції $y = \sqrt{x}$ на дві одиниці вліво вздовж осі Ox. Далі перенесемо графік функції $y = \sqrt{x+2}$ на три одиниці вниз вздовж осі Oy, щоб дістати графік функції $y = \sqrt{x+2} - 3$. Нарешті відобразимо симетрично відносно осі Ox ту частину графіка, що лежить під віссю Ox (рис. 4.23). *

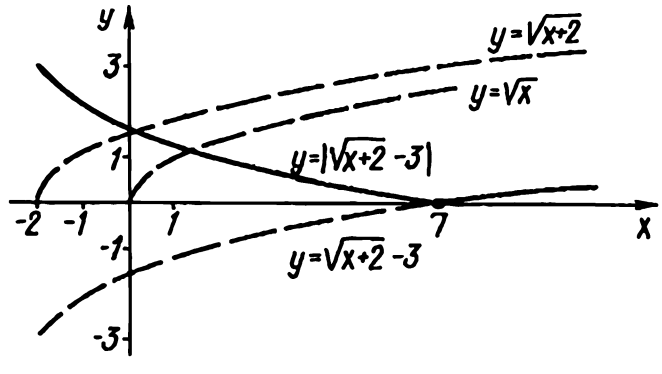


Рис. 4.23

Вправи

1. Дослідити на парність функції: а) $y = x|x|$; б) $y = x + |x|$; в) $y = \frac{x}{|x|}$; г) $y = x \sin x$; д) $y = x \cos x$; е) $y = \frac{x+1}{x-1}$; є) $y = 1 - x^2$; ж) $y = 1 - x - x^2$.

2. Функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ парні, причому $D(f_1) = D(f_2)$. Довести, що функції $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ також парні.

3. Функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ непарні, причому $D(f_1) = D(f_2)$. Довести, що функції $f_1(x) \cdot f_2(x)$ та $f_1(x) : f_2(x)$ парні, а функції $f_1(x) + f_2(x)$ та $f_1(x) - f_2(x)$ непарні.

4. Функція $f_1(x)$ парна, а $f_2(x)$ непарна, причому $D(f_1) = D(f_2)$. Довести, що функції $f_1(x) \cdot f_2(x)$ та $f_1(x) : f_2(x)$ непарні.

5. Графік функції $f(x)$ симетричний відносно прямої $x = a$. Довести, що $f(x) = f(2a - x)$.

6. Графік функції $f(x)$ симетричний відносно точки $A(a; b)$. Довести, що $f(x) + f(2a - x) = 2b$.

7. Записати функцію, обернену до даної: а) $y = 5 - 3x$; б) $y = x^2 - 2$; $x \in [0; +\infty)$; в) $y = \frac{2x+5}{2x-3}$; г) $y = \sqrt{x} - 1$; д) $y = \sqrt{2x+3}$.

8. Записати складену функцію $y = f(g(x))$, якщо: а) $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{1}{3x}$; б) $g(x) = \sqrt{x} + 1$, $f(x) = \sqrt{x+3}$; в) $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^3$.

9. Дано $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = \sqrt{x+1}$. Розв'язати рівняння $g(f(x)) = 2$.

§ 3. Постійна та лінійна функції

3.1. *Постійною* називається функція виду $y = c$, де c — деяке дійсне число. Область визначення $D(y) = \mathbf{R}$. Функція парна, бо $y(-x) = y(x) = c$. Область значень $E(y) = \{c\}$. Область значень складається з одного числа c.

Графіком функції є горизонтальна пряма, що проходить через точку $(0; c)$. Якщо $c = 0$, $y = 0$, графіком функції є вісь Ox. На рис. 4.24 показано графіки функцій $y = 1$ та $y = -2$.

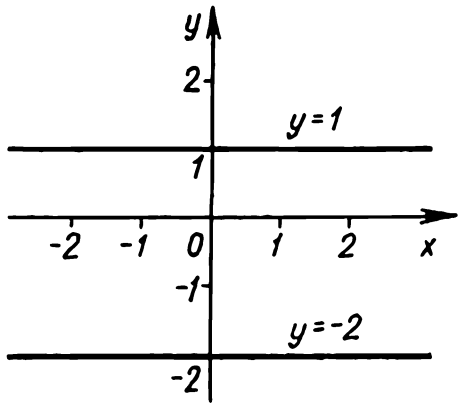


Рис. 4.24

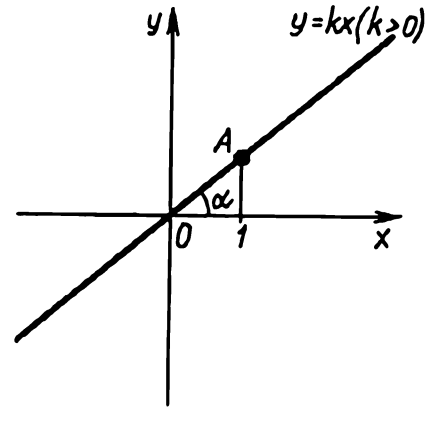


Рис. 4.25

3.2. Функція $y = kx$ називається *прямою пропорційністю*. На рис. 4.25 показаний графік цієї функції, якщо $k > 0$. Область визначення $D(y) = \mathbf{R}$; функція непарна; $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$; функція зростає на всій області визначення. Виберемо на графіку функції $y = kx$ точку $A(1; k)$. Графік утворює із додатним напрямком осі Ox кут α. Із трикутника $OA1$ маємо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A1}{O1} = \frac{k}{1} = k.$$

Величина k називається *кутовим коефіцієнтом* прямої, що відповідає рівнянню $y = kx$.

Геометричний зміст кутового коефіцієнта k — це тангенс кута нахилу прямої з рівнянням $y = kx$ до додатного напрямку осі Ox.

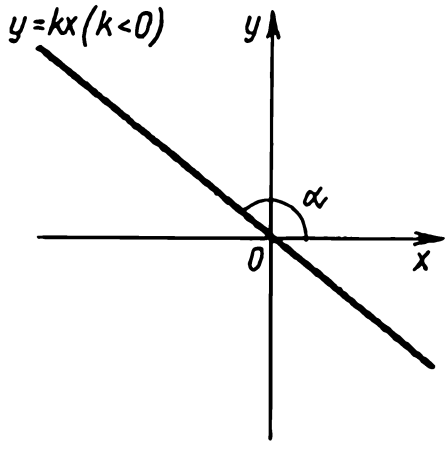


Рис. 4.26

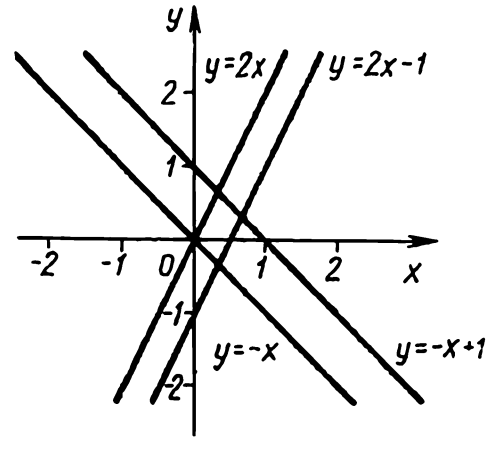


Рис. 4.27

На рис. 4.26 показаний графік функції $y = kx$ при $k < 0$. Область визначення $D(y) = \mathbf{R}$; функція непарна; $y = 0$ при $x = 0$, $y < 0$ при $x > 0$, $y > 0$ при $x < 0$; функція спадає на всій області визначення.

Функція $y = kx + b$ називається *лінійною*. Графік цієї функції одержується із графіка функції $y = kx$ шляхом паралельного зсуву на вектор $\vec{e}(0; b)$. На рис. 4.27 показано графіки функцій $y = 2x$ і $y = 2x - 1$ та $y = -x$ і $y = -x + 1$.

Виникає питання, чи описують постійні та лінійні функції будь-яку пряму на координатній площині? Виявляється, що ні. Вертикальна пряма не є графіком жодної функції. Якщо вертикальна пряма проходить через точку $A(c; 0)$ осі Ox, то за означенням вона має рівняння $x = c$. На рис. 4.28 показано прямі $x = -2$ та $x = 4$.

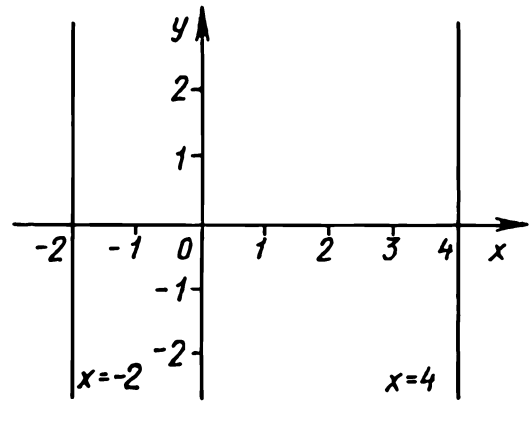


Рис. 4.28

Приклади

1. Чи лежить точка $A(-2; 4)$ на прямій $y = -2x + 2$?

* $y(-2) = 6$. Отже, точка A не лежить на прямій. Відповідь: не лежить. *

2. Знайти рівняння прямої AB, якщо $A(1; 1)$, $B(4; 2)$.

* Нехай рівняння прямої AB $y = kx + b$. Тоді $y(1) = 1 = k + b$, $y(4) = 2 = 4k + b$. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} k + b = 1, \\ 4k + b = 2 \end{cases}$$

знаходимо, що $k = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. Відповідь: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. *

3. Чи лежать точки $A(-3; -1)$, $B(1; 1)$ і $C(3; 4)$ на одній прямій?

* Нехай пряма AB має рівняння $y = kx + b$. Тоді $y(-3) = -1 = -3k + b$, $y(1) = 1 = k + b$. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} -3k + b = -1, \\ k + b = 1 \end{cases}$$

знаходимо, що $k = b = \frac{1}{2}$. Отже, пряма AB має рівняння $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Оскільки $y(3) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \neq 4$, то точка C не лежить на прямій AB. Відповідь: не лежать. *

4. Точки $A(-3; -2)$, $B(-1; 3)$, $C(1; 4)$ і $D(3; -1)$ є вершинами чотирикутника $ABCD$. Знайти координати точки перетину діагоналей цього чотирикутника.

* Нехай $y = k_1x + b_1$ — рівняння прямої AC. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -3k_1 + b_1 = -2, \\ k_1 + b_1 = 4, \end{cases}$$

звідки $k_1 = \frac{3}{2}$, $b_1 = \frac{5}{2}$. Отже, пряма AC має рівняння $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

Нехай $y = k_2x + b_2$ — рівняння прямої BD. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -k_2 + b_2 = 3, \\ 3k_2 + b_2 = -1, \end{cases}$$

звідки $k_2 = -1$, $b_2 = 2$. Отже, пряма BD має рівняння $y = -x + 2$.

Для знаходження координат точки перетину діагоналей чотирикутника розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}, \\ y = -x + 2, \end{cases}$$

звідки $x = -\frac{1}{5}$, $y = 2\frac{1}{5}$. Відповідь: $x = -\frac{1}{5}$, $y = 2\frac{1}{5}$. *

3.3. Побудуємо графік функції $y = |x + 1| + |x - 3| + x - 2$.

Розкриваючи значення модулів на різних проміжках, одержимо

$$y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < -1, \\ x + 2, & \text{якщо } -1 \le x < 3, \\ 3x - 4, & \text{якщо } 3 \le x. \end{cases}$$

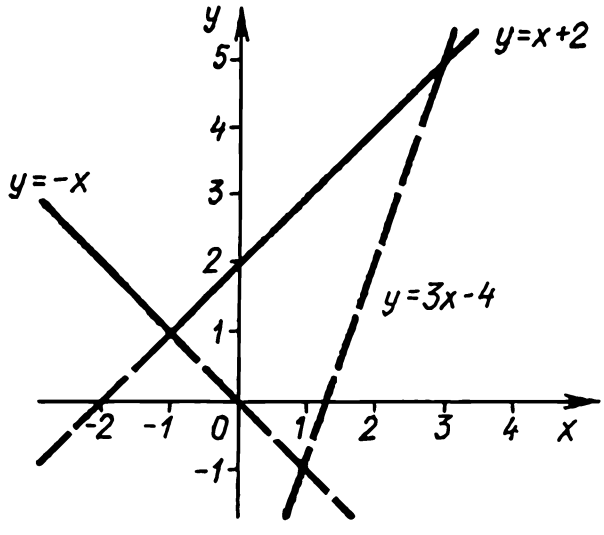


Рис. 4.29

На рис. 4.29 показаний графік даної функції. Цей графік складається з двох променів і відрізка. Тому функція називається *кусково-лінійною*.

Покажемо простий спосіб побудови графіка кусково-лінійної функції.

Приклад

1. Побудувати графік функції $y = |x + 3| + |x - 1| + x - 1$.

* Назвемо точки, в яких модулі дорівнюють нулю, кутовими. У даному випадку є дві кутові точки: $x = -3$ та $x = 1$. Графіком функції є ламана, вершини якої мають абсциси $x = -3$ та $x = 1$ та ординати $y(-3) = 0$, $y(1) = 4$. Отже, ламана-графік має дві вершини: $A(-3; 0)$ та $B(1; 4)$. Далі знаходимо значення функції в точках -4 та 2, що не лежать на проміжку $[-3; 1]$: $y(-4) = 1$, $y(2) = 7$. Отже, точки $C(-4; 1)$ і $D(2; 7)$ лежать на шуканому графіку. На рис. 4.30 показаний графік даної функції. *

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — абсциси кутових точок кусково-лінійної функції, причому $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Тоді для побудови графіка цієї функції треба знайти $k + 2$ точки: $A_1(x_1; f(x_1))$, $A_2(x_2; f(x_2))$, ..., $A_k(x_k; f(x_k))$ та $A_0(x_0; f(x_0))$ і $A_{k+1}(x_{k+1}; f(x_{k+1}))$, де $x_0 < x_1$, а $x_{k+1} > x_k$. У вищенаведеному прикладі функція має дві кутові точки, тому було знайдено чотири точки: A, B, C, D (рис. 4.30).

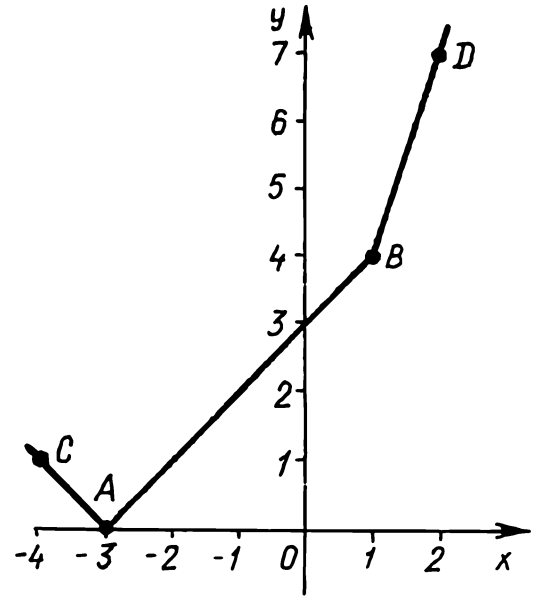


Рис. 4.30

Приклад

2. Побудувати графік функції $y = |x + 2| + |x| - |x - 1|$.

* Кутові точки функції $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; $y(-2) = -1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 4$. Отже, вершини ламаної, що є графіком функції, знаходяться в точках $A(-2; -1)$, $B(0; 1)$, $C(1; 4)$. Далі знаходимо $y(-3) = 0$, $y(2) = 5$. Отже, точки $D(-3; 0)$ та $E(2; 5)$ лежать на графіку. За допомогою точок A, B, C, D, E будуємо графік (рис. 4.31). *

Розглянемо побудову графіка функції $y = |f(x)| + kx + b$, де $f(x)$ — кусково-лінійна функція. Кутові точки функції $f(x)$ є також кутовими точками функції y. Крім того, корені функції $f(x)$ є кутовими точками функції y. Отже, враховуючи, що y — також кусково-лінійна функція і її кутові точки легко знайти, графік цієї функції можна побудувати так само, як і графік функції $f(x)$.

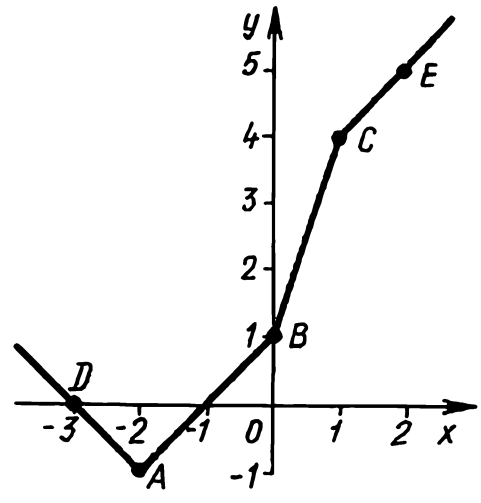


Рис. 4.31

Приклад

3. Побудувати графік функції $y = |1 - |1 - x| + |x + 2|| - x + 1$..

* Спочатку побудуємо графік функції $f(x) = 1 - |1 - x| + |x + 2|$. Вона має дві кутові точки: $x = -2$ та $x = 1$. Послідовно знаходимо $f(-2) = -2$, $f(1) = 4$, $f(-3) = -2$, $f(2) = 4$. За допомогою точок $A(-2; -2)$, $B(1; 4)$, $C(-3; -2)$ та $D(2; 4)$ будуємо графік функції $f(x) = 1 - |1 - x| + |x + 2|$ (рис. 4.32). З графіка видно, що функція $f(x)$ має єдиний корінь, що лежить на проміжку $(-2; 1)$. При $x \in (-2; 1)$ $f(x) = 2x + 2$. Отже, $2x + 2 = 0$. Звідси $x = -1$ — єдиний корінь функції $f(x)$. Таким чином, функція y має три кутові точки: $x = -2$, $x = -1$ та $x = 1$. Послідовно маємо $y(-2) = |1 - 3 + 0| + 2 + 1 = 5$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 4$; $y(-3) = 6$; $y(2) = 3$. За точками $A(-2; 5)$, $B(-1; 2)$, $C(1; 4)$, $D(-3; 6)$ та $E(2; 3)$ будуємо графік функції $y = |1 - |1 - x| + |x + 2|| - x + 1$ (рис. 4.33). *

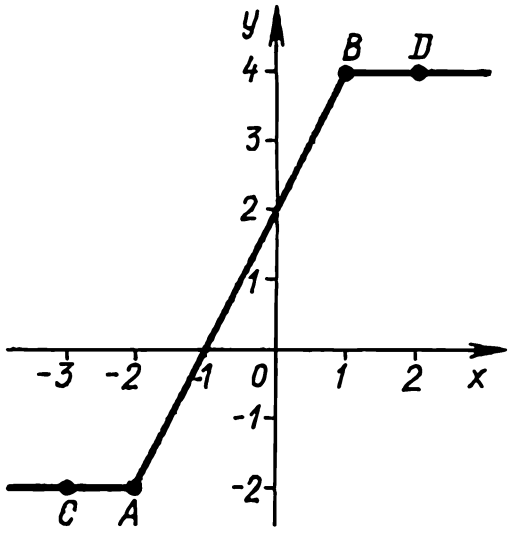


Рис. 4.32

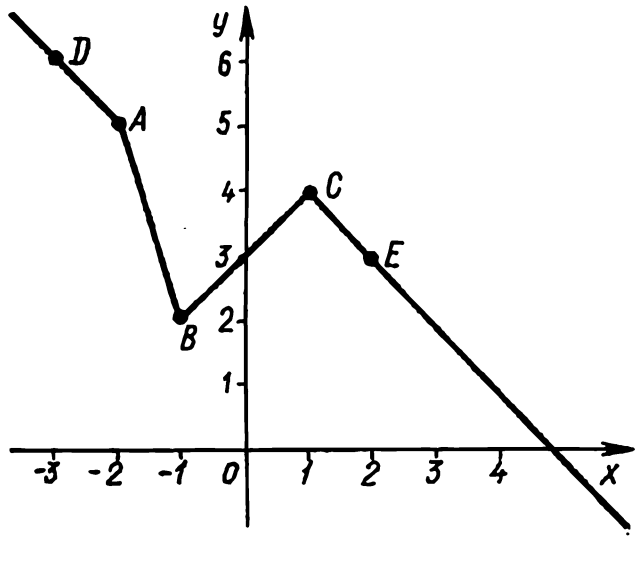


Рис. 4.33

Вправи

1. Чи проходить пряма $y = 2x + 1$ через початок координат?
2. Знайти рівняння прямої AB, якщо: а) $A(1; 2)$, $B(3; 0)$; б) $A(-2; 3)$, $B(1; 3)$; в) $A(1; 1)$, $B(1; 5)$.
3. Чи лежать точки $A(-3; -2)$, $B(0; 1)$ і $C(4; 2)$ на одній прямій?
4. В яких точках перетинає координатні осі пряма $y = 4x - 2$?
5. Знайти точку перетину прямих $y = 3x - 1$ та $y = 2 - x$.
6. Як розташовані прямі: а) $y = 3x - 2$ та $y = 3x - 1$; б) $y = 4x - 2$ та $y = 5 - 2x$?

7. Вершини чотирикутника знаходяться в точках $A(-4; -2)$, $B(-1; 5)$, $C(2; 2)$, $D(5; -2)$. Знайти координати точки перетину діагоналей чотирикутника.

8. Чи лежить точка перетину прямих $y = 3x - 2$ та $y = 2x + 1$ на прямій $y = x$?

9. При яких значеннях k і b точка $A(1; 1)$ є точкою перетину прямих $y = kx + 2$ та $y = 3x - b$?

10. Довести, що точки $A(1; 2)$, $B(3; 0)$, $C(3; -2)$, $D(0; 1)$ є вершинами трапеції.

11. Побудувати графік функції: а) $y = |x + 1| + |x - 1|$; б) $y = |2x - 1| + x + 1$; в) $y = |x + 4| - |x| + x - 2$.

12. Побудувати графік функції $y = \big||x+1|-|x|\big|+x$.

13. Довести, що якщо кусково-лінійна функція досягає найменшого (або найбільшого) значення, то це значення досягається в кутовій точці.

§ 4. Квадратична функція

4.1. Функція виду $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — фіксовані числа, причому $a \neq 0$, називається *квадратичною*. Інша її назва — *квадратний тричлен*.

Найпростішою різновидністю квадратичної функції є функція $y = x^2$. Вона має такі властивості: 1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) функція парна; 3) при $x = 0$ $y = 0$, при $x \neq 0$ $y > 0$; 4) при $x \in (-\infty; 0)$ функція спадає, при $x \in (0; \infty)$ — зростає; 5) при $x = 0$ функція має найменше значення, що дорівнює нулю.

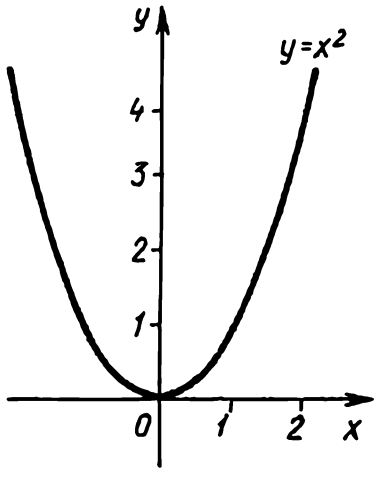


Рис. 4.34

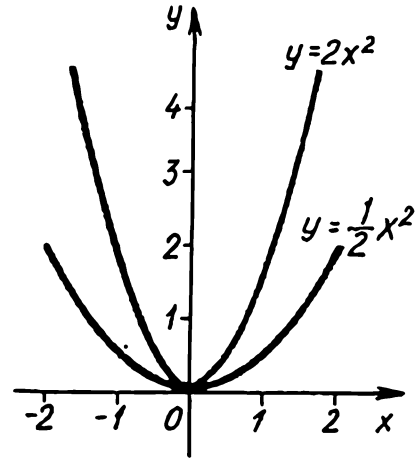


Рис. 4.35

На рис. 4.34 показаний графік функції $y = x^2$. Ця крива називається *параболою*. Вершина параболи знаходиться в точці $O(0; 0)$, а її вітки напрямлені вгору, парабола має вісь симетрії — пряму $x = 0$ (або вісь Oy).

Графік функції $y = ax^2$ ($a > 0$) одержується з графіка функції $y = x^2$ шляхом збільшення ординати кожної точки графіка в a разів (якщо $a > 1$) або зменшення цієї ординати в a разів (якщо $0 < a < 1$). На рис. 4.35 показані графіки функцій $y = 2x^2$ та $y = \frac{1}{2}x^2$.

Якщо ж $a < 0$, то можна спочатку побудувати графік функції $y = |a|x^2$, а потім здійснити осьову симетрію відносно осі Ox. На рис. 4.36 показані графіки функцій $y = -2x^2$ та $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Виявляється, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна одержати за допомогою паралельного зсуву графіка функції $y = ax^2$. Зазначимо, що $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Таким чином, $y = a(x - x_0)^2 - m$, де $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $m = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Тепер ясно, що графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна дістати з графіка функції $y = ax^2$ шляхом паралельного зсуву на вектор $\bar{e}(x_0; -m)$.

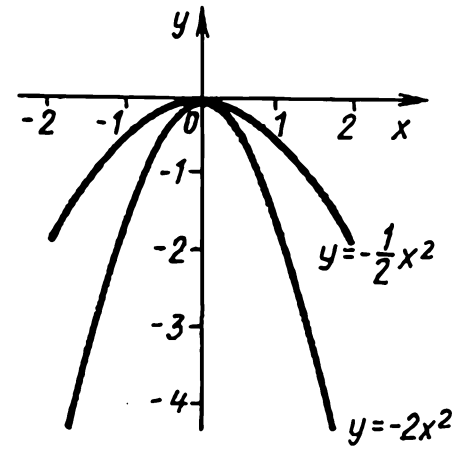


Рис. 4.36

Приклад

1. Побудувати графік функції $y = x^2 - 2x - 2$.

* $a = 1$. $b = c = -2$, $x_0 = -\frac{-2}{2} = 1$. $m = \frac{4 - 4 \cdot 1(-2)}{4} = 3$.

Шуканий графік одержується з графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного зсуву на вектор $\bar{e}(1; -3)$. він показаний на рис. 4.37. *

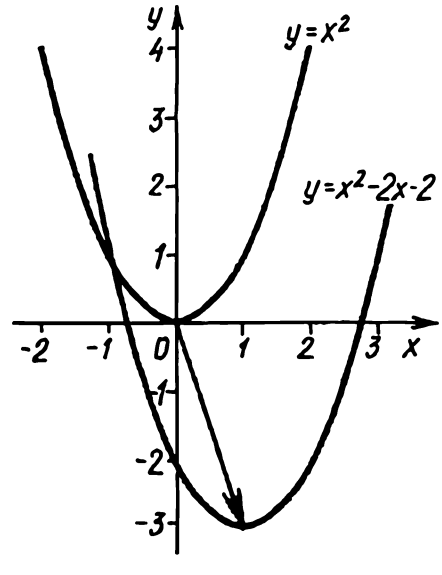


Рис. 4.37

На практиці графік квадратичної функції можна побудувати так: 1) знайти вершину параболи $A\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$; 2) провести вісь симетрії шуканої параболи — пряму з рівнянням $x = -\frac{b}{2a}$; 3) враховуючи знак старшого коефіцієнта a, побудувати графік за точками.

Приклади

2. Побудувати графік функції $y = 2x^2 + 4x - 1$.

* У даному випадку $a = 2$, $b = 4$, $c = -1$. Отже, $x_0 = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$, $y_0 = y(-1) = 2 - 4 - 1 = -3$. Точка $A(-1; -3)$ — вершина параболи. Пряма $x = -1$ — вісь симетрії параболи.

Складемо табличку окремих значень функції:

x	-1	0	-2	1	3
y	-3	-1	-1	5	5

Точки $B(0; -1)$, $C(-2; -1)$, $D(1; 5)$, $E(-3; 5)$ лежать на графіку функції. Плавно з'єднуючи їх за допомогою лекала, одержуємо графік функції. Оскільки $a = 2 > 0$, вітки параболи напрямлені вгору (рис. 4.38). *

3. На параболі $y = ax^2 + bx$ лежать точки $A(-2; 1)$ та $B(3; -1)$. Знайти a і b.

* З умови випливає, що $y(-2) = 1$, а $y(3) = -1$. Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4a - 2b = 1, \\ 9a + 3b = -1, \end{cases}$$

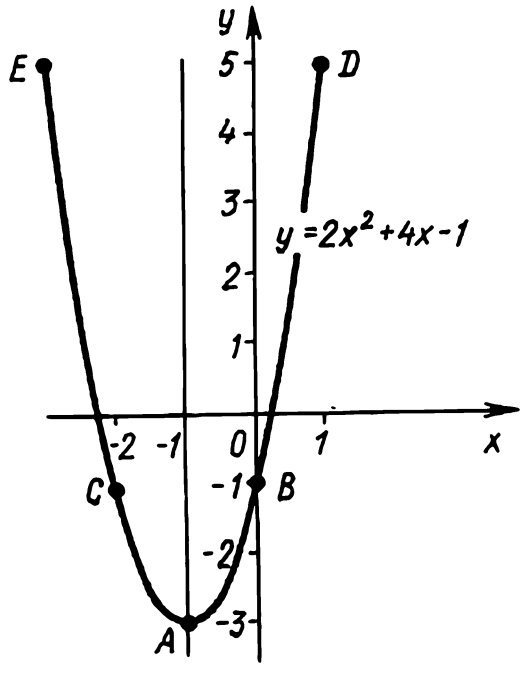


Рис. 4.38

звідки $a=\frac{1}{30}$, $b=-\frac{13}{30}$. Відповідь: $a=\frac{1}{30}$, $b=-\frac{13}{30}$. *

4. Знайти рівняння квадратного тричлена, якщо на його графіку лежать точки $A(-3; -5)$, $B(0; -1)$, $C(2; 3)$.

* Нехай квадратний тричлен має рівняння $y = ax^2 + bx + c$. Виходячи з умови, маємо $y(-3) = -5$, $y(0) = -1$, $y(2) = 3$. Звідси дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = -5, \\ c = -1, \\ 4a + 2b + c = 3. \end{cases}$$

звідки $a=\frac{2}{15}$, $b=\frac{26}{15}$, $c=-1$. Відповідь: $y = \frac{2}{15}x^2 + \frac{26}{15}x - 1$. *

Під час дослідження квадратного тричлена $y = ax^2 + bx + c$ важливу роль відіграє вираз $D = b^2 - 4ac$, що називається *дискримінантом тричлена*. Розглянемо питання про існування та знаходження коренів квадратного тричлена.

Нехай $y = 0$. Рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, називається *квадратним*. Домножимо обидві частини рівняння на $4a$ й отримаємо $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$. Додамо й віднімемо b^2 і одержимо $4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$; $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$, $(2ax + b)^2 = D$. Тепер маємо три випадки.

1. Якщо $D < 0$, рівняння не має коренів.

2. Якщо $D = 0$, рівняння має єдиний корінь (або двократний корінь) $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Якщо $D > 0$, то $2ax + b = \pm\sqrt{D}$ і рівняння має два корені: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ та $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Приклад

5. Скільки коренів залежно від значення параметра p має квадратний тричлен $y = 2x^2 - px + 2$?

* $a = 2$, $b = -p$, $c = 2$, отже $D = p^2 - 16$. Якщо $p^2 - 16 < 0$, тобто $-4 < p < 4$, коренів немає (парабола, що є графіком тричлена, розташована вище осі Ox); якщо $p^2 - 16 = 0$, тобто $p = \pm 4$, існує один корінь (парабола дотикається до осі Ox); якщо $p^2 - 16 > 0$, тобто $p < -4$ або $p > 4$, існує два корені (парабола перетинає вісь Ox у двох точках). *

Розглянемо питання про взаємне розташування прямої та параболи. Ясно, що будь-яка вертикальна пряма перетинає параболу в одній точці.

Нехай є пряма $y = px + q$ та парабола $y = ax^2 + bx + c$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = px + q, \\ y = ax^2 + bx + c. \end{cases}$$

Звідси маємо $ax^2 + bx + c = px + q$, або $ax^2 + (b - p)x + c - q = 0$. Одержане квадратне рівняння має дискримінант $D = (b - p)^2 - 4a(c - q)$. Тепер маємо три випадки.

1. $D < 0$, або $(b - p)^2 < 4a(c - q)$. Розв'язків немає. Пряма і парабола не перетинаються.

2. $D = 0$, або $(b - p)^2 = 4a(c - q)$. Існує єдиний розв'язок. Пряма і парабола мають єдину спільну точку. Невертикальна пряма, яка має з параболою єдину спільну точку, називається *дотичною до параболи*.

3. $D > 0$, або $(b - p)^2 > 4a(c - q)$. Існує два розв'язки. Пряма і парабола мають дві спільні точки.

Отже, пряма і парабола можуть мати одну, дві спільні точки або зовсім не мати спільних точок.

Приклади

6. При якому значенні параметра a пряма $y = 2x - 3a$ дотикається до параболи $y = x^2 + x - 1$?

* Маємо $a = b = 1$, $c = -1$, $p = 2$, $q = -3a$. Розглянемо вираз $D = (b - p)^2 - 4a(c - q) = (1 - 2)^2 - 4 \cdot 1(-1 - 3a) = 5 - 12a$. Якщо пряма дотикається до параболи, то $D = 0$, звідки $5 - 12a = 0$ і $a = \frac{5}{12}$. Відповідь: при $a = \frac{5}{12}$. *

7. При якому значенні параметра l пряма $y = x$ дотикається до параболи $y = 2x^2 + x + l$?

* Маємо $a = 2$, $b = 1$, $c = l$, $p = 1$, $q = 0$. Отже, $D = (b - p)^2 - 4a(c - q) = (1 - 1)^2 - 4 \cdot 2(l - 0) = -8l$. Якщо пряма дотикається до параболи, то $D = 0$, звідки $l = 0$. Відповідь: при $l = 0$. *

Зауваження. Легко відшукати і точку дотику. Так, у прикладі 6 при $a = \frac{5}{12}$ пряма $y = 2x - \frac{5}{4}$ дотикається до параболи $y = x^2 + x - 1$. З рівняння $x^2 + x - 1 = 2x - \frac{5}{4}$ знаходимо, що $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ і $x = \frac{1}{2}$. Отже, точка дотику $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

У прикладі 7 при $l = 0$ парабола $y = 2x^2 + x$ дотикається до прямої $y = x$. З рівняння $2x^2 + x = x$ знаходимо, що $x = 0$. Отже, точка дотику $O(0; 0)$.

8. Знайти рівняння спільної дотичної двох парабол: $y = x^2 + 2x + 2$ та $y = x^2 - 2x + 3$. Знайти також точки дотику.

* Нехай рівняння спільної дотичної $y = px + q$. Запишемо умови дотику прямої до кожної з парабол і одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} (2 - p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - q) = 0, \\ (-2 - p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - q) = 0. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} p^2 - 4p + 4q = 4, \\ p^2 + 4p + 4q = 8. \end{cases}$$

звідки $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{23}{16}$. Рівняння шуканої прямої $y = \frac{1}{2}x + \frac{23}{16}$. Тепер знайдемо точки дотику. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2, \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{23}{16} \end{cases}$$

маємо $x = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{17}{16}$. Отже, пряма дотикається до першої параболи в точці $A\left(-\frac{3}{4}; \frac{17}{16}\right)$. Із системи рівнянь

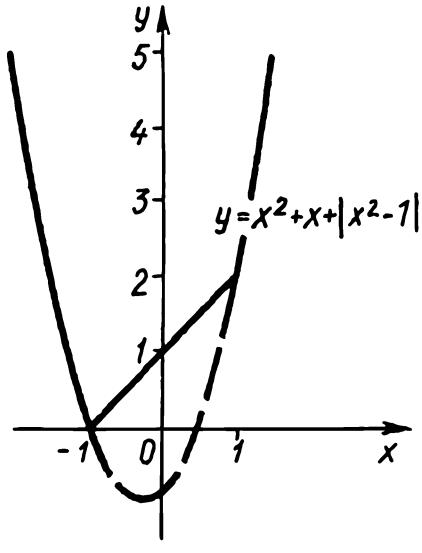


Рис. 4.39

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{23}{16} \end{cases}$$

маємо $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{33}{16}$. Отже, пряма дотикається до другої параболи в точці $B\left(\frac{5}{4}; \frac{33}{16}\right)$.

Відповідь: $y = \frac{1}{2}x + \frac{23}{16}$; $B\left(\frac{5}{4}; \frac{33}{16}\right)$, $A\left(-\frac{3}{4}; \frac{17}{16}\right)$. *

9. Дотична до параболи $y = x^2 - 3x - 1$ проходить через точку $A(-1; -6)$. Знайти рівняння цієї дотичної.

* Нехай шукана дотична має рівняння $y = px + q$. Оскільки вона проходить через точку $A(-1; -6)$, то $-6 = -p + q$. Враховуючи цю умову, а також умову дотику прямої до параболи, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (-3-p)^2 - 4 \cdot 1(-1-q) = 0, \\ -p + q = -6. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} p^2 + 6p + 4q = -13, \\ -p + q = -6, \end{cases}$$

звідки $p = 1$, $q = -5$, або $p = -11$, $q = -17$. Відповідь: $y = x - 5$, або $y = -11x - 17$. *

10. Побудувати графік функції $y = x^2 + x + |x^2 - 1|$.

* Розкриваючи значення модуля, маємо

$$y = \begin{cases} 2x^2 + x - 1, & \text{якщо } x < -1 \text{ або } x > 1, \\ x + 1, & \text{якщо } -1 \le x \le 1. \end{cases}$$

Графік функції показаний на рис. 4.39. *

Вправи

1. Побудувати графік функції: а) $y = x^2 + x + 1$; б) $y = 2x^2 - x - 1$; в) $y = -x^2 + 2x + 1$.

2. На параболі $y = 2x^2 + ax + b$ лежать точки $A(-3; 0)$, $B(1; 2)$. Знайти a і b.

3. Знайти рівняння квадратного тричлена, якщо на його графіку лежать точки $A(0; \frac{2}{3})$, $B(1; 0)$, $C(3; \frac{2}{3})$.

4. Чи лежить точка перетину прямих $y = 1 - 2x$ та $y = 3x + 2$ на параболі $y = 5x^2 + x + \frac{7}{5}$?

5. При якому значенні a прямі $y = 2x$ та $y = x + a$ перетинаються на параболі $y = x^2 - 2x + 3$?

6. Скільки коренів залежно від параметра p має квадратний тричлен: а) $y = x^2 - px + 4$; б) $y = px^2 - 3x + 2$; в) $y = 3x^2 - x + p^2$?

7. При якому значенні a пряма $y = ax + 1$ дотикається до параболи $y = x^2 - x + 2$?

8. При якому значенні a пряма $y = ax + 2$ дотикається до параболи $y = 4x^2 - ax + 3$?

9. Знайти рівняння спільної дотичної двох парабол: $y = x^2 - 2x + 1$ та $y = x^2 - 1$. Знайти також точки дотику.

10. Довести, що параболи $y = 2x^2 - x - 1$ та $y = -x^2 + 4x - 1$ не мають спільної дотичної.

11. Дотична до параболи $y = -x^2 + 2x - 2$ проходить через точку $A(1; 0)$. Знайти рівняння цієї дотичної і точку дотику.

12. Побудувати графік функції: а) $y = 2x^2 + |x| - 1$; б) $y = |x^2 - 4| - x + 2$.

§ 5. Дробово-лінійна функція

5.1. Функція $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називається *оберненою пропорційністю*.

На рис. 4.40 показаний графік функції $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$. Основні властивості функції такі: 1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) функція непарна; 3) при $x > 0$ $y > 0$, при $x < 0$ $y < 0$; 4) на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$ функція спадає; екстремумів немає.

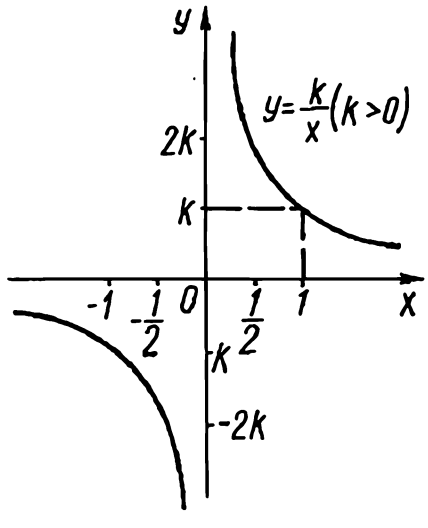


Рис. 4.40

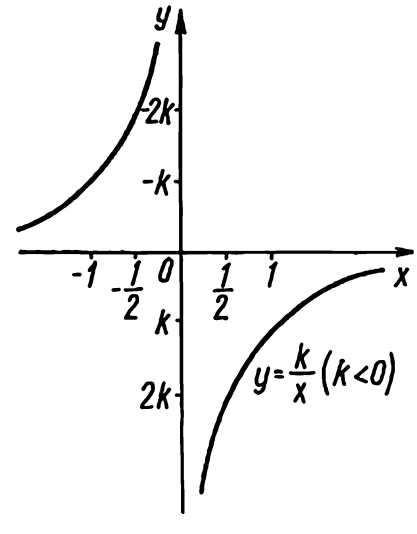


Рис. 4.41

На рис. 4.41 показаний графік функції $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$. Основні властивості функції такі: 1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) функція непарна; 3) при $x < 0$ $y > 0$, при $x > 0$ $y < 0$; 4) на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$ функція зростає; екстремумів немає. Функція має дві асимптоти — вертикальну — вісь Oy та горизонтальну — вісь Ox.

Пряма, що має рівняння $x = a$, називається *вертикальною асимптотою* графіка функції $f(x)$, якщо для будь-якого додатного числа t існує число $\varepsilon > 0$ таке, що з умов $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, $x \neq a$ випливає нерівність $|f(x)| > t$. Якщо x наближається до 0, значення функції $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ стають як завгодно великими по модулю. Отже, пряма $x = 0$ (вісь Oy) — вертикальна асимптота графіка оберненої пропорційності.

Пряма $y = b$ називається *горизонтальною асимптотою* графіка функції $f(x)$ на $+\infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує додатне число t таке, що з умови $x > t$ випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$. Якщо $x \to +\infty$, модуль різниці між значеннями функції $y = \frac{k}{x}$ та нулем стає меншим за будь-яке додатне число. Отже, $y = 0$ (вісь Ox) — горизонтальна асимптота графіка оберненої пропорційності на $+\infty$. Враховуючи, що функція $y = \frac{k}{x}$ непарна, одержуємо, що вісь Ox є також горизонтальною асимптотою і на $-\infty$.

Графік функції $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ називається *гіперболою*. Точка перетину асимптот називається *вершиною гіперболи*.

5.2. *Дробово-лінійною* називається функція виду $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, де $c\neq 0$, $ad\neq bc$. Якщо $c=0$, маємо лінійну функцію, а якщо $ad=bc$ — сталу. Покажемо, що графік дробово-лінійної функції одержується з графіка оберненої пропорційності за допомогою паралельного зсуву. Помітимо, що $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)=$

$=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{k}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$, де $k=\frac{bc-ad}{c^2}$. Звідси видно, що дробово-лінійна функція має вертикальну асимптоту $x=-\frac{d}{c}$ та горизонтальну асимптоту $y=\frac{a}{c}$.

Графік дробово-лінійної функції одержується з графіка оберненої пропорційності шляхом паралельного зсуву на вектор $\bar{e}\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$. Це гіпербола, що має вертикальну асимптоту $x=-\frac{d}{c}$ та горизонтальну асимптоту $y=\frac{a}{c}$. Вершина цієї гіперболи лежить у точці $O'\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$.

На практиці графік дробово-лінійної функції будують так: проводять асимптоти графіка, потім будують графік за точками враховуючи, що він симетричний відносно вершини гіперболи.

Приклади

1. Побудувати графік функції $y=\frac{2x-1}{x-3}$.

* У даному випадку $a=2$, $b=-1$, $c=1$, $d=-3$. Графік має вертикальну асимптоту $x=-\frac{d}{c}=3$ і горизонтальну асимптоту $y=\frac{a}{c}=2$. Вершина шуканої гіперболи — точка $O'(3;2)$. Складаємо табличку частинних значень функції:

x	–2	–1	0	1	2	1/2
y	1	3/4	1/3	–1/2	–3	0

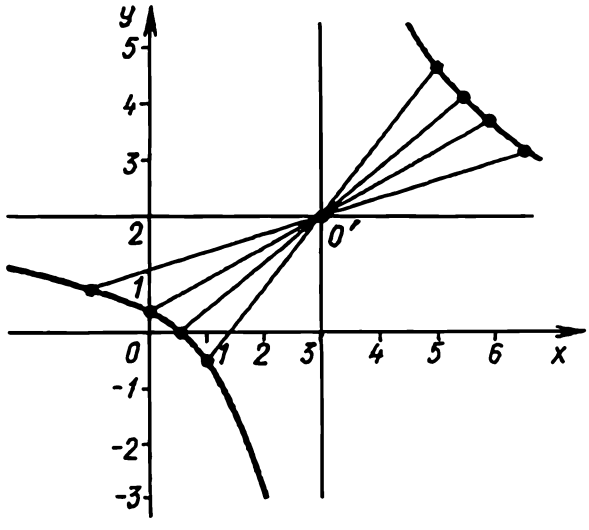


Рис. 4.42

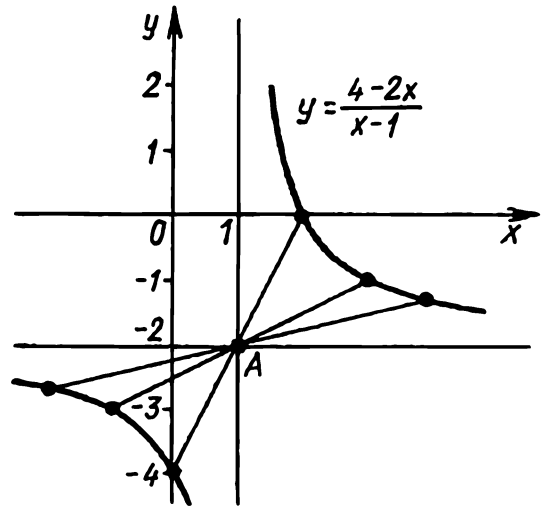


Рис. 4.43

Сполучаємо одержані з таблички точки кривою і відображаємо цю криву симетрично відносно точки $O'(3;2)$. Графік показаний на рис. 4.42. *

2. Побудувати графік функції $y = \left|\dfrac{4-2|x|}{|x|-1}\right|$.

* Спочатку будуємо графік функції $y = \dfrac{-2x+4}{x-1}$. Графік має вертикальну асимптоту $x = 1$ та горизонтальну асимптоту $y = -2$ (рис. 4.43). Графіком цієї функції є гіпербола з вершиною $A(1;-2)$.

Тепер будуємо графік функції $y_1 = \dfrac{-2|x|+4}{|x|-1}$. Помітимо, що y_1 — парна функція. При $x \geq 0$ $y_1 = y$, отже, графіки цих функцій при $x \geq 0$ співпадають, а частина графіка функції y_1, що лежить ліворуч від осі Oy, симетрична частині графіка, що лежить праворуч від осі Oy. Графік функції y_1 показаний на рис. 4.44.

Тепер побудуємо графік функції $y_2 = \left|\dfrac{4-2|x|}{|x|-1}\right|$. Для цього частину графіка функції y_1, що лежить під віссю Ox, відображаємо симетрично відносно осі Ox (рис. 4.45). Графік функції $y_2 = \left|\dfrac{4-2|x|}{|x|-1}\right|$ має дві вертикальні асимптоти: $x = -1$ та $x = 1$ — і одну горизонтальну асимптоту $y = 2$. *

З'ясуємо питання про взаємне розташування прямої і гіперболи. Нехай є гіпербола $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ і пряма $y = px + q$. Кількість точок їх перетину дорівнює кількості коренів рівняння

$$\frac{ax+b}{cx+d} = px+q, \quad \text{або} \quad pcx^2 + (pd+cq-a)x + dq - b = 0. \tag{4.1}$$

Останнє рівняння може мати один або два корені чи зовсім не мати коренів.

Якщо пряма вертикальна, то вона або перетинає гіперболу в одній точці, або не перетинає її (якщо ця пряма є вертикальною асимптотою). Таким чином, пряма і

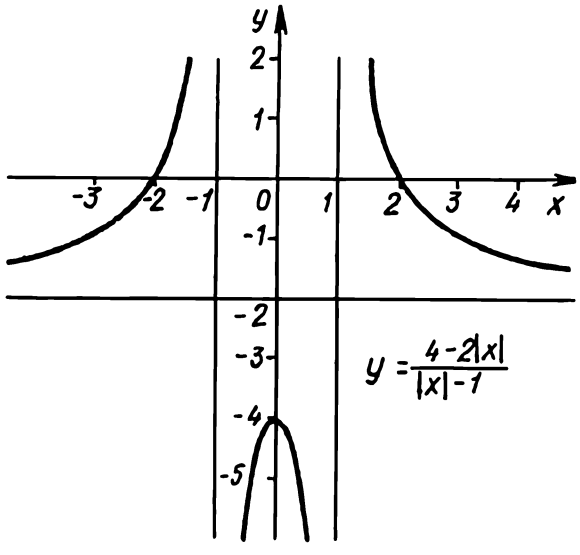


Рис. 4.44

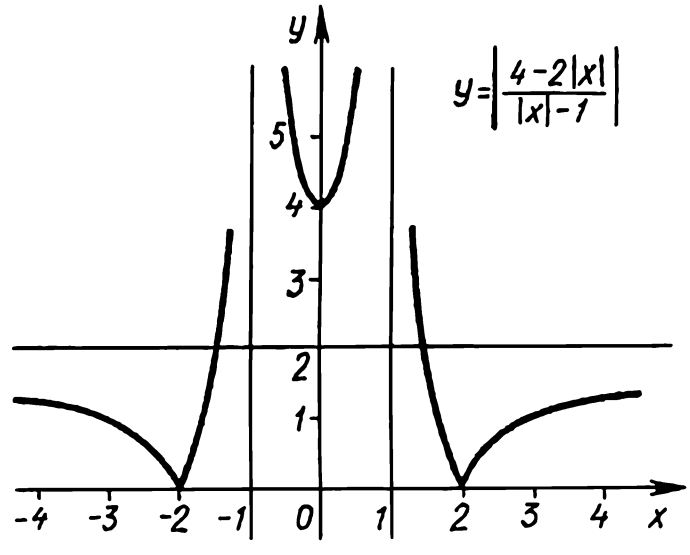


Рис. 4.45

гіпербола можуть мати одну чи дві спільні точки або можуть не перетинатися. Якщо пряма не горизонтальна й не вертикальна і має з гіперболою лише одну спільну точку, вона називається дотичною до гіперболи. Із рівняння (4.1) одержуємо умову дотику прямої до гіперболи:

$$(pd + cq - a)^2 = 4cp(dq - b).$$

Якщо $(pd + cq - a)^2 > 4cp(dq - b)$, то пряма і гіпербола мають дві спільні точки. Якщо ж $(pd + cq - a)^2 < 4cp(dq - b)$, то пряма і гіпербола не мають спільних точок.

Приклади

3. Через точку $A(0; -1)$ проведено дотичну до гіперболи $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$. Знайти рівняння цієї дотичної.

* Нехай дотична має рівняння $y = px + q$. У даному випадку $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -1$. З умови дотику прямої та гіперболи маємо $(p(-1) + q2 - 3)^2 = 4p2(q(-1) - 1)$. Оскільки точка $A(0; -1)$ лежить на дотичній, то $-1 = p0 + q$, звідки $q = -1$. Отже, $(-p - 2 - 3)^2 = 8p(1 - 1)$, $(p + 5)^2 = 0$ і $p = -5$. Відповідь: дотична має рівняння $y = -5x - 1$. *

4. Кутовий коефіцієнт дотичної до гіперболи $y = \dfrac{2x}{x+2}$ дорівнює 1. Знайти рівняння цієї дотичної і точку дотику.

* Нехай рівняння дотичної $y = px + q$. За умовою $p = 1$, отже, $y = x + q$. Для гіперболи маємо $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$. З умови дотику прямої і гіперболи одержуємо $(1 \cdot 2 + q1 - 2)^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1(2q - 0)$, або $q^2 = 8q$, звідки $q = 0$ або $q = 8$. Маємо два випадки.

1. $q = 0$. Дотична має рівняння $y = x$. Із рівняння $\dfrac{2x}{x+2} = x$ одержуємо $x = 0$. Отже, точка дотику $O(0; 0)$.

2. $q = 8$. Рівняння дотичної $y = 8 + x$. Із рівняння $\dfrac{2x}{x+2} = x + 8$ маємо $x^2 + 8x + 16 = 0$, $x = -4$. Точка дотику $A(-4; 4)$. *

Вправи

1. Побудувати графік функції: а) $y=\dfrac{1-x}{x+3}$; б) $y=\dfrac{3x}{2x-5}$; в) $y=\dfrac{4x-1}{2x+2}$.

2. Побудувати графік функції: а) $y=\left|\dfrac{x-3}{x+2}\right|$; б) $y=\dfrac{|x|-2}{|x|+4}$; в) $y=\left|\dfrac{3-|x|}{|x|+1}\right|$.

3. Через точку $A(0; 1)$ проведено дотичну до гіперболи $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$. Знайти рівняння дотичної.

4. Довести, що дотична до гіперболи не може проходити через її вершину.

5. Довести, що дотична до гіперболи $y=\dfrac{2x}{x+2}$ має додатний кутовий коефіцієнт.

6. При якому значенні параметра a пряма $y = ax + 1$ дотикається до гіперболи $y=\dfrac{4x+1}{x+1}$?

7. При якому значенні параметра a пряма $y = a - 5x$ дотикається до гіперболи $y=\dfrac{2-x}{2x+1}$?

8. При якому значенні параметра a пряма $y = ax - 1$ дотикається до гіперболи $y=\dfrac{a-x}{x+1}$?

§ 6. Степенева функція

Степеневою називається функція виду $y = x^{\alpha}$, де α — фіксоване дійсне число, не рівне нулю.

Розглянемо випадки, що найчастіше зустрічаються на практиці.

6.1. При дослідженні степеневої функції з натуральним показником $y = x^n$ розрізняють два випадки.

1. n — парне число; маємо $y = x^{2k}$. Основні властивості таких функцій: 1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) функція парна; 3) функція має єдиний корінь $x = 0$; при $x \neq 0$ $y > 0$; 4) якщо $x \in (-\infty; 0)$, функція спадає; якщо $x \in (0; \infty)$, функція зростає; 5) функція досягає найменшого значення при $x = 0$.

Ми бачимо, що всі властивості цих функцій співпадають із властивостями функції $y = x^2$. Якщо k збільшується, графіки цих функцій усе більше наближаються до осі Ox на інтервалі $(-1; 1)$. На рис. 4.46 показані графіки функцій $y = x^2$ та $y = x^4$.

2. n — непарне число; $y = x^{2k-1}$. Якщо $k = 1$, $y = x$ — лінійна функція. Основні властивості таких функцій: 1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) функція непарна; 3) при $x < 0$ $y < 0$, при $x = 0$ $y = 0$; при $x > 0$ $y > 0$; 4) функція зростає на всій числовій прямій. На рис. 4.47 показані графіки функцій $y = x^3$ та $y = x^5$.

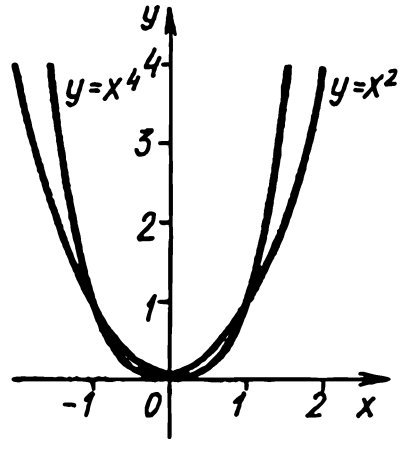


Рис. 4.46

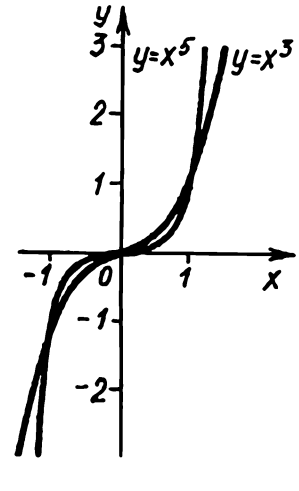


Рис. 4.47

6.2. При дослідженні степеневої функції із цілим від'ємним показником $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbf{N}$, розрізняють два випадки.

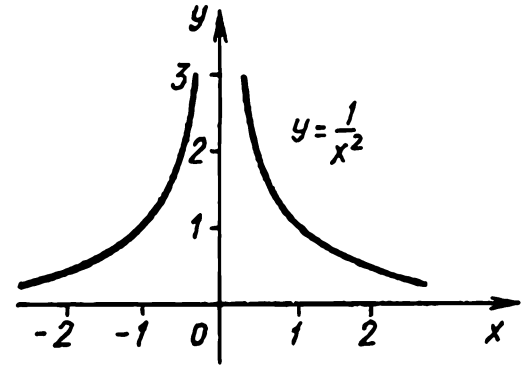


Рис. 4.48

1. n — парне число; $y = x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Основні властивості таких функцій: 1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) функція парна; 3) функція приймає додатні значення в будь-якій точці області визначення; 4) якщо $x \in (-\infty; 0)$, функція зростає; якщо $x \in (0; +\infty)$, функція спадає. На рис. 4.48 показаний графік функції $y = \frac{1}{x^2}$.

2. n — непарне число; $y = x^{1-2k} = \frac{1}{x^{2k-1}}$. Основні властивості таких функцій: 1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) функція непарна; 3) при $x < 0$ $y < 0$, при $x > 0$ $y > 0$; 4) функція спадає на кожному з інтервалів $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$. На рис. 4.49 показаний графік функції $y = \frac{1}{x^3}$.

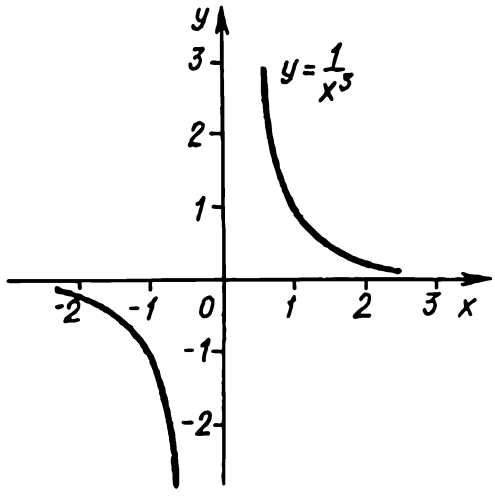


Рис. 4.49

6.3. Функція $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in [0; +\infty)$ зростає, отже, має обернену. Оберненою до неї є функція $y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$, що має такі основні властивості: 1) $D(y) = [0; +\infty)$; 2) при $x = 0$ $y = 0$, при $x > 0$ $y > 0$; 3) функція зростає на всій області визначення. На рис. 4.50 показаний графік функції $y = \sqrt{x}$. Графік кожної функції виду $y = \sqrt[2n]{x}$ схожий на нього. Зауважимо, що графік функції $y = \sqrt{x}$ симетричний графіку функції $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ відносно прямої $y = x$.

Функція $y = x^{2n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ зростає, отже, має обернену. Оберненою до неї є функція $y = \sqrt[2n-1]{x}$. Якщо $n = 1$, пряма і обернена функції співпадають: $y = x$. Якщо $n = 2,3,...$, маємо функції $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$,... Графік функції $y = \sqrt[2n-1]{x}$ можна одержати, відображаючи графік функції $y = x^{2n-1}$ симетрично відносно прямої $y = x$. Основні властивості функції $y = \sqrt[2n-1]{x}$ такі: 1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) функція непарна; 3) $y = 0$ при $x = 0$, $y < 0$ при $x < 0$, $y > 0$ при $x > 0$; 4) функція зростає на всій області визначення. На рис. 4.51 показаний графік функції $y = \sqrt[3]{x}$.

6.4. Розглянемо функцію $y = x^t$, де t — додатний нескоротний дріб і $0 < t < 1$. Основні властивості таких функцій: 1) $D(y) = [0; +\infty)$; 2) $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$;

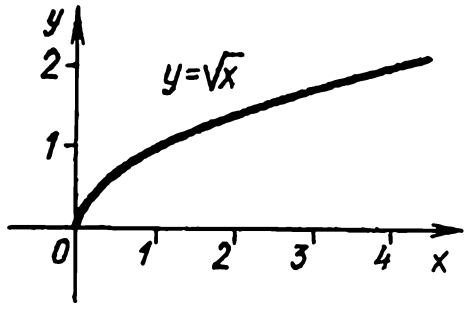


Рис. 4.50

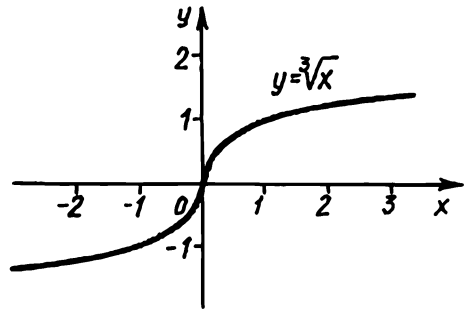


Рис. 4.51

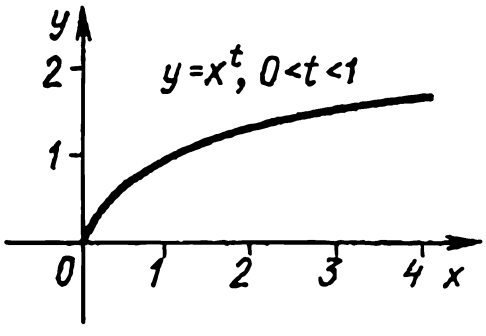


Рис. 4.52

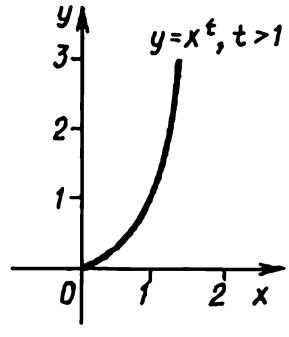


Рис. 4.53

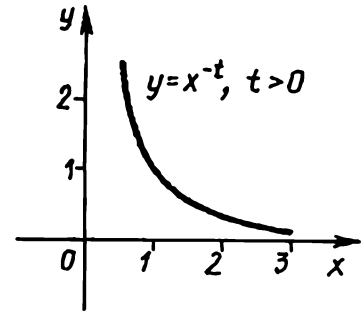


Рис. 4.54

3) функція зростає на всій області визначення. Графік функції такого виду показаний на рис. 4.52.

Розглянемо функцію $y = x^t$, де t — додатний нескоротний дріб і $t > 1$. Основні властивості таких функцій: 1) $D(y) = [0; +\infty)$; 2) $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$; 3) функція зростає на всій області визначення. Графік функції такого виду показаний на рис. 4.53.

Розглянемо функцію $y = x^{-t}$, де t — додатний нескоротний дріб. Основні властивості таких функцій: 1) $D(y) = (0; +\infty)$; 2) $y > 0$ при $x > 0$; 3) функція спадає на всій області визначення. Графік функції такого виду показаний на рис. 4.54.

Відповіді до вправ

§ 1. 1. а) $A \cup B = \{-3; -2; 0; 1; 2; 3; 4\}$. $A \cap B = \{2; 3\}$; б) $A \cup B = [0; 2] \cup [3; 4]$, $A \cap B = \varnothing$; в) $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. $A \cap B = \varnothing$; г) $A \cup B = [-3; 3)$. $A \cap B = (-1; 0) \cup (0; 1)$. **2.** а) $M = \{1\}$; б) $A = \left\{-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}\right\}$; в) $B = \varnothing$. **3.** а) $A = (13; -\infty)$; б) $B = \left(-1/2\left(1+\sqrt{5}\right); 1/2\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$; в) $C = (2; 6)$; г) $D = (-\infty; -2) \cup (0{,}2; +\infty)$. **5.** а) $\bigcup_{i=1}^{5} A_i = (0; 1]$. $\bigcap_{i=1}^{5} A_i = [0; 0.2]$; б) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0; 1]$. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$. **7.** а) $D(f) = E(f) = \mathbf{R}$; б) $f(0) = 4$, $f(-2) = 10$, $f(a^{-1}) = 4 - 3/a$. **8.** а) $D(f) = (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $f(-1) = -4/3$, $f(0) = -4$. $f(2) = 4/3$, $f\left(a^{-1}\right) = \dfrac{4a}{2-a}$.

9. а) $[-1; 1]$; б) $(-5; -4) \cup (-4; +\infty)$; в) $\left[1; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; г) $[-2; 2) \cup (2; 6]$; д) $[0; 1) \cup (1; -\infty)$; е) $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$; є) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; ж) $\varnothing$. **10.** Не може. **11.** Корені: $x = -1$ та $x = 2$, $f(x) > 0$ при $x \in [-3; -1) \cup (2; 4)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-1; 2)$, $D(f) = [-3; 4]$, $E(f) = [-1; 1.5]$.

§ 2. 1. а) Непарна; б) несиметрична; в) непарна; г) парна; д) непарна; е) несиметрична; є) парна; ж) несиметрична. **7.** а) $y=\frac{5-x}{3}$; б) $y=\sqrt{x+2}$, $x \in [-2; +\infty)$; в) $y=\frac{3x+5}{2x-2}$; г) $y=(x+1)^2$, $x \in [-1; +\infty)$; д) $y=\frac{1}{2}\left(x^2-3\right)$, $x \in [0; +\infty)$. **8.** а) $y=\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}$; б) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}$; в) $y=\sin^3 x$. **9.** $x=1/2\left(-1\pm\sqrt{13}\right)$.

§ 3. 1. Ні. **2.** а) $y=3-x$; б) $y=3$; в) $x=1$. **3.** Ні. **4.** $A(0, -2)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. **5.** $A\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. **6.** а) паралельні; б) перетинаються. **7.** $O\left(1\frac{8}{11}; 1\frac{9}{11}\right)$. **8.** Ні. **9.** $k=-1$, $b=2$.

§ 4. 2. $a=\frac{9}{2}$, $b=-\frac{9}{2}$. **3.** $y=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}$. **4.** Так. **5.** При $a=1$ або $a=3$. **6.** а) два при $|p|<4$, один при $p=\pm 4$, 0 при $-4<p<4$; б) два при $p<\frac{9}{8}$, один при $p=\frac{9}{8}$, жодного при $p>\frac{9}{8}$; в) два при $-\frac{1}{2\sqrt{3}}<p<\frac{1}{2\sqrt{3}}$, один при $p=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$, жодного при $p<\frac{1}{2\sqrt{3}}$ або $p>\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **7.** При $a=1$ або $a=-3$. **8.** При $a=\pm 2$. **9.** $y=x-\frac{5}{4}$. $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$. $B\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$. **11.** $y=2x-2$, $B(0; -2)$ або $y=6x-6$, $B(2; 6)$.

§ 5. 3. $y=1-3x$. **6.** При $a=3$. **7.** При $a=2$ або $a=-8$. **8.** При $a=-\frac{4}{5}$.

Тема 5. РІВНЯННЯ

§ 1. Рівняння з одним невідомим

1.1. Рівність двох функцій

$$f(x) = g(x) \tag{5.1}$$

називається *рівнянням з одним невідомим.*

Функція $f(x)$ називається *лівою частиною*, а функція $g(x)$ — *правою частиною рівняння.*

Число a називається *коренем* (або *розв'язком*) рівняння (5.1), якщо числова рівність $f(a) = g(a)$ справедлива. Розв'язати рівняння — означає знайти множину всіх його коренів. Якщо рівняння не має коренів, то множина його коренів — порожня множина. У цьому разі будемо писати: $x \in \varnothing$. Наприклад, рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має коренів, бо його ліва частина додатна при будь-якому дійсному x.

Областю допустимих значень рівняння (5.1) називають множину всіх x, при яких визначені функції $f(x)$ і $g(x)$. Наприклад, для рівняння $\frac{3x}{x-2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$ область допустимих значень D визначається умовами $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 2$, отже, $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

Нехай $\mathbf{M}_1$ — множина коренів рівняння

$$f_1(x) = g_1(x), \tag{5.2}$$

$\mathbf{M}_2$ — множина коренів рівняння

$$f_2(x) = g_2(x). \tag{5.3}$$

Якщо $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_2$, то рівняння (5.3) є наслідком рівняння (5.2) (іноді кажуть, що рівняння (5.3) випливає з рівняння (5.2)). Наприклад, рівняння $x^2 - 4 = 0$ випливає з рівняння $x - 2 = 0$, бо рівняння $x - 2 = 0$ має корінь $x = 2$, а рівняння $x^2 - 4 = 0$ — два корені: $x = 2$ та $x = -2$. Якщо $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$, то рівняння (5.2) і (5.3) називаються *рівносильними* (*еквівалентними*).

Якщо два рівняння рівносильні, то кожне з них є наслідком іншого. Якщо обидва рівняння не мають коренів, вони також вважаються рівносильними.

Якщо рівняння (5.3) випливає з рівняння (5.2), пишуть $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$. Якщо ці рівняння рівносильні, пишуть $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

Два рівняння називаються *рівносильними на деякій множині*, якщо в цій множині вони мають однакові корені. Наприклад, рівняння $x + 1 = 0$ та $x^2 - 1 = 0$ рівносильні на множині від'ємних чисел.

Нехай задано декілька рівнянь: $f_1(x) = g_1(x)$, $f_2(x) = g_2(x)$, ..., $f_n(x) = g_n(x)$ — і потрібно знайти всі значення x, що є спільними коренями всіх цих рівнянь. Тоді кажуть, що задано *систему рівнянь*, і позначають її так:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = g_n(x). \end{cases}$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок — $x = 1$.

Якщо ж потрібно знайти всі значення x, що є коренями хоча б одного з даних n рівнянь, то кажуть, що задано *сукупність рівнянь*, і позначають її так:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = g_n(x). \end{cases}$$

Сукупність рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

має три розв'язки: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

Аналогічно визначається *сукупність систем рівнянь*.

Нехай є декілька рівнянь і нерівностей: $f_1(x) = g_1(x)$, $f_2(x) = g_2(x)$, ..., $f_n(x) = g_n(x)$, $f_{n+1}(x) < g_{n+1}(x)$, $f_{n+2}(x) < g_{n+2}(x)$, ..., $f_k(x) < g_k(x)$ ($n < k$) — і треба знайти всі значення x, кожне з яких задовольняє одночасно і всі рівняння, і всі нерівності. Тоді кажуть, що задано *змішану систему*:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = g_n(x), \\ f_{n+1}(x) < g_{n+1}(x), \\ f_{n+2}(x) < g_{n+2}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x) < g_k(x). \end{cases}$$

Змішана система

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + 2 = 0, \\ x > 0 \end{cases}$$

не має розв'язків. Змішана система

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + 2 = 0, \\ x < 0 \end{cases}$$

має один розв'язок — $x = -2$.

Рівносильні системи, сукупності рівнянь та змішані системи визначаються аналогічно рівносильним рівнянням.

Через множини розв'язків за допомогою змішаних систем можна задавати рівносильність рівнянь на деякій множині. Так, запис

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0, \\ x < 0 \end{cases}$$

означає, що рівняння $x^2 - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ рівносильні на множині від'ємних чисел.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 - x + 18 = 0, \\ x^2 - 4 = 0, \\ x^4 - 2x^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

* Для того щоб розв'язати систему рівнянь з одним невідомим, зовсім не обов'язково розв'язувати кожне з рівнянь системи. Розв'яжемо найпростіше (друге) рівняння. Воно має корені $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Перше рівняння задовольняє лише корінь $x = 2$. Отже, $x = -2$ не є розв'язком системи. Корінь $x = 2$ задовольняє також і третє рівняння. Таким чином, система має єдиний розв'язок — $x = 2$. Відповідь: $x = 2$. *

2. Розв'язати сукупність рівнянь

$$\begin{bmatrix} x^3 - 6x^2 - x + 18 = 0, \\ x^2 - 4 = 0, \\ x^4 - 2x^2 - 8 = 0. \end{bmatrix}$$

* Розв'язавши рівняння сукупності, знайдемо множини розв'язків її рівнянь: відповідно $M_1 = \left\{2; 2 + \sqrt{13}; 2 - \sqrt{13}\right\}$. $M_2 = \{-2; 2\}$, $M_3 = \{-2; 2\}$. Якщо M — множина розв'язків сукупності, то $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{-2; 2; 2 - \sqrt{13}; 2 + \sqrt{13}\}$. Відповідь: $x \in \left\{-2; 2; 2 - \sqrt{13}; 2 + \sqrt{13}\right\}$. *

Таким чином, для того щоб розв'язати систему рівнянь, досить розв'язати одне з її рівнянь (а потім його розв'язки перевірити), для того щоб розв'язати сукупність рівнянь, треба розв'язати кожне її рівняння.

1.2. Розв'язуючи рівняння, ми перетворюємо їх, щоб звести до простіших. Під час перетворення рівняння виникає питання: чи буде нове рівняння, одержане в результаті перетворення, рівносильне попередньому?

Теорема 1. *Якщо функція $p(x)$ означена при всіх допустимих значеннях x, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $f(x) + p(x) = g(x) + p(x)$ рівносильні.*

Наслідок. *Якщо деякий доданок рівняння перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши знак цього доданку, то одержиться рівняння, рівносильне даному.*

Теорема 2. *Якщо функція $p(x)$ означена і не дорівнює нулю при всіх допустимих значеннях x, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $f(x) \cdot p(x) = g(x) \cdot p(x)$ рівносильні.*

Наслідок. *Якщо обидві частини рівняння помножити на довільне число, що не дорівнює нулю, то одержиться рівняння, рівносильне даному.*

Приклад

1. Розв'язати рівняння $\frac{x}{3}+\frac{1}{4}=3\frac{1}{2}-2x$.

* На підставі наслідку з теореми 1 маємо

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{4}=3\frac{1}{2}-2x \Leftrightarrow \frac{x}{3}+2x=3\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{3}x=3\frac{1}{4}.$$

На підставі наслідку з теореми 2 маємо

$$\frac{7}{3}x=3\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}x=\frac{3}{7}\cdot 3\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{39}{28}.$$

Відповідь: $x=1\frac{11}{28}$. *

Для розв'язання цього рівняння ми використали таку властивість рівносильності рівнянь: якщо одне рівняння рівносильне другому рівнянню, а друге рівняння рівносильне третьому, то перше рівняння рівносильне третьому. Ця властивість називається *транзитивністю рівносильності рівнянь*. Ясно, що таку саму властивість мають і поняття рівносильності системи рівнянь, сукупностей рівнянь і змішаних систем.

На цій властивості грунтується так званий *метод рівносильних переходів*, який можна схематично зобразити так:

$$\boxed{A_1} \Leftrightarrow \boxed{A_2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \boxed{A_n}.$$

Тут A_1 — вихідне рівняння; A_2, A_3, ..., A_n — рівняння, системи, сукупності, або змішані системи; A_n — або просте рівняння, або система простих рівнянь, або сукупність простих рівнянь, або змішана система простих рівнянь і нерівностей (іноді їх називають *найпростішими*). Метод рівносильних переходів є одним з основних методів, що використовуються для розв'язання рівнянь.

Приклад

2. Розв'язати рівняння $|x-2|+3x=2$.

* Розкриваємо значення модуля на різних проміжках:

$$|x-2|+3x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x<2,\\ 2+2x=2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\geq 2,\\ 4x-2=2,\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x<2,\\ x=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\geq 2,\\ x=1,\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

Відповідь: $x=0$. *

Теорема 3. *Якщо всі значення кожної з функцій $f(x)$ та $g(x)$ входять в область визначення монотонної функції $\varphi(x)$, то рівняння $f(x)=g(x)$ і $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ рівносильні.*

* Якщо a — корінь рівняння $f(x)=g(x)$, то $f(a)=g(a)$ і $\varphi(f(a))=\varphi(g(a))$, бо за умовою число $f(a)$ входить в область визначення функції $\varphi(x)$. Отже, a — корінь рівняння $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$. Якщо a — корінь рівняння $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$, то $\varphi(f(a))=\varphi(g(a))$ і $f(a)=g(a)$ внаслідок монотонності функції $\varphi(x)$. Отже, число a є коренем рівняння $f(x)=g(x)$. *

Наведемо декілька наслідків із цієї теореми.

1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x)$.

2. $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{2n}(x) = g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}$.

4. $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

5. $f(x) = g(x), \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

6. $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ -1 \leq f(x) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \arcsin f(x) = \arcsin g(x)$.

7. $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ -1 \leq f(x) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \arccos f(x) = \arccos g(x)$.

8. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x)$.

Другим основним методом розв'язання рівнянь є *метод наслідків*, який можна схематично зобразити так:

$$\boxed{A_1} \Rightarrow \boxed{A_2} \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \boxed{A_n}.$$

Тут A_i $(1 \leq i \leq n)$ — деякі рівняння, причому рівняння A_{k+1} є наслідком рівняння A_k $(1 \leq k \leq n-1)$.

Якщо $\mathbf{M}_i$ — множина розв'язків рівняння A_i $(1 \leq i \leq n)$, то $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{M}_n$. Отже, $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_n$. Це означає, що рівняння A_n є наслідком рівняння A_1. Числа, що є елементами множини $\mathbf{M}_n$, але не є елементами множини $\mathbf{M}_1$, називаються *сторонніми розв'язками* і відкидаються в результаті перевірки. Таким чином, у разі розв'язання рівняння методом наслідків перевірка необхідна і є елементом розв'язання.

Наведемо декілька теорем про наслідки рівнянь.

Теорема 4. *Якщо з першого рівняння випливає друге, а з другого третє, то з першого рівняння випливає третє.* Вказана властивість називається *транзитивністю наслідків рівнянь.*

Теорема 5. *Якщо функція* $\varphi(x)$ *означена для всіх* x *з області визначення рівняння* $f(x) = g(x)$, *то* $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$.

Теорема 6. *Якщо всі значення кожної з функцій* $f(x)$ *та* $g(x)$ *входять в область визначення функції* $\varphi(x)$, *то рівняння* $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$ *є наслідком рівняння* $f(x) = g(x)$.

Наведемо декілька наслідків із цієї теореми.

1. $f(x) = g(x) \Rightarrow f^n(x) = g^n(x)$.
2. $f(x) = g(x) \Rightarrow \sin f(x) = \sin g(x)$.
3. $f(x) = g(x) \Rightarrow \cos f(x) = \cos g(x)$.

$$4.\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} f(x)=\operatorname{tg} g(x).$$

Теорема 7. *Якщо добуток двох функцій дорівнює нулю, то принаймні одна з них дорівнює нулю:*

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right.$$

Приклад

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1}\left(x^2-4\right)=0.$

$*\ \sqrt{x-1}\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=0, \\ x^2-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\pm 2. \end{array}\right.$ Отже, $x\in\{-2;1;2\}$. Перевіркою встановлено, що $x=-2$ — сторонній корінь. Відповідь: $x\in\{1,2\}$. *

Теорема 7 узагальнюється таким чином: *якщо добуток декількох функцій дорівнює нулю, то принаймні одна з них дорівнює нулю:*

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$$

Приклади

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}-1=\sqrt{2x-1}.$

$*\ \sqrt{x+3}-1=\sqrt{2x-1} \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}-1\right)^2=2x-1 \Leftrightarrow x+4-2\sqrt{x+3}=2x-1 \Leftrightarrow 5-x=$

$=2\sqrt{x+3} \Rightarrow (5-x)^2=4(x+3) \Leftrightarrow x^2-14x+13=0.$ Отже, $x\in\{1;13\}$. Перевіркою встановимо, що $x=13$ — сторонній корінь, а $x=1$ підходить. Відповідь: $x=1$. *

Зауваження. Сторонній корінь $x=13$ належить до області визначення даного рівняння.

5. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4.$

$*$ Згідно з методом наслідків $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4 \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}\right)^2=16 \Leftrightarrow 3x+2+$

$+2\sqrt{2x^2+5x-3}=16 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x-3}=14-3x \Rightarrow 4\left(2x^2+5x-3\right)=(14-3x)^2 \Leftrightarrow x^2-104x+$

$+208=0 \Leftrightarrow x=52\pm 8\sqrt{39}.$

Ми одержали два числа, які складно перевірити. Тому спробуємо розв'язати це рівняння методом рівносильних переходів:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\geq 0, \\ 2x-1\geq 0, \\ \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}\right)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq\dfrac{1}{2}, \\ 2\sqrt{2x^2+5x-3}=14-3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2}, \\ 14-3x \ge 0, \\ 4\left(2x^2+5x-3\right)=\left(14-3x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 4\frac{2}{3}, \\ x^2-104x+208=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 4\frac{2}{3}, \\ x=52\pm 8\sqrt{39}. \end{cases}$$

Зауважимо, що $52+8\sqrt{39} > 4\frac{2}{3}$, отже, число $x=52+8\sqrt{39}$ не підходить.

Тепер перевіримо, чи виконується подвійна нерівність $\frac{1}{2} \le 52-8\sqrt{39} \le 4\frac{2}{3}$:

1) $\frac{1}{2} \le 52-8\sqrt{39}$, $8\sqrt{39} < 51\frac{1}{2}=\frac{103}{2}$, $\sqrt{39} < \frac{103}{16}$.

$\frac{103}{16} > \frac{100}{16}=\frac{25}{4} > \sqrt{39}$, $\left(\frac{25}{4}\right)^2 > 39$, $\frac{625}{16} > 39$, $39\frac{1}{16} > 39$.

2) $52-8\sqrt{39} \le 4\frac{2}{3}$, $47\frac{1}{3} < 8\sqrt{39}$ (ця нерівність справедлива, бо $8\sqrt{39} > 8\cdot 6 = 48 > 47\frac{1}{3}$).

Таким чином, дане рівняння має єдиний корінь $x=52-8\sqrt{39}$. Відповідь: $x=52-8\sqrt{39}$. *

6. Розв'язати рівняння $\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=3$.

* Область допустимих значень знаходиться з урахуванням умови $x \ne \pm 1$. Функція $p(x)=x^2-1$ не дорівнює нулю при всіх допустимих значеннях рівняння. Отже, дане рівняння рівносильне змішаній системі

$$\begin{cases} x \ne \pm 1, \\ \left(x^2-1\right)\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)=3\left(x^2-1\right). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \pm 1, \\ x-\left(x+1\right)+2\left(x-1\right)=3x^2-3. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \pm 1, \\ 3x^2-2x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \pm 1, \\ x \in \left\{0;\frac{2}{3}\right\}. \end{cases} \quad x \in \left\{0;\frac{2}{3}\right\}.$$

Відповідь: $x \in \left\{0;\frac{2}{3}\right\}$. *

7. Розв'язати рівняння $3x-4+\frac{8}{x-3}-\frac{8}{x-3}=x+2$.

* Після зведення подібних членів у лівій частині рівняння одержуємо рівняння $3x-4=x+2$, звідки $x=3$. Але $x=3$ не є коренем вихідного рівняння, отже, дане рівняння не має розв'язків. Відповідь: $x \in \varnothing$. *

Зауваження. Будьте обережними під час зведення подібних членів!

8. Розв'язати рівняння $\sin x + 2\cos x = -2$.

* Нехай $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Згідно з відомими формулами $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, дане рівняння можна записати в такий спосіб: $\frac{2z}{1+z^2}+\frac{2\left(1-z^2\right)}{1+z^2}=-2$, $2z+2-2z^2=-2-2z^2$, $z=-2$. Далі маємо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-2$ і $x=-2\operatorname{arctg}2+2\pi k$, $k \in Z$.

Начебто все гаразд, але на цьому ще рано ставити крапку. Неважко бачити, що $x = \pi$ є коренем вихідного рівняння. Отже, відбулася втрата коренів, що не можна компенсувати ніякою перевіркою. Про подібні ситуації ми ще будемо говорити під час розв'язання різного типу рівнянь. А зараз відмітимо, що в результаті запроваджених підстановок відбулося звуження області допустимих значень рівняння, адже $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ при $x = \pi$ не означений.

Наведемо інше розв'язання:

$$\sin x + 2\cos x = -2 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = -2\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} +$$

$$+ 4\cos^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2} = 0,\\ \sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2\pi k,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2\pi k,\\ x = 2\pi n - 2\operatorname{arctg}2;\end{array}\right. \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $x = \pi + 2\pi k$ або $x = 2\pi n - 2\operatorname{arctg}2$, $k, n \in \mathbf{Z}$. *

Вправи

1. Знайти область допустимих значень рівняння:

а) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+4} = 1$; б) $\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \frac{1}{x}$; в) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} = 2$; г) $\dfrac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}} = x$.

2. Довести теорему: якщо в системі рівнянь будь-яке рівняння замінити еквівалентним, одержиться система, рівносильна даній.

3. Довести теорему: якщо в сукупності рівнянь будь-яке рівняння замінити еквівалентним, одержиться сукупність рівнянь, рівносильна даній.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases}x^2 - 4x + 3 = 0,\\ |x-2| = 1,\\ 3x^3 - 4x^2 + 5x - 4 = 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x-1| + x = 3,\\ x^2 - 4 = 0,\\ x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2 - 1 = 0,\\ x^2 - 4 = 0,\\ x^3 + x^2 + x + 1 = 0.\end{cases}$

5. Розв'язати сукупність рівнянь:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 4x + 3 = 0,\\ |x-2| = 1,\\ 3x^3 - 4x^2 + 5x - 4 = 0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2 - 1 = 0,\\ x^2 - 4 = 0,\\ x^3 + x^2 + x + 1 = 0.\end{array}\right.$

6. Розв'язати змішану систему:

а) $\begin{cases}x^2 - 9 = 0,\\ |x-1| \le 2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2 - 5x + 4 = 0,\\ |x-1| > 1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}|x-3| = 3 - x,\\ \sqrt{x+1} > 1,\\ x^2 - 4 = 0.\end{cases}$

7. Чи є рівносильними рівняння:

а) $2\sqrt{x-1} = x+1$ і $4(x-1) = (x+1)^2$; б) $2\sqrt{x+3} = x-1$ і $4(x+3) = (x-1)^2$;

в) $2x + 2 + \frac{7}{3x+1} = 1 - x + \frac{7}{3x+1}$ і $2x + 2 = 1 - x$; г) $5 - 2x + \frac{3}{x-2} = 2 - x + \frac{3}{x-2}$ і $5 - 2x = 2 - x$;

д) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{2}$ і $\sqrt{x-2}\sqrt{x-3} = \sqrt{2}$; е) $\log_3 x^2 = 2$ і $\log_3 x = 1$?

8. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } \sqrt{1-x}\left(x^2+2x-3\right)=0; \quad \text{б) } \sqrt{x^2-5x+6}\,\sqrt{x-2{,}5}=0.$$

§ 2. Лінійні рівняння

2.1. *Лінійними* називаються рівняння виду $ax + b = 0$, де a і b — фіксовані дійсні числа. Зрозуміло, що

$$ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b. \tag{5.4}$$

Розглянемо всі можливі випадки розв'язування цих рівнянь:

а) $a \neq 0$, тоді $x=-\dfrac{b}{a}$ — єдиний розв'язок рівняння;

б) $a = b = 0$; рівняння (5.4) має вигляд $0x = 0$, воно має безліч розв'язків — його розв'язком є будь-яке дійсне число;

в) $a = 0$, $b \neq 0$, тоді рівняння (5.4) має вигляд $0x = -b$, таке рівняння розв'язків не має.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2x+1}{5}$.

$$\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2x+1}{5} \Leftrightarrow 30\left(\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\right)=30\frac{2x+1}{5} \Leftrightarrow 30\frac{3x+1}{6}=30\frac{2x+1}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(3x+1)=6(2x+1) \Leftrightarrow 15x+5=12x+6 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$ Відповідь: $x=\dfrac{1}{3}$ *

2. Розв'язати рівняння $a^2x + 2x + 1 = a + 3ax$.

* Це рівняння називається рівнянням з параметром a. Потрібно визначити, як залежить розв'язок рівняння від кожного допустимого значення параметра a.

Маємо $a^2x + 2x + 1 = a + 3ax \Leftrightarrow (a^2 - 3a + 2)x = a - 1$, що рівносильно рівнянню

$$(a-1)(a-2)x=a-1. \tag{П5.1}$$

Тепер розглянемо всі можливі випадки:

а) $a \neq 1$, $a \neq 2$, тоді $x=\dfrac{a-1}{(a-1)(a-2)}=\dfrac{1}{a-2}$;

б) $a = 1$, тоді рівняння (П5.1) має вигляд $0x = 0$, де розв'язком є довільне дійсне число;

в) $a = 2$, тоді рівняння (П5.1) має вигляд $0x = 1$, це рівняння розв'язків не має.

Відповідь: при $a \neq 1$, $a \neq 2$ $x=\dfrac{1}{a-2}$; при $a = 1$ $x \in \mathbf{R}$; при $a = 2$ $x \in \varnothing$. *

Розв'язання рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ — кусково-лінійна функція, зводиться до розв'язання сукупності змішаних систем, що містять лінійні рівняння.

Приклади

3. Розв'язати рівняння $|3x - 5| - x + 1 = 0$.

$$* \ |3x-5|-x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x<\frac{5}{3}, \\ 6-4x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x<\frac{5}{3}, \\ x=\frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}, \\ x=2. \end{cases}\right.\right.$$

$$\begin{cases} x\ge\frac{5}{3}, \\ 2x-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge\frac{5}{3}. \\ x=2 \end{cases}$$

Відповідь: $x\in\left\{\frac{3}{2};2\right\}$. *

4. Розв'язати рівняння $\big||x+1|-x\big|-2x+1=0$.

* Розглянемо два випадки:

а) x 1. тоді дане рівняння має вигляд

$$|-2x-1|-2x+1=0. \qquad (П5.2)$$

оскільки $x<-1$, то $-2x-1>0$. тоді з рівняння (П5.2) маємо $-2x-1-2x+1=0$, звідки $x=0$; але $x=0$ не задовольняє умову $x<-1$, отже, при $x<-1$ розв'язків немає;

б) $x\ge-1$, тоді задане рівняння має вигляд $|x+1-x|-2x+1=0$, або $2x=2$, $x=1$. Число $x=1$ задовольняє умову $x\ge-1$ і є єдиним розв'язком даного рівняння. Відповідь: $x=1$. *

Вправи

1. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{2x-4}{3}-\frac{x+1}{5}=2$; б) $\frac{4x-1}{5}+\frac{2x+1}{4}=\frac{x-1}{3}$; в) $6x-\frac{1-3x}{2}=\frac{2x+3}{3}$.

2. Розв'язати рівняння з параметром:

а) $a^2x+3=x+a+2a^2$; б) $\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $|1-4x|-2x+3=0$; б) $|x-1|+|x+2|-2x+1=0$; в) $\big||x-2|+x\big|-3x-1=0$.

§ 3. Квадратні рівняння

Квадратним називається рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де a, b, c — фіксовані дійсні числа, $a\ne0$.

3.1. Якщо хоч один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, квадратне рівняння називається *неповним*.

Розглянемо, як розв'язуються неповні квадратні рівняння:

а) якщо $c=0$, $b\ne0$, тоді $ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-\frac{b}{a}; \end{array}\right.$ отже, рівняння має два корені: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$;

б) якщо $b = 0$, $c \neq 0$, тоді $ax^2 + c = 0$, $x^2 = -\frac{c}{a}$, причому при $\frac{c}{a} > 0$ рівняння не має розв'язків, якщо ж $\frac{c}{a} < 0$, рівняння має два розв'язки: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

в) якщо $b = c = 0$, тоді $ax^2 = 0$ і $x = 0$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $4x^2 + x = 0$.

* $4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(4x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 4x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{4}; 0\right\}$. Відповідь: $x \in \left\{-\frac{1}{4}; 0\right\}$. *

2. Розв'язати рівняння $4x^2 - 1 = 0$.

* $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Відповідь: $x \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. *

3. Розв'язати рівняння $6x^2 + 5 = 0$.

* $6x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{5}{6}$. Відповідь: розв'язків немає. *

3.2. При дослідженні квадратного тричлена було доведено, що квадратне рівняння має два різних корені: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac > 0$. Якщо $D = 0$, то квадратне рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$. Нарешті, якщо $D < 0$, розв'язків немає.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $2x^2 - x - 2 = 0$.

* Послідовно знаходимо: $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2(-2) = 17 > 0$. Рівняння має два розв'язки: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$. Відповідь: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$. *

2. Розв'язати рівняння $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

* $a = 9$, $b = 6$, $c = 1$, $D = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$. Рівняння має один розв'язок $x = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $x = -\frac{1}{3}$.

3. Розв'язати рівняння $3x^2 - 2x + 1 = 0$.

* $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 < 0$. Рівняння не має розв'язків. Відповідь: розв'язків немає. *

4. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.

* Це рівняння не є квадратним, але зводиться до квадратного:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-3)x\left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x}\right) = (x-3)x \cdot 1\frac{1}{4}, \\ x \neq 3, \quad x \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + x - 3 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{15}{4}x, \\ x \neq 3, \quad x \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 - \frac{23}{4}x + 3 = 0, \\ x \neq 3, \quad x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 23x + 12 = 0, \\ x \neq 3, \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $5x^2 - 23x + 12 = 0$. Маємо $a = 5$. $b = -23$, $c = 12$, $D = (-23)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12 = 289$. Отже, $x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{23 \pm 17}{10}$, звідки $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{5}$. Маємо систему

$$\begin{cases} x = 4, \quad x = \frac{3}{5}, \\ x \neq 3, \quad x \neq 0, \end{cases}$$

звідки $x \in \left\{\frac{3}{5}; 4\right\}$. Відповідь: $x \in \left\{\frac{3}{5}; 4\right\}$. *

У випадку, коли середній коефіцієнт b — парне число, формула розв'язків квадратного рівняння спрощується. Нехай $ax^2 + 2dx + c = 0$, тоді

$$x_{1,2} = \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - ac}}{a}. \qquad (5.5)$$

Приклади

5. Розв'язати рівняння $9x^2 - 2x - 7 = 0$.

* Тут $a = 9$, $d = -1$, $c = -7$. За формулою (5.5) маємо $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 63}}{9} = \frac{1 \pm 8}{9}$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{7}{9}$. Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{7}{9}$. *

6. Розв'язати рівняння $\frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2}$.

* Це рівняння з параметром не є квадратним, але зводиться до квадратного. Область допустимих значень визначається умовами $x \neq 2$, $a \neq -1$. В області допустимих значень маємо $x^2 - 4 = 2(a+1)x - (a+1)^2$, або $x^2 - 2(a+1)x + (a+1)^2 - 4 = 0$, звідки $x_{1,2} = a + 1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - (a+1)^2 + 4} = a + 1 \pm 2$; отже, $x_1 = a + 3$, $x_2 = a - 1$. Згадаємо, що $x \neq 2$, таким чином, $a + 3 \neq 2$ і $a - 1 \neq 2$, звідки $a \neq -1$ і $a \neq 3$. При $a = 3$ дане рівняння має вигляд $\frac{x+2}{4} = \frac{2x-4}{x-2}$, звідки $\frac{x+2}{4} = 2$, $x = 6$. Відповідь: при $a \neq -1$, $a \neq 3$ рівняння має два розв'язки: $x = a + 3$ та $x = a - 1$; при $a = 3$ $x = 6$; при $a = -1$ рівняння втрачає сенс. *

3.3. Нехай квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має корені x_1 і x_2 (можливо, $x_1 = x_2$). Помітимо, що $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

У випадку, коли $x_1 = x_2 = x_0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. Многочлени $ax^2 + bx + c$ і $a(x - x_1)(x - x_2)$ тотожно рівні. Отже, $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right)$, звідки виходять рівності $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ та $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

З наведених міркувань випливає справедливість *теореми Вієта*: для того щоб числа x_1, x_2 були коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися рівності $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ та $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Зокрема, якщо x_1, x_2 — корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ і $x_1x_2 = q$.

Приклади

1. Знайти суму квадратів коренів рівняння $2x^2 \quad 4x - 1 = 0$.

* Нехай x_1, x_2 — корені даного рівняння (вони існують, бо $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \quad 0$). Згідно з теоремою Вієта, $x_1 + x_2 = 2$ і $x_1x_2 = \frac{1}{2}$. Тепер маємо $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Відповідь: 3. *

2. При яких значеннях параметрів p, q рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені p і q, якщо $pq \neq 0$?

* Згідно з теоремою Вієта, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} p + q = -p, \\ pq = q. \end{cases}$$

Враховуючи, що $pq \neq 0$, здобудемо значення цих параметрів: $p = 1$, $q = -2$.

Перевірка. Рівняння $x^2 + x - 2 = 0$ має корені $x = 1$ і $x = -2$. Відповідь: $p = 1$, $q = -2$. *

3. При якому значенні m корені x_1, x_2 рівняння $x^2 - 5x + m = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 3x_2 = 21$?

* Згідно з теоремою Вієта, $x_1 + x_2 = 5$. Маємо систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 21, \\ x_1 + x_2 = 5, \end{cases}$$

звідки $x_1 = -6$, $x_2 = 11$. Тепер, згідно з теоремою Вієта, одержимо $m = x_1x_2 = -66$. Відповідь: -66. *

4. Обчислити суму обернених величин коренів рівняння $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

* Нехай x_1, x_2 — корені даного рівняння. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$, $x_1x_2 = \frac{1}{2}$. Далі маємо $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5$. Відповідь: 5. *

5. При якому значенні параметра a різниця коренів рівняння $2x^2 + 4x + a = 0$ дорівнює 5?

* Нехай x_1, x_2 — корені даного рівняння і $x_1 > x_2$. Згідно з теоремою Вієта, $x_1 + x_2 = -2$. Маємо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ x_1 - x_2 = 5, \end{cases}$$

звідки $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$. За теоремою Вієта $\frac{a}{2} = \frac{3}{2}\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{21}{4}$, отже, $a = -\frac{21}{2}$.

Відповідь: $-10\frac{1}{2}$. *

6. Сума квадратів коренів рівняння $x^2 + px - 3 = 0$ дорівнює 10. Знайти p.

* Нехай x_1, x_2 — корені даного рівняння. Згідно з теоремою Вієта, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -3$. За умовою, $x_1^2 + x_2^2 = 10$. Отже, $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 + 6 = 10$, звідки $p = \pm 2$. Відповідь: $p \in \{-2; 2\}$. *

Зауваження. Дискримінант даного рівняння $D = p^2 + 12 > 0$, отже, корені існують при будь-якому p.

7. Скоротити дріб $\dfrac{-2n^2+5n+3}{2n^2+9n+4}$.

* Якщо x_1, x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Розкладемо чисельник і знаменник даного дробу на множники. Чисельник: $-2n^2 + 5n + 3 = 0$, $2n^2 - 5n - 3 = 0$, $n = \dfrac{5 \pm 7}{4}$: $n_1 = 3$, $n_2 = -\dfrac{1}{2}$. Отже, $-2n^2 + 5n + 3 = -2\left(n - 3\right)\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \left(3 - n\right)\left(2n + 1\right)$.

Знаменник: $2n^2 + 9n + 4 = 0$, $n = \dfrac{-9 \pm 7}{4}$: $n_1 = -4$, $n_2 = -\dfrac{1}{2}$. Отже, $2n^2 + 9n + 4 = 2\left(n + 4\right)\left(n + \dfrac{1}{2}\right) =$

$= (n + 4)(2n + 1)$. Тепер маємо $\dfrac{-2n^2+5n+3}{2n^2+9n+4} = \dfrac{\left(3-n\right)\left(2n+1\right)}{\left(n+4\right)\left(2n+1\right)} = \dfrac{3-n}{n+4}$. Відповідь: $\dfrac{3-n}{n+4}$. *

8. x_1 та x_2 — корені рівняння $3x^2 - 6x - 1 = 0$. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є числа $x_1 + 1$ та $x_2 + 1$.

* 1-й спосіб. Шукане рівняння має вигляд $(x - (x_1 + 1))(x - (x_2 + 1)) = 0$, або $x^2 - (x_1 + x_2 + 2)x + (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 0$, звідки

$$x^2 - \left(x_1 + x_2 + 2\right)x + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 0. \qquad (П5.3)$$

Згідно з теоремою Вієта, $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = -\dfrac{1}{3}$. Тепер із рівняння (П5.3) маємо $x^2 - 4x - \dfrac{1}{3} + 2 + 1 = 0$, або $x^2 - 4x + 2\dfrac{2}{3} = 0$. При бажанні одержати рівняння із цілими коефіцієнтами, домножимо обидві частини останнього рівняння на 3 і одержимо $3x^2 - 12x + 8 = 0$.

2-й спосіб. Якщо x_0 — корінь рівняння $f(x) = 0$, то $x_0 + 1$ — корінь рівняння $f(x - 1) = 0$. Отже, якщо x_1, x_2 — корені рівняння $3x^2 - 6x - 1 = 0$, то $x_1 + 1$, $x_2 + 1$ — корені рівняння $3(x - 1)^2 - 6(x - 1) - 1 = 0$, або $3x^2 - 12x + 8 = 0$. Відповідь: $3x^2 - 12x + 8 = 0$. *

9. x_1 та x_2 — корені рівняння $4x^2 - 7x - 1 = 0$. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є числа $\dfrac{1}{x_1}$ та $\dfrac{1}{x_2}$.

* 1-й спосіб. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \dfrac{7}{4}$, $x_1x_2 = -\dfrac{1}{4}$. Нехай шукане рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$, тоді

$$p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\left(\frac{7}{4} : \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = 7; \quad q = \frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2} = -4.$$

Отже, шукане рівняння $x^2 + 7x - 4 = 0$.

2-й спосіб. Якщо $x_0 \neq 0$ — корінь рівняння $f(x) = 0$, то $\dfrac{1}{x_0}$ — корінь рівняння $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Тому, якщо x_1, x_2 — корені рівняння $4x^2 - 7x - 1 = 0$, то $\dfrac{1}{x_1}$ та $\dfrac{1}{x_2}$ — корені рівняння $4\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 7\dfrac{1}{x} - 1 = 0$, або $4 - 7x - x^2 = 0$, або $x^2 + 7x - 4 = 0$. Відповідь: $x^2 + 7x - 4 = 0$. *

10. При якому значенні параметра a рівняння $x^2 + x + a = 0$ і $x^2 + ax + 1 = 0$ мають спільний корінь?

* 1-й спосіб. Нехай перше рівняння має корені x_0, x_1, а друге — x_0, x_2. Згідно з теоремою Вієта, маємо дві системи

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = -1, & \text{(П5.4)} \\ x_0 x_1 = a; & \text{(П5.5)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 + x_2 = -a, & \text{(П5.6)} \\ x_0 x_2 = 1. & \text{(П5.7)} \end{cases}$$

Ясно, що жодне з чисел x_0, x_1, x_2 не дорівнює нулю. Розділивши рівняння (П5.5) на рівняння (П5.7), маємо $\frac{x_1}{x_2} = a$. Віднявши від рівняння (П5.4) рівняння (П5.6), одержимо, що $x_1 - x_2 = a - 1$. Тепер маємо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a - 1, \\ \frac{x_1}{x_2} = a, \end{cases}$$

звідки

$$(a-1)x_2 = a - 1. \qquad \text{(П5.8)}$$

При $a = 1$ дані рівняння не мають коренів, отже, $a \neq 1$, і з рівняння (П5.8) одержуємо, що $x_2 = 1$. Тепер із рівняння (П5.7) маємо $x_0 = 1$, з рівняння (П5.4.) одержимо $x_1 = -2$, а з рівняння (П5.5) здобудемо $a = 1(-2) = -2$.

2-й спосіб. Нехай x_0 — спільний корінь даних рівнянь. Тоді $x_0^2 + x_0 + a = x_0^2 + ax_0 + 1$, звідки $(x_0 - 1)(1 - a) = 0$. Оскільки $a \neq 1$, то $x_0 = 1$. З рівності $x_0^2 + x_0 + a = 0$ маємо $1 + 1 + a = 0$ і a 2.

Перевірка. При $a = -2$ перше задане рівняння має корені 1 і –2, а друге — один корінь (або два однакових корені) — 1. Відповідь: при $a = -2$. *

У деяких випадках можна розв'язати квадратне рівняння усно.

Теорема. *Якщо* $a + b + c = 0$, *то квадратне рівняння* $ax^2 + bx + c = 0$ *має корені* $x_1 = 1$ і $x_2 = \frac{c}{a}$.

* Дійсно, $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 0$ (за умовою). Згідно з теоремою Вієта, $1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, звідки $x_2 = \frac{c}{a}$. *

Наприклад, рівняння $2x^2 - 7x + 5 = 0$ має корені $x_1 = 1$ (бо $2 - 7 + 5 = 0$) і (за теоремою Вієта) $x_2 = \frac{5}{2}$. Рівняння $4x^2 + 5x - 9 = 0$ має корені $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{9}{4}$. Рівняння $-6x^2 - x + 7 = 0$ має корені $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{7}{6}$.

3.4. Розглянемо ряд типових задач, пов'язаних із розв'язанням квадратних рівнянь з параметром.

Нехай корені x_1, x_2 рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ мають різні знаки. Тоді $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$, тобто коефіцієнти a і c мають різні знаки. Ця умова є необхідною і достатньою для того, щоб корені існували і мали різні знаки, бо $D = b^2 - 4ac > 0$, оскільки $ac < 0$. Ми довели теорему. *Для того щоб число 0 знаходилось між коренями рівняння* $ax^2 + bx + c = 0$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* $ac < 0$.

Розглянемо задачу, що узагальнює одержаний результат. З'ясуємо, за яких умов фіксоване число α знаходиться між коренями рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, тобто виконується умова

$$x_1 < \alpha < x_2. \tag{5.6}$$

З умови (5.6) випливає, що $x_1 - \alpha < 0 < x_2 - \alpha$. Нехай $y = x - \alpha$, або $x = y + \alpha$. Тоді $y_1 < 0 < y_2$, де y_1, y_2 — корені рівняння $a(y + \alpha)^2 + b(y + \alpha) + c = 0$, або $ay^2 + (2a\alpha + b)y + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. Як було з'ясовано раніше, для виконання умови $y_1 < 0 < y_2$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) < 0. \tag{5.7}$$

Приклади

1. Знайти всі значення параметра γ, при яких число γ знаходиться між коренями рівняння $x^2 + x + \gamma = 0$.

* Згідно з умовою (5.7) маємо $1(1\gamma^2 + 1\gamma + \gamma) < 0$, або $\gamma^2 + 2\gamma < 0$, звідки $-2 < \gamma < 0$. Відповідь: $\gamma \in (-2; 0)$. *

2. Знайти всі значення параметра a, при яких один із коренів рівняння $x^2 - 2ax - a = 0$ більший за 1, а інший — менший за 1.

* Згідно з умовою (5.7), маємо $1(1 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 - a) < 0$, або $1 - 3a < 0$, звідки $a > \frac{1}{3}$. Відповідь: $a > \frac{1}{3}$. *

3. Знайти всі значення a, при яких рівно один корінь рівняння $x^2 + 2(a - 1)x + 3a + 1 = 0$ задовольняє умову $x < -1$.

* Якщо рівняння має один корінь, то $D = 0$, тобто $4(a - 1)^2 - 4(3a + 1) = 0$, $a^2 - 5a = 0$; $a = 0$ або $a = 5$.

У разі $a = 0$ маємо $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$; у разі $a = 5$ маємо $x^2 + 8x + 16 = 0$, $x = -4 < -1$. Отже, $a = 5$ — одне з шуканих значень.

Якщо рівняння має два корені, то $x_1 < -1$, а $x_2 \geq -1$. Нехай $x_2 = -1$. тоді $(-1)^2 + 2(a - 1)(-1) + 3a + 1 = 0$, або $a = -4$. При $a = -4$ рівняння має вигляд $x^2 - 10x - 11 = 0$, звідки $x_2 = -1$, $x_1 = 11$, отже, $a = -4$ не підходить. Лишається розглянути випадок, коли $x_1 < -1 < x_2$. Тоді згідно з умовою (5.7) маємо $1(1(-1)^2 + 2(a - 1)(-1) + 3a + 1) < 0$, або $a < -4$. Відповідь: $a < -4$ або $a = 5$. *

Нехай обидва корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ різні і додатні. Маємо систему

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

або

$$\begin{cases} D > 0, \\ ab < 0, \\ ac > 0. \end{cases}$$

Ясно, що якщо виконується система (5.8), то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних додатних корені.

Приклади

4. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння $(a - 1)x^2 - 2ax + a - 3 = 0$ додатні і різні.

* Згідно із системою (5.8) маємо

$$\begin{cases} 4a^2 - 4(a+1)(a+3) > 0, \\ 2a(a+1) < 0, \\ (a+1)(a+3) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a + 3 < 0, \\ -1 < a < 0, \\ a < -3 \quad \text{або} \quad a > -1, \end{cases}$$

звідки $-1 < a < -\frac{3}{4}$. Відповідь: $a \in \left(-1; -\frac{3}{4}\right)$. *

5. Знайти всі a, при яких рівняння $x^2 - 2(a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0$ має два різних додатних корені.

* Згідно із системою (5.8) маємо

$$\begin{cases} 4(a-2)^2 - 4(a^2 - 2a - 3) > 0, \\ -2(a-2) < 0, \\ a^2 - 2a - 3 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < \frac{7}{2}, \\ a > 2, \\ a < -1 \quad \text{або} \quad a > 3, \end{cases}$$

звідки $3 < a < 3{,}5$. Відповідь: $a \in (3; 3{,}5)$. *

З'ясуємо, за яких умов обидва корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ різні і більші за деяке дійсне число α, тобто виконується умова $\alpha < x_1 < x_2$. Із цієї подвійної нерівності маємо, що $0 < x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$. Покладемо $y = x - \alpha$, тобто $x = y + \alpha$. Тоді $0 < y_1 < y_2$, де y_1, y_2 — корені рівняння $a(y+\alpha)^2 + b(y+\alpha) + c = 0$, або $ay^2 + (2a\alpha + b)y + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

Тепер згідно із системою (5.8) маємо

$$\begin{cases} (2a\alpha + b)^2 - 4a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0, \\ a(2a\alpha + b) < 0, \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

або

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ a(2a\alpha + b) < 0, \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0. \end{cases}$$

Приклади

6. Знайти всі значення параметра a, при яких обидва корені рівняння $x^2 + ax + a = 0$ різні і більші за 1.

* Згідно із системою (5.9) маємо

$$\begin{cases} a^2 - 4a > 0, \\ 1(2 \cdot 1 \cdot 1 + a) < 0, \\ 1(1 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + a) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \quad \text{або} \quad a > 4, \\ a < -2, \\ a > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язків немає. Відповідь: таких значень немає. *

7. При яких значеннях параметра b корені рівняння $(b+1)x^2 - 3bx + 4b = 0$ різні і обидва більші за 1?

* Згідно із системою (5.9) маємо

$$\begin{cases} 9b^2 - 16b(b+1) > 0, \\ (b+1)((b+1)\cdot 2\cdot 1 - 3b) < 0, \\ (b+1)((b+1)\cdot 1^2 - 3b\cdot 1 + 4b) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{16}{7} < b < 0, \\ b < -1 \quad \text{або} \quad b > 2, \\ b < -1 \quad \text{або} \quad b > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

звідки $-\frac{16}{7} < b < -1$. Відповідь: $b \in \left(-2\frac{2}{7}; -1\right)$. *

Нехай корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ різні і від'ємні, тобто $x_1 < x_2 < 0$. Тоді, враховуючи теорему Вієта, маємо систему

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0, \end{cases} \qquad (5.10)$$

$$\begin{cases} D > 0, \\ ab > 0, \\ ac > 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що при виконанні умов системи (5.10), рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних від'ємних корені.

Приклад

8. При яких значеннях a рівняння $ax^2 - x + a = 0$ має два різних від'ємних корені?

* Згідно із системою (5.10) маємо

$$\begin{cases} 1 - 4a^2 > 0, \\ -a > 0, \\ a^2 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}, \\ a < 0, \\ a \neq 0, \end{cases}$$

звідки $-\frac{1}{2} < a < 0$. Відповідь: при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. *

З'ясуємо, за яких умов обидва корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ різні і менші за деяке фіксоване число α, тобто виконується умова $x_1 < x_2 < \alpha$. Звідси маємо $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0$. Покладемо $y = x - \alpha$, або $x = y + \alpha$. Тоді $y_1 < y_2 < 0$, де y_1, y_2 — корені рівняння $a(y + \alpha)^2 + b(y + \alpha) + c = 0$, або $ay^2 + (2a\alpha + b)y + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

Тепер згідно з системою (5.10) маємо

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ a(2a\alpha + b) > 0, \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0. \end{cases} \qquad (5.11)$$

Приклад

9. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $ax^2 - (2a + 1)x - 3 = 0$ різні і менші за -1?

* Згідно із системою (5.11) маємо

$$\begin{cases}(2a+1)^2+12a>0,\\ a\left(-2a-(2a+1)\right)>0,\\ a\left(a+2a+1-3\right)>0;\end{cases}\quad\begin{cases}4a^2+16a+1>0,\\ a(4a+1)<0,\\ a(3a-2)>0,\end{cases}\quad\begin{cases}a<\dfrac{-4-\sqrt{15}}{2}\ \text{ або }\ a>\dfrac{-4+\sqrt{15}}{2},\\ -\dfrac{1}{4}<a<0,\\ a<0\ \text{ або }\ a>\dfrac{2}{3},\end{cases}$$

звідки $\dfrac{-4+\sqrt{15}}{2}<a<0$. Відповідь: при $a\in\left(\dfrac{-4+\sqrt{15}}{2};0\right)$. *

З'ясуємо, за яких умов обидва корені рівняння $ax^2+bx+c=0$ різні і належать проміжку $(\alpha;\beta)$, тобто $\alpha<x_1<x_2<\beta$. Ясно, що повинні виконуватися одночасно умови, що задаються системами (5.9) і (5.11), тобто виконується система нерівностей

$$\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ a(2a\alpha+b)<0,\\ a(2a\beta+b)>0,\\ a\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)>0,\\ a\left(a\beta^2+b\beta+c\right)>0.\end{cases}\qquad(5.12)$$

Приклади

10. При яких значеннях параметра a корені рівняння $ax^2-(a+1)x+2=0$ різні і менші по модулю за одиницю?

* Згідно з умовою, $-1<x_1<x_2<1$, тобто обидва корені знаходяться на проміжку $(-1;1)$. Згідно із системою (5.12) маємо

$$\begin{cases}(a+1)^2-8a>0,\\ a(-2a-a-1)<0,\\ a(2a-a-1)>0,\\ a\left(a+a+1+2\right)>0,\\ a\left(a-(a+1)+2\right)>0;\end{cases}\quad\begin{cases}a^2-6a+1>0,\\ a(3a+1)>0,\\ a(a-1)>0,\\ a(2a+3)>0,\\ a>0,\end{cases}\quad\begin{cases}a<3-2\sqrt{2}\ \text{ або }\ a>3+2\sqrt{2},\\ a<-\dfrac{1}{3}\ \text{ або }\ a>0,\\ a<0\ \text{ або }\ a>1,\\ a<-\dfrac{3}{2}\ \text{ або }\ a>0,\\ a>0,\end{cases}$$

звідки $a>3+2\sqrt{2}$. Відповідь: якщо $a>3+2\sqrt{2}$. *

11. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння $x^2-2ax+a^2-1=0$ різні і знаходяться на проміжку $(-2;4)$.

* Згідно із системою (5.12) маємо

$$\begin{cases}4a^2-4\left(a^2-1\right)>0,\\ -4-2a<0,\\ 8-2a>0,\\ 4-2a(-2)+a^2-1>0,\\ 16-8a+a^2-1>0,\end{cases}\quad\begin{cases}4>0,\\ a>-2,\\ a<4,\\ a^2+4a+3>0,\\ a^2-8a+15>0,\end{cases}\quad\begin{cases}-2<a<4,\\ a<-3\ \text{ або }\ a>-1,\\ a<3\ \text{ або }\ a>5.\end{cases}$$

звідки $-1<a<3$. Відповідь: $a\in(-1;3)$. *

З'ясуємо питання, за яких умов лише менший корінь рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ належить проміжку $(\alpha; \beta)$, тобто $\alpha < x_1 < \beta < x_2$. У цьому разі повинні одночасно виконуватися умови (5.7) і (5.9):

$$\begin{cases} a(a\beta^2 + b\beta + c) < 0, \\ b^2 - 4ac > 0, \\ a(2a\alpha + b) < 0, \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0. \end{cases}$$

З чотирьох нерівностей одержаної системи дві (а саме — $b^2 - 4ac > 0$ та $a(2a\alpha + b) < 0$) випливають із двох інших, тобто досить взяти систему

$$\begin{cases} a(a\beta^2 + b\beta + c) < 0, \\ a(a\alpha^2 + b\alpha + c) > 0. \end{cases} \qquad (5.13)$$

Дійсно, якщо $a(a\beta^2 + b\beta + c) < 0$, то $\left(a\beta + \frac{b}{2}\right)^2 < \frac{b^2 - 4ac}{4}$, отже, $b^2 - 4ac > 0$. Далі, із системи (5.13) випливає, що $a(a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha)) < 0$, або $a^2(\beta + \alpha) + ab < 0$ (бо $\beta - \alpha > 0$). Оскільки $2\alpha < \alpha + \beta$, то $a(2a\alpha + b) = a^2 \cdot 2\alpha + ab < a^2(\beta + \alpha) + ab < 0$ і $a(2a\alpha + b) < 0$.

Приклад

12. При якому значенні параметра a лише менший корінь рівняння $2x^2 - 3ax + 4 = 0$ знаходиться на проміжку $(0; 2)$?

* Згідно із системою (5.13) маємо

$$\begin{cases} 2(2 \cdot 4 - 3a \cdot 2 + 4) < 0, \\ 2(2 \cdot 0 - 3a \cdot 0 + 4) > 0, \end{cases}$$

звідки $a > 2$. Відповідь: при $a > 2$. *

З'ясуємо питання, за яких умов лише більший корінь рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ належить проміжку $(\alpha; \beta)$, тобто $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$. Міркуючи, як у попередньому випадку, одержимо систему нерівностей

$$\begin{cases} a(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0, \\ a(a\beta^2 + b\beta + c) > 0. \end{cases} \qquad (5.14)$$

Приклад

13. При яких значеннях параметра a лише більший корінь рівняння $ax^2 - 2ax - 3 = 0$ знаходиться на проміжку $(2; 4)$?

* Згідно із системою (5.14) маємо

$$\begin{cases} a(4a - 4a - 3) < 0, \\ a(16a - 8a - 3) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3a < 0, \\ a(8a - 3) > 0. \end{cases}$$

звідки $a > \frac{3}{8}$. Відповідь: при $a > \frac{3}{8}$. *

Тепер з'ясуємо, за яких умов обидва різних корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходяться зовні даного проміжку $[\alpha; \beta]$ — по різні боки від нього, тобто $x_1 < \alpha < \beta < x_2$.

Враховуючи двічі умову (5.7), маємо систему

$$\begin{cases} a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) < 0, \\ a\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) < 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Приклад

14. При яких значеннях параметра a обидва різних корені рівняння $ax^2 - 3x + a - 5 = 0$ задовольняють умову $x_1 < -1 < 1 < x_2$?

* Згідно з умовою (5.15) маємо

$$\begin{cases} a\left(a + 3 + a - 5\right) < 0, \\ a\left(a - 3 + a - 5\right) < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a\left(2a - 2\right) < 0, \\ a\left(2a - 8\right) < 0. \end{cases}$$

звідки $0 < a < 1$. Відповідь: при $a \in (0; 1)$. *

У табл. 5.1 показано умови, яким задовольняють параметри a, b, c залежно від розташування коренів квадратного рівняння.

Таблиця 5.1

№	Розташування коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Умови, накладені на параметри a, b, c
1	$\alpha < x_1 < x_2$	$\begin{cases} a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) > 0, \\ b^2 - 4ac > 0, \\ a\left(2a\alpha + b\right) < 0 \end{cases}$
2	$x_1 < x_2 < \alpha$	$\begin{cases} a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) > 0, \\ b^2 - 4ac > 0, \\ a\left(2a\alpha + b\right) > 0 \end{cases}$
3	$\alpha < x_1 < x_2 < \beta$	$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ a\left(2a\alpha + b\right) < 0, \\ a\left(2a\beta + b\right) > 0, \\ a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) > 0, \\ a\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) > 0 \end{cases}$
4	$\alpha < x_1 < \beta < x_2$	$\begin{cases} a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) > 0, \\ a\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) < 0 \end{cases}$
5	$x_1 < \alpha < x_2 < \beta$	$\begin{cases} a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) < 0, \\ a\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) > 0 \end{cases}$
6	$x_1 < \alpha < x_2$	$a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) < 0$
7	$x_1 < \alpha < \beta < x_2$	$\begin{cases} a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) < 0, \\ a\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) < 0 \end{cases}$

Слід зазначити, що ті самі результати можна одержати за допомогою графічної ілюстрації. З'ясуємо, наприклад, які умови накладаються на коефіцієнти a, b, c, якщо корені

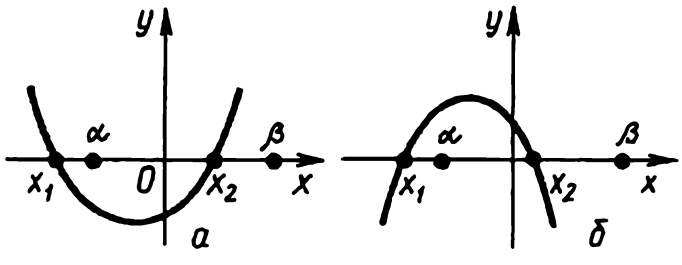


Рис. 5.1

рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ задовольняють умову $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$. Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Розглядуваному випадку відповідають два положення графіка функції $f(x)$ (рис. 5.1). Якщо $a > 0$ (рис. 5.1,*а*), то $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ і $a \cdot f(\alpha) < 0$, $a \cdot f(\beta) > 0$. Якщо $a < 0$ (рис. 5.1,*б*), то $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) < 0$ і знову $a \cdot f(\alpha) < 0$, $a \cdot f(\beta) > 0$. Отже, маємо систему

$$\begin{cases} a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) < 0, \\ a\left(a\beta^2 + b\beta + c\right) > 0. \end{cases}$$

Приклад

15. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння $(a + 1)x^2 - ax + a = 0$ мають різні знаки і кожен по модулю менший ніж 2.

* Згідно з умовою маємо $-2 < x_1 < 0 < x_2 < 2$. Отже, повинні виконуватись одночасно нерівності $-2 < x_1 < 0 < x_2$ та $x_1 < 0 < x_2 < 2$. Використовуючи позиції 4 і 5 табл. 5.1, маємо систему

$$\begin{cases} (a+1)\left(4(a+1) + 2a + a\right) > 0, \\ (a+1)a < 0, \\ (a+1)\left(4(a+1) - 2a + a\right) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (a+1)(7a+4) > 0, \\ (a+1)a < 0, \\ (a+1)(3a+4) > 0, \end{cases}$$

звідки $-\frac{4}{7} < a < 0$. Відповідь: $a \in \left(-\frac{4}{7}; 0\right)$. *

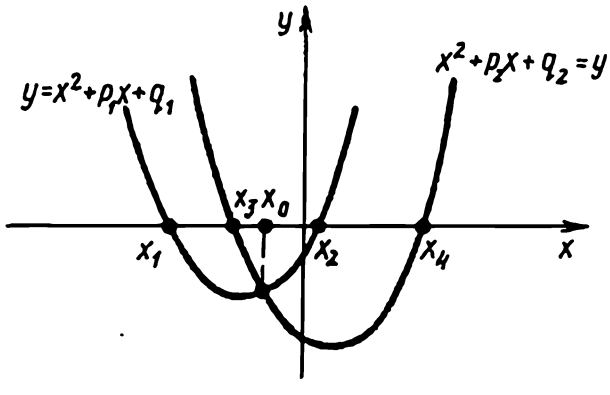


Рис. 5.2

З'ясуємо питання про взаємне розташування коренів двох квадратних рівнянь.

Нехай рівняння $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ має корені x_1, x_2, а рівняння $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ має корені x_3, x_4, причому $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$. У цьому випадку кажуть, що корені рівнянь перемежовуються.

На рис. 5.2 показано взаємне розташування графіків цих функцій. Графіки мають єдину точку перетину з абсцисою x_0. Очевидно, що $x_0^2 + p_1x_0 + q_1 = x_0^2 + p_2x_0 + q_2$, звідки $x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$. (Відмітимо, що при $p_1 = p_2$ графіки співпадають або не перетинаються.) Нехай $f(x) = x^2 + p_1x + q_1$, тоді $f(x_0) < 0$, або $\frac{(q_2 - q_1)^2}{(p_1 - p_2)^2} + p_1\frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} + q_1 < 0$. звідки

$$(q_2 - q_1)^2 + p_1(p_1 - p_2)(q_2 - q_1) + q_1(p_1 - p_2)^2 < 0. \qquad (5.16)$$

Приклад

16. При яких значеннях параметра a корені рівнянь $x^2+\frac{8}{a}x-2a=0$ та $x^2+\frac{6}{a}x-a=0$ перемежовуються?

* У даному випадку $p_1=\frac{8}{a}$, $q_1=-2a$, $p_2=\frac{6}{a}$, $q_2=-a$. З нерівності (5.16) одержуємо, що $\left(-a+2a\right)^2+\frac{8}{a}\left(\frac{8}{a}-\frac{6}{a}\right)\left(-a+2a\right)-2a\left(\frac{8}{a}-\frac{6}{a}\right)^2<0$, або $a^2+\frac{16}{a}-\frac{8}{a}<0$, $\frac{a^3+8}{a}<0$, звідки $-2<a<0$. Відповідь: при $a\in(-2;0)$. *

Нехай є два зведених квадратних рівняння $x^2+p_1x+q_1=0$ та $x^2+p_2x+q_2=0$ з додатними дискримінантами. З'ясуємо, за яких умов ці рівняння мають хоч один спільний корінь. Нехай рівняння $x^2+p_1x+q_1=0$ має корені x_1, x_2. Для того щоб ці два рівняння мали хоч один спільний корінь, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\left(x_1^2+p_2x_1+q_2\right)\left(x_2^2+p_2x_2+q_2\right)=0$. Звідси маємо

$$\left(x_1^2+p_1x_1+q_1-p_1x_1-q_1+p_2x_1+q_2\right)\left(x_2^2+p_1x_2+q_1-p_1x_2-q_1+p_2x_2+q_2\right)=0,$$

$$\left(-p_1x_1-q_1+p_2x_1+q_2\right)\left(-p_1x_2-q_1+p_2x_2+q_2\right)=0,$$

$$\left(\left(p_2-p_1\right)x_1+q_2-q_1\right)\left(\left(p_2-p_1\right)x_2+q_2-q_1\right)=0,$$

нарешті
$$\left(p_2-p_1\right)^2x_1x_2+\left(q_2-q_1\right)\left(p_2-p_1\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(q_2-q_1\right)^2=0. \qquad (5.17)$$

Згідно з теоремою Вієта, $x_1+x_2=-p_1$, $x_1x_2=q_1$. З рівності (5.17) одержуємо $(p_2-p_1)^2x_1x_2-(q_2-q_1)(p_2-p_1)p_1+(q_2-q_1)^2=0$, звідки $(q_2-q_1)^2=(p_2-p_1)((q_2-q_1)p_1-(p_2-p_1)q_1)=(p_2-p_1)(p_1q_2-p_2q_1)$. Отже, шукана умова має такий вигляд:

$$\left(q_2-q_1\right)^2=\left(p_2-p_1\right)\left(p_1q_2-p_2q_1\right). \qquad (5.18)$$

Приклади

17. При яких значеннях параметра a рівняння $2x^2-ax-1=0$ та $x^2+2x-3a=0$ мають хоч один спільний корінь?

* Запишемо перше рівняння у вигляді $x^2-\frac{a}{2}x-\frac{1}{2}=0$. Маємо $p_1=-\frac{a}{2}$, $q_1=-\frac{1}{2}$, $p_2=2$, $q_2=-3a$. Згідно з умовою (5.18) маємо $\left(-3a+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{3}{2}a^2+1\right)$, звідки $3a^3-24a^2+14a+7=0$, $3a^3-3a^2-21a^2+21a-7a+7=0$, $3a^2(a-1)-21a(a-1)-7(a-1)=0$, $(a-1)(3a^2-21a-7)=0$. Отже, $a_1=1$, $a_{2,3}=\frac{21\pm5\sqrt{21}}{6}$. Відповідь: при $a\in\left\{1;\frac{21-5\sqrt{21}}{6};\frac{21+5\sqrt{21}}{6}\right\}$. *

18. Знайти всі значення параметра a, для кожного з яких корені рівняння $x^2+3x+2a=0$ знаходяться між коренями рівняння $x^2+6x+5a=0$.

* Нехай x_1, x_2 — корені рівняння $x^2 + 3x + 2a = 0$ і $x_1 < x_2$. З позиції 7 табл. 5.1 одержуємо систему

$$\begin{cases} 9 - 8a \ge 0, \\ x_1^2 + 6x_1 + 5a < 0, \\ x_2^2 + 6x_2 + 5a < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ a < \dfrac{-x_1^2 - 6x_1}{5}, \\ a < \dfrac{-x_2^2 - 6x_2}{5}. \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ a < \dfrac{\left(-x_1^2 + 3x_1\right) - 3x_1}{5}, \\ a < \dfrac{\left(-x_2^2 + 3x_2\right) - 3x_2}{5}. \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ a < \dfrac{2a - 3x_1}{5}, \\ a < \dfrac{2a - 3x_2}{5}. \end{cases}$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то $\dfrac{2a - 3x_1}{5} > \dfrac{2a - 3x_2}{5}$, отже, маємо систему

$$\begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ a < \dfrac{2a - 3x_2}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ a < -x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ a < \dfrac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ \sqrt{9 - 8a} < 3 - 2a, \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 1\frac{1}{8}, \\ 4a^2 - 4a > 0, \end{cases}$$

звідки $a < 0$ або $1 < a < 1\frac{1}{8}$. Відповідь: $a \in (-\infty; 0) \cup \left(1; 1\frac{1}{8}\right]$. *

Вправи

1. Розв'язати рівняння:

а) $2x^2 - 7x = 0$; б) $4x^2 - 5x = 0$; в) $3x^2 - x = 0$; г) $6x^2 + 10x = 0$; д) $3x^2 - 2 = 0$;

е) $10x^2 - 1 = 0$; є) $7x^2 - 2 = 0$; ж) $4x^2 - 5 = 0$; з) $7x^2 + 3 = 0$; и) $4x^2 + 1 = 0$;

і) $5x^2 + 2 = 0$; ї) $x^2 + 4 = 0$; й) $5x^2 + x - 4 = 0$; к) $3x^2 - x - 1 = 0$; л) $x^2 + 10x - 2 = 0$;

м) $4x^2 - 2x - 3 = 0$; н) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; о) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; п) $3x^2 - 6x + 3 = 0$;

р) $3x^2 - \sqrt{3}x + \dfrac{1}{4} = 0$; с) $x^2 + x + 1 = 0$; т) $2x^2 - x + 2 = 0$; у) $-4x^2 + 2x - 1 = 0$;

ф) $-5x^2 + 3x - 2 = 0$; х) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3} = 1\dfrac{1}{6}$; ц) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{5-x} = 1$; ч) $\dfrac{4}{2x-1} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{x+2}$;

ш) $\dfrac{5}{x+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{x+2}$; щ) $\dfrac{x-1}{a-1} = \dfrac{x+a-1}{x+1}$.

2. При яких значеннях параметра c рівняння $x^2 - 4x + c = 0$ має два корені, один корінь, не має коренів?

3. Довести, що при будь-якому дійсному значенні a рівняння $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$ має дійсні корені.

4. Довести, що при будь-якому дійсному значенні a рівняння $(a - 2)x^2 + ax + 1 = 0$ має дійсні корені.

5. Довести, що при будь-яких дійсних значеннях a, b, c рівняння $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ має дійсні корені.

6. Довести, що при $k > 0$ рівняння $\left(k + \dfrac{1}{k}\right)x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$ не має дійсних коренів.

7. Дано два квадратних рівняння: $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ та $x^2 + p_2x + q_2 = 0$, причому $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Довести, що хоч одне із цих рівнянь має дійсні корені.

8. Знайти суму квадратів коренів рівняння $3x^2 - x - 1 = 0$.

9. При якому значенні s корені x_1, x_2 рівняння $x^2 - 4x + s = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 3x_2 = 10$?

10. При якому значенні параметра a корені x_1, x_2 рівняння $2x^2 - 5x + a = 0$ задовольняють умову $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = 3$?

11. При якому значенні b корені x_1, x_2 рівняння $3x^2 - 4x + b = 0$ задовольняють умову $(x_1 + 2x_2)(2x_1 + x_2) = 2$?

12. Скоротити дріб:

а) $\dfrac{n^2 - n - 2}{n^2 + 6n + 5}$: б) $\dfrac{6 - n - n^2}{n^2 - 7n + 10}$:

в) $\dfrac{7n - n^2 - 12}{n^2 - 3n - 4}$: г) $\dfrac{n^2 - 12n + 20}{n^2 + n - 6}$.

13. Дано: x_1 та x_2 — корені рівняння $5x^2 - 7x - 2 = 0$. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є числа $(x_1 - 2)$ та $(x_2 - 2)$.

14. Дано: x_1 та x_2 — корені рівняння $5x^2 - 6x - 2 = 0$. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів даного рівняння.

15. Розв'язати усно рівняння: а) $4x^2 - x - 3 = 0$; б) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; в) $x^2 - 9x + 8 = 0$; г) $5x^2 - 7x + 2 = 0$.

16. При яких значеннях параметра a число 1 знаходиться між коренями рівняння $x^2 - a^2x + a = 0$?

17. При яких значеннях a корені рівняння $(a + 2)x^2 - 2ax + 3a = 0$ різні і додатні?

18. При яких значеннях a корені квадратного рівняння $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ більші за 1/2?

19. При яких значеннях a корені рівняння $3ax^2 - 2x + a = 0$ різні і від'ємні?

20. При яких значеннях a обидва корені рівняння $x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$ менші ніж -1?

21. Чи існують такі значення параметра a, при яких обидва корені рівняння $x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$ різні і знаходяться на інтервалі $(-1; 1)$?

22. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $x^2 - 2ax - 1 = 0$ не більші ніж 2?

23. Чи існує таке значення a, при якому лише менший корінь рівняння $x^2 - 2ax - 1 = 0$ знаходиться на проміжку $(1; 3)$?

24. При яких значеннях параметра a тільки більший корінь рівняння $(a + 2)x^2 - 3ax - 1 = 0$ знаходиться на проміжку $(2; 3)$?

25. При яких значеннях параметра a корені x_1, x_2 рівняння $(a + 1)x^2 - 2x + a - 2 = 0$ задовольняють умові $x_1 < 0 < 2 < x_2$?

26. При яких значеннях a корені рівнянь $3x^2 - 5ax + a = 0$ та $x^2 - 2ax - a = 0$ перемежовуються?

27. При яких значеннях a рівняння $3x^2 - (a + 1)x - 1 = 0$, $x^2 + 3x - 4a = 0$ мають хоч один спільний корінь?

§ 4. Рівняння вищих степенів

4.1. *Рівнянням вищого степеня* називається рівняння виду $F(x) = 0$, де $F(x)$ — многочлен, вищий другого степеня. Під час вивчення теми 3 ми розглянули випадок, коли коефіцієнти многочлена $F(x)$ — раціональні числа. Було показано, як відшукати всі раціональні корені такого многочлена. Задача відшукання всіх дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами не є елементарною і розглядається в курсі вищої алгебри. Ми розглянемо деякі випадки, коли можна знайти всі дійсні корені многочлена з дійсними коефіцієнтами.

Двочленним називається рівняння виду $ax^n + b = 0$, де $ab \neq 0$. З цього рівняння маємо $x^n = -\dfrac{b}{a}$. Тепер можливі такі випадки:

а) n — непарне число (нагадаємо, що $n \geq 3$), тоді $x = \sqrt[n]{-\dfrac{b}{a}}$ (єдиний розв'язок);

б) n — парне число, тоді $x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ (два розв'язки), якщо $\frac{b}{a} < 0$; якщо ж $\frac{b}{a} > 0$, розв'язків немає.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $6x^3 + 2 = 0$.

* $x^3 = -\frac{1}{3}$, $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Відповідь: $-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. *

2. Розв'язати рівняння $2x^4 - 5 = 0$.

* $x^4 = \frac{5}{2}$, $x = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$. Відповідь: $x \in \left\{-\sqrt[4]{\frac{5}{2}}; \sqrt[4]{\frac{5}{2}}\right\}$. *

3. Розв'язати рівняння $5x^6 + 2 = 0$.

* Розв'язків немає, бо ліва частина рівняння додатна. *

Тричленним називається рівняння виду $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, де $abc \neq 0$, $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$. Щоб розв'язати таке рівняння, за допомогою підстановки $x^n = z$ спочатку одержуємо квадратне рівняння $az^2 + bz + c = 0$, а далі діємо відповідно до того, скільки коренів має це квадратне рівняння.

Приклади

4. Розв'язати рівняння $x^{12} - 5x^6 + 6 = 0$.

* Нехай $x^6 = y$, тоді $y^2 - 5y + 6 = 0$, звідки $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Ми одержали два випадки: а) $x^6 = 2$, $x = \pm\sqrt[6]{2}$; б) $x^6 = 3$, $x = \pm\sqrt[6]{3}$; Відповідь: $x \in \left\{-\sqrt[6]{3}; -\sqrt[6]{2}; \sqrt[6]{2}; \sqrt[6]{3}\right\}$. *

5. Розв'язати рівняння $x^{20} + 3x^{10} - 4 = 0$.

* Нехай $x^{10} = y$, тоді $y^2 + 3y - 4 = 0$, звідки $y_1 = 1$, $y_2 = -4$. Маємо два випадки: а) $x^{10} = 1$, $x = \pm\sqrt[10]{1} = \pm 1$; б) $x^{10} = -4$, розв'язків немає. Відповідь: $x \in \{-1; 1\}$. *

6. Розв'язати рівняння $x^6 + 4x^3 - 5 = 0$.

* Нехай $x^3 = z$, тоді $z^2 + 4z - 5 = 0$, звідки $z_1 = 1$, $z_2 = -5$. Далі розглянемо такі два випадки: а) $x^3 = 1$, $x = 1$; б) $x^3 = -5$, $x = \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$. Відповідь: $x \in \left\{-\sqrt[3]{5}; 1\right\}$. *

7. Розв'язати рівняння $x^{10} + 2x^5 + 1 = 0$.

* Нехай $x^5 = z$, тоді $z^2 + 2z + 1 = 0$, $(z + 1)^2 = 0$, $z = -1$, звідки $x^5 = -1$, $x = \sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -1$. Відповідь: $x = -1$. *

8. Розв'язати рівняння $2x^8 + 7x^4 + 3 = 0$.

* Розв'язків немає, бо ліва частина додатна. *

При $n = 2$ тричленне рівняння має вигляд $ax^4 + bx^2 + c = 0$ і називається *біквадратним*. За допомогою підстановки $x^2 = y$ воно зводиться до квадратного рівняння.

Приклад

9. При яких значеннях параметра a біквадратне рівняння $(a - 1)x^4 - x^2 + a = 0$ має чотири розв'язки?

* Нехай $x^2 = y$, тоді $(a + 1)y^2 - y + a = 0$. Для того щоб вихідне рівняння мало чотири розв'язки, необхідно і достатньо, щоб одержане квадратне рівняння мало два різних додатних корені. Приходимо до системи нерівностей

$$\begin{cases}(-1)^2-4a(a+1)>0,\\ a+1\\ a>0,\\ a+1\\ (-1)<0.\end{cases}\qquad\begin{cases}4a^2+4a-1<0,\\ a>0,\end{cases}$$

звідки $0<a<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. Відповідь: $a\in\left(0;\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. *

4.2. *Симетричним* називається рівняння виду $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+$ $+a_1x+a_0=0$, $a_0\neq 0$. У лівій частині рівняння коефіцієнти, симетричні відносно «середини» многочлена, рівні між собою. Точніше кажучи, $a_k=a_{n-k}$. Розрізняють два випадки:

А. $n=2k$ (n — парне число), тоді ліва частина містить $2k+1$ доданок. Методику розв'язання таких рівнянь покажемо на характерних прикладах.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $x^4-4x^3-3x^2-4x-1=0$.

* Помітимо, що $x=0$ не є коренем цього рівняння, отже, розділивши обидві частини рівняння на x^2, одержимо рівняння $x^2-4x+3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$, рівносильне даному. Далі маємо

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0. \qquad (П5.9)$$

Нехай $x+\dfrac{1}{x}=y$, тоді $y^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$ і $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. Рівняння (П5.9) набуває вигляду $y^2-2-4y+3=0$, або $y^2-4y+1=0$, звідки $y_1=2-\sqrt{3}$, $y_2=2+\sqrt{3}$. Тепер маємо два випадки:

а) $x+\dfrac{1}{x}=2-\sqrt{3}$, $x^2-\left(2-\sqrt{3}\right)x+1=0$, отже, розв'язків немає;

б) $x+\dfrac{1}{x}=2+\sqrt{3}$, $x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+1=0$, звідки $x_{1,2}=\dfrac{2+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $x=\dfrac{2+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$. *

2. Розв'язати рівняння $x^6-2x^5-2x^4+2x^3-2x^2-2x+1=0$.

* Помітимо, що $x=0$ не є коренем рівняння. Розділимо обидві частини рівняння на x^3 і одержимо рівняння $x^3-2x^2-2x+2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=0$, рівносильне даному. Далі

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0. \qquad (П5.10)$$

Покладемо $x+\dfrac{1}{x}=y$ і отримаємо $y^3=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, звідки $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$ $=y^3-3y$. Крім того, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. Рівняння (П5.10) приймає вигляд $y^3-3y-2(y^2-2)-$ $-2y+2=0$, або $y^3-2y^2-5y+6=0$, звідки $y^3-3y^2+y^2-3y-2y+6=0$, $y^2(y-3)+y(y-3)-2(y-$ $-3)=0$, $(y-3)(y^2+y-2)=0$. Отже, $y_1=3$, $y_2=1$, $y_3=-2$. Тепер маємо три випадки:

а) $x+\frac{1}{x}=3$, $x^2-3x+1=0$, звідки $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;

б) $x+\frac{1}{x}=1$, $x^2-x+1=0$, розв'язків немає;

в) $x+\frac{1}{x}=-2$, $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$, звідки $x=-1$.

Відповідь: $x\in\left\{-1;\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$. *

Б. $n=2k+1$ (n — непарне число), тоді ліва частина рівняння містить $2k+2$ доданки. Неважко бачити, що це рівняння має корінь $x=-1$. Рівняння можна подати у вигляді $(x+1)\cdot F_1(x)=0$, де $F_1(x)=0$ — симетричне рівняння парного степеня, що було розглянуто в попередньому пункті А.

Приклади

3. Розв'язати рівняння $2x^3-3x^2-3x+2=0$.

* $(2x^3+2)-(3x^2+3x)=0$, $2(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$, $(x+1)(2x^2-5x+2)=0$, звідки $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=2$. Відповідь: $x\in\left\{-1;\frac{1}{2};2\right\}$. *

4. Розв'язати рівняння $x^5+4x^4-x^3-x^2+4x+1=0$.

* $(x+1)(x^4+3x^3-4x^2+3x+1)=0$, звідки $x_1=-1$. Далі маємо симетричне рівняння парного степеня $x^4+3x^3-4x^2+3x+1=0$, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$. Поклавши $x+\frac{1}{x}=y$, маємо $y^2-2+3y-4=0$, $y^2+3y-6=0$, звідки $y=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$. Тепер маємо два випадки:

а) $x+\frac{1}{x}=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}$, $x^2+\frac{3+\sqrt{33}}{2}x+1=0$, тоді $x_{2,3}=\frac{-3-\sqrt{33}\pm\sqrt{26+6\sqrt{33}}}{4}$;

б) $x+\frac{1}{x}=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$, $x^2+\frac{3-\sqrt{33}}{2}x+1=0$, тоді розв'язків немає.

Відповідь: $x\in\left\{-1;\frac{-3-\sqrt{33}-\sqrt{26+6\sqrt{33}}}{4};\frac{-3-\sqrt{33}+\sqrt{26+6\sqrt{33}}}{4}\right\}$. *

5. Розв'язати рівняння $x^4-2x^3+x^2+2x-1=0$.

* Це рівняння не є симетричним. Зробимо підстановку $y=x-1$ за допомогою схеми Горнера:

	1	-2	1	2	-1
1	1	-1	0	2	1
1	1	0	0	2	
1	1	1	1		
1	1	2			
	1				

Одержимо симетричне рівняння $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y + 1 = 0$. Розділивши обидві частини рівняння на $y^2 \neq 0$, маємо $\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 2\left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0$.

Нехай $y + \frac{1}{y} = z$. тоді $y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$, і рівняння набуває вигляду $z^2 + 2z - 1 = 0$, звідки $z = -1 \pm \sqrt{2}$. Тепер маємо два випадки:

а) якщо $z = -1 + \sqrt{2}$, то $y + \frac{1}{y} = \sqrt{2} - 1$, $y^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)y + 1 = 0$, у цьому разі розв'язків немає:

б) якщо $z = -1 - \sqrt{2}$, то $y + \frac{1}{y} = -1 - \sqrt{2}$, $y^2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)y + 1 = 0$, у цьому разі $y = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)$.

Отже, $x = y + 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)$. Відповідь: $x = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)$. *

6. Розв'язати рівняння $x^2(x + 1)^4(x + 2)^2 + 2(x + 1)^2 = 1$.

* Маємо $(x + 1)^4((x + 1)^2 - 1)^2 + 2(x + 1)^2 - 1 = 0$, $(x + 1)^8 - 2(x + 1)^6 + (x + 1)^4 + 2(x + 1)^2 - 1 = 0$. Покладемо $(x + 1)^2 = y \geq 0$. Тоді $y^4 - 2y^3 + y^2 + 2y - 1 = 0$. Ми одержали рівняння із прикладу 5 з п.4.2 цього параграфа. Враховуючи, що $y \geq 0$, маємо $y = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)$, звідки $(x + 1)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)$, $x = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)}$. Відповідь: $x = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\right)}$. *

4.3. *Зворотним* називається рівняння виду

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \ldots + a_nx^{n+1} + \lambda a_nx^n + \lambda^3 a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\lambda^{2n+1} = 0 \quad (5.19)$$

або

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \lambda^n a_0 = 0, \quad (5.20)$$

де $a_0 \neq 0$; λ — фіксоване дійсне число. Якщо $\lambda = 1$, то формули (5.19) і (5.20) є симетричними рівняннями відповідно непарного і парного степеня. Рівняння (5.19) можна записати у вигляді

$$a_0\left(x^{2n+1} + \lambda^{2n+1}\right) + a_1x\left(x^{2n-1} + \lambda^{2n-1}\right) + \ldots + a_nx^n\left(x + \lambda\right) = 0,$$

або $(x + \lambda) \cdot F(x) = 0$, де $F(x) = 0$ зворотне рівняння парного степеня. Рівняння (5.20) парного степеня розв'язується аналогічно симетричному рівнянню парного степеня.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

* Це зворотне рівняння парного степеня, $\lambda = 2$. Оскільки $x = 0$ не є коренем рівняння, то розділивши обидві частини рівняння на x^2, одержимо рівняння $x^2 + 3x + 4 + \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$, що рівносильне даному. Тепер $\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$.

Покладемо $y = x + \frac{2}{x}$, тоді $y^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4$. Рівняння приймає вигляд $y^2 - 4 + 3y + 4 = 0$, звідки $y^2 + 3y = 0$, отже, $y = 0$ або $y = -3$. Тепер маємо два випадки:

а) $x + \frac{2}{x} = 0$, тоді розв'язків немає;

б) $x + \frac{2}{x} = -3$, $x^2 + 3x + 2 = 0$, тоді $x = -1$ або $x = -2$. Відповідь: $x \in \{-2; -1\}$. *

2. Розв'язати рівняння $x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$.

* Це зворотне рівняння непарного степеня, $\lambda = -2$. Рівняння має корінь $x = -\lambda = 2$. За допомогою схеми Горнера розділимо ліву частину рівняння на $x - 2$:

	1	2	–1	2	–16	–32
2	1	4	7	16	16	0

Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню $(x - 2)(x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 16x + 16) = 0$. Тепер розв'яжемо зворотне рівняння парного степеня $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 16x + 16 = 0$. Тут $\lambda = 4$. Розділивши обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$, маємо $\left(x^2 + \frac{4^2}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{4}{x}\right) + 7 = 0$. Поклавши $y = x + \frac{4}{x}$, одержимо $y^2 + 4y - 1 = 0$, звідки $y = -2 \pm \sqrt{5}$. Тепер маємо два випадки:

а) $x + \frac{4}{x} = -2 - \sqrt{5}$, $x^2 + \left(2 + \sqrt{5}\right)x + 4 = 0$, у цьому разі $x_{1,2} = \frac{-2 - \sqrt{5} \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{2}$;

б) $x + \frac{4}{x} = -2 + \sqrt{5}$, $x^2 - \left(\sqrt{5} - 2\right)x + 4 = 0$, у цьому разі розв'язків немає.

Відповідь: $x \in \left\{2; \frac{-2 - \sqrt{5} - \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{2}; \frac{-2 - \sqrt{5} + \sqrt{4\sqrt{5} - 7}}{2}\right\}$. *

4.4. Іноді рівняння вищого степеня можна розв'язати за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $x^4 + x^3 - 17x^2 + x + 6 = 0$.

* Нехай $x^4 + x^3 - 17x^2 + x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Розкриваючи дужки в правій частині цієї рівності, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a + c = 1, \\ ac + b + d = -17, \\ ad + bc = 1, \\ bd = 6. \end{cases}$$

Цій системі задовольняють числа $a = -3$, $b = -2$, $c = 4$, $d = -3$. Отже, вихідне рівняння рівносильне рівнянню $(x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x - 3) = 0$. Тепер розглянемо два випадки:

а) $x^2 - 3x - 2 = 0$, тоді $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$;

б) $x^2 + 4x - 3 = 0$, тоді $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{7}$.

Відповідь: $x \in \left\{\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}; -2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}\right\}$. *

2. Розв'язати рівняння $x^4 - 8x^2 + x + 12 = 0$.

* Нехай $x^4 - 8x^2 + x + 12 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Маємо систему

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ ac + b + d = -8, \\ ad + bc = 1, \\ bd = 12. \end{cases}$$

Цій системі задовольняють числа $a = -1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -4$. Вихідне рівняння рівносильне такому: $(x^2 - x - 3)(x^2 + x - 4) = 0$. Тепер розглянемо два випадки:

а) $x^2 - x - 3 = 0$, тоді $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) $x^2 + x - 4 = 0$, тоді $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Відповідь: $x \in \left\{ \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \right\}$. *

4.5. Для розв'язання рівнянь вищих степенів у багатьох випадках можна скористатися методом підстановки.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $(x^2 - 5x - 1)(x^2 - 5x - 4) = -2$.

* Нехай $x^2 - 5x - 1 = y$, тоді вихідне рівняння має вигляд $y(y - 3) = -2$, $y^2 - 3y + 2 = 0$, звідки $y = 1$ або $y = 2$. Маємо два випадки:

а) $x^2 - 5x - 1 = 1$, тоді $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$; б) $x^2 - 5x - 1 = 2$, тоді $x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Відповідь: $x \in \left\{ \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}; \dfrac{5-\sqrt{37}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{37}}{2} \right\}$. *

2. Розв'язати рівняння $(3x^2 + x - 1)^2 - x^2(3x^2 + x - 1) = 2x^4$.

* Число $x = 0$ не є коренем рівняння. Розділивши обидві частини рівняння на $x^4 \neq 0$, маємо рівняння $\left(\dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2}\right)^2 - \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2} - 2 = 0$, рівносильне даному. Покладемо $y = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2}$, тоді маємо рівняння $y^2 - y - 2 = 0$, звідки $y = -1$ або $y = 2$. Тепер маємо два випадки:

а) $\dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2} = -1$, $4x^2 + x - 1 = 0$, тоді $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$;

б) $\dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2} = 2$, $x^2 + x - 1 = 0$, тоді $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

Відповідь: $x \in \left\{ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{8}; \dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$. *

3. Розв'язати рівняння $(x - 2)(x - 3)(x - 8)(x - 12) = 10x^2$.

* Запишемо дане рівняння у вигляді $(x^2 - 14x + 24)(x^2 - 11x + 24) = 10x^2$. Число $x = 0$ не є коренем рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$: $\dfrac{x^2 - 14x + 24}{x} \dfrac{x^2 - 11x + 24}{x} = 10$.

$\left(x-14+\frac{24}{x}\right)\left(x-11+\frac{24}{x}\right)=10$. Нехай $x-11+\frac{24}{x}=y$, тоді $(y-3)y=10$, звідки $y=5$ або $y=-2$.

Тепер маємо два випадки:

а) $x-11+\frac{24}{x}=5$, $x^2-16x+24=0$, тоді $x=8\pm2\sqrt{10}$;

б) $x-11+\frac{24}{x}=-2$, $x^2-9x+24=0$, тоді розв'язків немає.

Відповідь: $x=8\pm2\sqrt{10}$. *

4. Розв'язати рівняння $(4x+1)^2(x+1)(2x-1)=14$.

* Запишемо рівняння в такому вигляді: $(16x^2+8x+1)(2x^2+x-1)=14$. Покладемо $2x^2+x=y$, тоді $(8y+1)(y-1)=14$, $8y^2-7y-15=0$, звідки $y=-1$ або $y=\frac{15}{8}$. Тепер маємо два випадки:

а) $2x^2+x=-1$, тоді розв'язків немає; б) $2x^2+x=\frac{15}{8}$, тоді $x=-\frac{5}{4}$ або $x=\frac{3}{4}$.

Відповідь: $x\in\left\{-\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right\}$. *

5. Розв'язати рівняння $3x^4+2x^3-7x^2-2x+3=0$.

* Число $x=0$ не є коренем цього рівняння. Розділивши обидві його частини на $x^2\neq0$, маємо $3x^2+2x-7-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=0$, або $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-7=0$. Нехай $x-\frac{1}{x}=y$, тоді $y^2+2=x^2+\frac{1}{x^2}$. Рівняння має вигляд $3(y^2+2)+2y-7=0$, або $3y^2+2y-1=0$, звідки $y=-1$ або $y=\frac{1}{3}$. Тепер маємо два випадки:

а) $x-\frac{1}{x}=-1$, $x^2+x-1=0$, тоді $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$;

б) $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$, $3x^2-x-3=0$, тоді $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{37}}{6}$.

Відповідь: $x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{37}}{6};\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right\}$. *

6. Розв'язати рівняння $\frac{x}{x^2-x+2}+\frac{x}{x^2+x+2}=\frac{3}{4}$.

* Це рівняння не є рівнянням вищого степеня, але легко зводиться до рівняння такого типу. Помітимо, що число $x=0$ не є коренем рівняння, і розділимо чисельник і знаменник кожного з дробів, що стоять у лівій частині рівняння, на x:

$$\frac{1}{x-1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x+1+\frac{2}{x}}=\frac{3}{4}.$$

Нехай $x+\frac{2}{x}=y$, тоді $\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}=\frac{3}{4}$, або $3y^2-8y-3=0$, звідки $y_1=3$, $y_2=-\frac{1}{3}$. Тепер розглянемо два випадки:

а) $x+\frac{2}{x}=3$, $x^2-3x+2=0$, тоді $x=1$ або $x=2$;

б) $x+\frac{2}{x}=-\frac{1}{3}$. $3x^2+x+6=0$, тоді розв'язків немає.

Відповідь: $x \in \{1; 2\}$. *

4.6. Розглянемо рівняння четвертого степеня з додатковими умовами, накладеними на коефіцієнти.

Нехай є рівняння $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=m$, причому $a+d=b+c=t$. Перепишемо рівняння у вигляді $(x^2-(a+d)x+ad)(x^2-(b+c)x+bc)=m$, або $(x^2-tx+ad)(x^2-tx+bc)=m$. Тепер, зробивши підстановку $x^2-tx=y$, маємо квадратне рівняння $(y+ad)(y+bc)=m$, з якого знаходимо y, а далі x.

Приклад

1. Розв'язати рівняння $x(x+1)(x+2)(x+3)=7$.

* Тут $a=0$, $b=-1$, $c=-2$, $d=-3$. Отже, $a+d=b+c=-3$. Маємо $(x^2+3x)(x^2+3x-2)=7$. $y(y+2)=7$, де $y=x^2+3x$. Розв'язавши квадратне рівняння $y^2+2y-7=0$, здобудемо $y=-1\pm 2\sqrt{2}$. Тепер розглянемо два випадки:

а) $x^2+3x=-1-2\sqrt{2}$, тоді розв'язків немає;

б) $x^2+3x=2\sqrt{2}-1$, тоді $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5+8\sqrt{2}}}{2}$.

Відповідь: $x=\frac{-3\pm\sqrt{5+8\sqrt{2}}}{2}$. *

Нехай є рівняння $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=mx^2$, причому $ad=bc=t\neq 0$, тоді маємо $(x^2-(a+d)x+ad)(x^2-(b+c)x+bc)=mx^2$. Оскільки число $x=0$ не є коренем цього рівняння, розділимо обидві його частини на x^2: $\left(x+\frac{t}{x}-(a+d)\right)\left(x+\frac{t}{x}-\right.$ $\left.-(b+c)\right)=m$. Поклавши $x+\frac{t}{x}=y$, одержимо квадратне рівняння $(y-(a+d))(y-$ $-(b+c))=m$, звідки знаходимо y, а далі x.

Приклад

2. Розв'язати рівняння $(x-2)(x-4)(x-5)(x-10)=4x^2$.

* Тут $a=2$, $b=4$, $c=5$, $d=10$. Отже, $ad=bc=20$. Маємо $(x^2-12x+20)(x^2-9x+20)=4x^2$. Розділивши обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$, одержимо $\left(x+\frac{20}{x}-12\right)\left(x+\frac{20}{x}-9\right)=4$. Нехай $x+\frac{20}{x}-12=y$, тоді $y(y+3)=4$, звідки $y=1$ або $y=-4$. Тепер маємо два випадки:

а) $x+\frac{20}{x}-12=1$, тоді $x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{89}}{2}$;

б) $x+\frac{20}{x}-12=-4$, тоді розв'язків немає.

Відповідь: $x=\frac{13\pm\sqrt{89}}{2}$. *

Нехай між коефіцієнтами рівняння $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ виконується умова $a = c + d$, $e = b + c$. Рівняння запишемо так: $(c + d)x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + b + c = 0$, або $c(x^4 + x^2 + 1) + dx(x^3 + 1) + b(x^3 + 1) = 0$. Враховуючи, що $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, маємо

$$c\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) + dx\left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) + b\left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) = 0,$$

$$\left(x^2 - x + 1\right)\left(cx^2 + cx + c + dx^2 + dx + bx + b\right) = 0$$

і, нарешті,
$$\left(x^2 - x + 1\right)\left((c + d)x^2 + (b + c + d)x + b + c\right) = 0. \qquad (5.21)$$

Рівняння (5.21) рівносильне сукупності двох квадратних рівнянь. Оскільки рівняння $x^2 - x + 1 = 0$ не має дійсних коренів, одержуємо рівняння $(c + d)x^2 + (b + c + d)x + b + c = 0$, або $ax^2 + (e + d)x + e = 0$.

Приклад

3. Розв'язати рівняння $2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

* Тут $a = 2$, $b = -3$, $c = d = 1$, $e = -2$. Оскільки виконуються умови $a = c + d$, $e = b + c$, дане рівняння рівносильне рівнянню $ax^2 + (e + d)x + e = 0$, тобто $2x^2 - x - 2 = 0$, звідки $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Відповідь: $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$. *

4.7. Розглянемо *метод доповнення до повного квадрата.*

Приклади

1. Розв'язати рівняння $x^4 - 12x - 5 = 0$.

* $x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 - 12x - 9 = 0$, $(x^2 + 2)^2 - (2x + 3)^2 = 0$. Розкладаючи ліву частину рівняння як різницю квадратів, маємо $(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x - 1) = 0$. Тепер розглянемо два випадки:

а) $x^2 + 2x + 5 = 0$, тоді розв'язків немає; б) $x^2 - 2x - 1 = 0$, тоді $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Відповідь: $x = 1 \pm \sqrt{2}$. *

2. Розв'язати рівняння $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

* $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$, $(x^2 + 2x)^2 - (x - 1)^2 = 0$, $(x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. Тепер маємо два випадки:

а) $x^2 + 3x - 1 = 0$, тоді $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) $x^2 + x + 1 = 0$, тоді розв'язків немає.

Відповідь: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. *

3. Розв'язати рівняння $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

* Хоча це рівняння не є рівнянням вищого степеня, воно легко зводиться до нього. Доповнимо ліву частину до повного квадрата: $x^2 - \frac{10x^2}{x+5} + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11 - \frac{10x^2}{x+5}$, або $\left(x - \frac{5x}{x+5}\right)^2 =$

$= 11 - \frac{10x^2}{x+5}$. $\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 = 11 - \frac{10x^2}{x+5}$. Нехай $\frac{x^2}{x+5} = y$, тоді $y^2 = 11 - 10y$, $y = 1$ або $y = -11$. Тепер розглянемо два випадки:

а) $\frac{x^2}{x+5} = 1$, тоді $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$; б) $\frac{x^2}{x+5} = -11$, тоді розв'язків немає.

Відповідь: $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. *

4. Розв'язати рівняння $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x - 2 = 0$.

* $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - x^2 + 3x - 2 = 0$, $(x^2 - 3x)^2 - (x^2 - 3x) - 2 = 0$. Нехай $x^2 - 3x = y$, тоді $y^2 - y - 2 = 0$, звідки $y = -1$ або $y = 2$. Тепер розглянемо два випадки:

а) $x^2 - 3x = -1$, тоді $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $x^2 - 3x = 2$, тоді $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Відповідь: $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$. *

4.8. Розглянемо *метод введення параметра*. Іноді буває корисно ввести параметр і розв'язувати рівняння не відносно x, а відносно параметра.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$.

* Покладемо $\sqrt{3} = a$ (введемо параметр). Тепер рівняння має вигляд $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$. Розв'яжемо його як квадратне рівняння $a^2 - (1 + 2x^2)a + x + x^4 = 0$ відносно параметра a. Маємо

$$a = \frac{1 + 2x^2 \pm \sqrt{\left(1+2x^2\right)^2 - 4\left(x + x^4\right)}}{2} = \frac{1 + 2x^2 \pm \sqrt{1 - 4x + 4x^2}}{2} = \frac{1 + 2x^2 \pm (1 - 2x)}{2}.$$ звідки $a =$ $= x^2 + x$ або $a = x^2 - x + 1$. Тепер пригадаємо, що $a = \sqrt{3}$, і розглянемо два випадки:

а) $x^2 + x = \sqrt{3}$, тоді $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$; б) $x^2 - x + 1 = \sqrt{3}$, тоді $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.

Відповідь: $x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}; \frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}; \frac{1-\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}; \frac{1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}\right\}$. *

2. Розв'язати рівняння $x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 3x + 4\sqrt{3} + 8 = 0$.

* Нехай $\sqrt{3} = a$. Маємо $x^3 + 2ax^2 + a^2x + 4a + 8 = 0$, або $xa^2 + (2x^2 + 4)a + x^3 + 8 = 0$. Розв'язуючи це рівняння як квадратне відносно a, одержимо

$$a = \frac{-\left(2x^2 + 4\right) \pm \sqrt{4x^4 + 16x^2 + 16 - 4x^4 - 32x}}{2x} = \frac{-\left(2x^2 + 4\right) \pm 4(x - 1)}{2x}.$$

Тепер розглянемо два випадки:

а) $a=\dfrac{-2x^2+4x-8}{2x}=\dfrac{-x^2+2x-4}{x}$, а оскільки $a=\sqrt{3}$, то $\sqrt{3}=\dfrac{-x^2+2x-4}{x}$. $x^2-\left(2-\right.$

$\left.-\sqrt{3}\right)x+4=0$ і тоді розв'язків немає:

б) $a=\dfrac{-2x^2-4x}{2x}=-x-2$, $\sqrt{3}=-x-2$. тоді $x=-\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Відповідь: $x=-\left(2+\sqrt{3}\right)$. *

4.9. У ряді випадків ефективним є *метод введення кількох змінних і перехід до системи рівнянь.*

Приклади

1. Розв'язати рівняння $(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)=(3x^2-2x-1)^3$.

* Покладемо $x^2+3x-4=a$, $2x^2-5x+3=b$, тоді $a^3+b^3=(a+b)^3$. Враховуючи, що $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, маємо $a^3+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ і $ab(a+b)=0$. Тепер розглянемо три випадки:

а) $a=0$, тоді $x^2+3x-4=0$, отже, $x=1$ або $x=-4$;

б) $b=0$, тоді $2x^2-5x+3=0$, отже, $x=1$ або $x=3/2$;

в) $a+b=0$, тоді $3x^2-2x-1=0$, отже, $x=1$ або $x=-\dfrac{1}{3}$.

Перевірка підтверджує, що всі знайдені числа є коренями даного рівняння.

Відповідь: $x\in\left\{-4;-\dfrac{1}{3};1;\dfrac{3}{2}\right\}$. *

2. Розв'язати рівняння $(3x^2+x-1)^2+(2x^2+x-2)^2=(5x^2+2x-3)^2$.

* Нехай $3x^2+x-1=a$, $2x^2+x-2=b$, тоді $a^2+b^2=(a+b)^2$, звідки $2ab=0$. Маємо два випадки:

а) $a=0$, тоді $3x^2+x-1=0$, $x_{1,2}\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$; б) $b=0$, тоді $2x^2+x-2=0$, $x_{3,4}\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$.

Легко бачити, що всі ці числа є коренями даного рівняння.

Відповідь: $x\in\left\{\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6};\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6};\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\}$. *

3. Розв'язати рівняння $(x+2)^4+(x-1)^4=17$.

* Нехай $x+2=a$, $x-1=b$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases}a^4+b^4=17,\\ a-b=3.\end{cases}$$

Помітимо, що $a^4+b^4=((a-b)^2+2ab)^2-2a^2b^2$. Отже, $17=(3^2+2ab)^2-2a^2b^2$, $2a^2b^2+36ab+64=0$, звідки $ab=-2$ або $ab=-16$. Маємо два випадки:

а) $\begin{cases}a-b=3,\\ ab=-2.\end{cases}$

розв'язками цієї системи є: $(a=2, b=-1)$, $(a=1, b=-2)$, отже, $x=0$ або $x=-1$;

б) $\begin{cases}a-b=3,\\ ab=-16,\end{cases}$ тоді розв'язків немає.

Відповідь: $x\in\{-1;0\}$. *

4.10. У ряді випадків для розв'язання рівнянь вищих степенів використовують властивості функцій.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $4x^7 + x = 5$.

* Рівняння має корінь $x = 1$. Покажемо, що інших коренів воно не має. Для цього запишемо рівняння у вигляді $4x^7 = 5 - x$. Функція $f(x) = 4x^7$ зростаюча, а функція $g(x) = 5 - x$ спадна. Очевидно, що рівняння $f(x) = g(x)$ не може мати більше одного кореня. Відповідь: $x = 1$. *

2. Розв'язати рівняння $x^4 - x^2 - 3x + 4 = 0$.

* Розглянемо функцію $f(x) = x^4 - x^2 - 3x + 4 = \left(x^2 - 1\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Ясно, що $f(x) > 0$, отже, дане рівняння не має коренів. Відповідь: розв'язків немає. *

3. Розв'язати рівняння $(x^2 - 3x - 6)^2 - 3(x^2 - 3x - 6) - 6 = x$.

* Нехай $f(x) = x^2 - 3x - 6$, тоді задане рівняння має вигляд $f(f(x)) = x$. Отже, корені рівняння $f(x) = x$ є коренями даного рівняння. Знайдемо ці корені з рівняння $x^2 - 3x - 6 = x$, $x^2 - 4x - 6 = 0$: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{10}$. Далі, розкривши дужки і звівши подібні члени, запишемо задане рівняння у вигляді $x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 44x + 48 = 0$. Оскільки числа $2 - \sqrt{10}$ та $2 + \sqrt{10}$ є його коренями, многочлен, що стоїть у лівій частині рівняння, ділиться на $x^2 - 4x - 6$. Після ділення одержимо рівняння $(x^2 - 4x - 6)(x^2 - 2x - 8) = 0$. З рівняння $x^2 - 2x - 8 = 0$ маємо $x = -2$ або $x = 4$.

Відповідь: $x \in \left\{-2; 2 - \sqrt{10}; 2 + \sqrt{10}; 4\right\}$. *

4. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x + 3 = (x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 4)$.

* Оскільки $x^2 + x + 1 > 0$ при будь-якому дійсному x, дане рівняння рівносильне такому:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} = x^4 + x^2 + 4 \quad \text{або} \quad \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = x^4 + x^2 + 3.$$

Нехай $y = f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$, звідки $yx^2 + (y - 1)x + y - 2 = 0$. Для того щоб це квадратне рівняння відносно x мало розв'язки, необхідно і достатньо, щоб його дискримінант був невід'ємним. Отже, $(y - 1)^2 - 4y(y - 2) \geq 0$, або $3y^2 - 6y - 1 \leq 0$, звідки $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$. З іншого боку ясно, що $g(x) = x^4 + x^2 + 3 \geq 3$. Таким чином, $f(x) \leq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} < 3 \leq g(x)$ і тоді розв'язків немає.

Відповідь: розв'язків немає. *

Вправи

1. Розв'язати двочленні рівняння:

а) $3x^3 + 5 = 0$; б) $4x^6 - 7 = 0$; в) $7x^4 + 1 = 0$.

2. Розв'язати тричленні рівняння:

а) $x^{16} - 4x^8 + 3 = 0$; б) $2x^{12} + x^6 - 3 = 0$; в) $x^{10} + 5x^5 - 6 = 0$;

г) $x^{12} - 4x^6 + 4 = 0$; д) $x^8 - 4x^4 + 4 = 0$.

3. Розв'язати біквадратні рівняння:

а) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$; б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; в) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.

4. Довести, що рівняння $3x^4 - ax^2 - 1 = 0$ при будь-якому дійсному a має рівно два дійсних корені.

5. Дано біквадратне рівняння $ax^4 - 4x^2 + a + 1 = 0$. При якому значенні параметра a рівняння: 1) має чотири різних корені, 2) має рівно два різних корені, 3) не має дійсних коренів?

6. Розв'язати рівняння:

а) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$; б) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$; в) $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 2x + 1 = 0$;

г) $4x^3 - 5x^2 - 5x + 4 = 0$; д) $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

7. Розв'язати рівняння $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 7 = 0$. **Вказівка.** Зробити підстановку $y = x - 1$.

8. Розв'язати рівняння:

а) $\dfrac{x^4+4}{x^2+2} = 5x$; б) $\dfrac{x^6+1}{x\left(x^4+1\right)} = \dfrac{65}{34}$;

в) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 = 0$; г) $x^5 + 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 81x - 243 = 0$.

9. Розв'язати рівняння $2x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. **Вказівка.** Застосуйте метод невизначених коефіцієнтів.

10. Розв'язати рівняння:

а) $3(x^2 - 7x - 1)^2 - 2(x^2 - 7x - 1) = 1$; б) $(2x^2 - 2x - 1)^2 - 4x^2 + 4x = 2$;

в) $(2x^2 + 3x - 2)(2x^2 + 3x - 3) = 2$; г) $(x^2 + 2x + 3)(4 + 2x + x^2) = 7 + 2x + x^2$;

д) $x(x-1)(x-2)(x-3) = 24$; е) $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = 4{,}5$; ж) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$;

з) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$; и) $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 4x + 5) = 2(x + 1)^2$;

і) $(x^2 - x + 1)^4 - 8x^2(x^2 - x + 1)^2 + 16x^4 = 0$; ї) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$;

й) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7} + \dfrac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$; к) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \dfrac{3x}{x^2-8x+15}$.

11. Розв'язати рівняння $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$. **Вказівка.** Див. приклад 3 у п.4.6 у цього параграфа.

12. Розв'язати рівняння, виділяючи повний квадрат:

а) $x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$; б) $x^4 - 8x - 7 = 0$; в) $x^2 + \dfrac{x^2}{(1+x)^2} = 3$.

13. Розв'язати рівняння шляхом введення параметра: а) $2x^3 - \left(2+\sqrt{2}\right)x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 0$;

б) $x^3 - \left(\sqrt{3}+1\right)x^2 + 3 = 0$; в) $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$.

14. Розв'язати рівняння: а) $(2x^2 + x + 2)^2 + (3x^2 - 2x - 3)^2 = (5x^2 - x - 1)^2$; б) $(x - 4)^4 + x^4 = 82$; в) $3x^5 + 4x = 7$; г) $(x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) = x + 2$; д) $(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 3) = 1$.

§ 5. Ірраціональні рівняння

5.1. *Ірраціональним* називається рівняння, що містить невідоме під знаком радикала (кореня).

Нагадаємо, що радикали парного степеня є арифметичними, тобто $\sqrt[2n]{a} \geq 0$, якщо $a \geq 0$. Радикали непарного степеня визначені при будь-якому дійсному значенні підкореневого виразу. Виходячи із цих властивостей, у ряді випадків можна розв'язати ірраціональне рівняння без перетворень.

Приклад

1. Довести, що рівняння не мають розв'язків: а) $\sqrt{1-3x} = -1$; б) $\sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} = 5$;

в) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$; г) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x}$; д) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3{,}1} = 2$; е) $\sqrt{-2-x} = \sqrt[3]{x+1}$.

* а) $\sqrt{1-3x} \geq 0$ за означенням; б) область визначення — порожня множина; в) область визначення задається нерівністю $x \geq 2$, при цьому ліва частина рівняння додатна; г) ліва частина

рівняння від'ємна, а права — невід'ємна; д) область визначення задається нерівністю $x \geq 1$, при цьому ліва частина не менша ніж $\sqrt{4,1} > 2$; е) область визначення задається нерівністю $x \leq -2$, при цьому права частина рівняння від'ємна. *

При розв'язанні ірраціональних рівнянь доводиться підносити обидві частини рівняння до деякого степеня. При цьому можуть з'явитися сторонні корені. У такому випадку необхідно зробити перевірку. Якщо ж перевірка громіздка, потрібно простежити за рівносильністю всіх перетворень. Це досягається за допомогою змішаних систем.

Приклади

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{5x-1} = x+1$.

* Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і здобудемо $5x - 1 = x^2 + 2x + 1$, $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x = 1$ або $x = 2$. Перевірка підтверджує, що обидва знайдених числа є коренями. Відповідь: $x \in \{1; 2\}$. *

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{6x-2} = 7-x$.

* $\sqrt{6x-2} = 7-x \Rightarrow 6x-2 = 49-14x+x^2 \Leftrightarrow x^2-20x+51=0 \Leftrightarrow x \in \{3; 17\}$. Перевірка підтверджує тільки число $x = 3$. Число 17 — сторонній корінь. Відповідь: $x = 3$. *

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+1} = 2$.

* $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5x+1} = 2+\sqrt{x+1} \Rightarrow 5x+1 = 4+4\sqrt{x+1}+x+1 \Leftrightarrow 4x-4 =$

$= 4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2-2x+1 = x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x \in \{0; 3\}$.

Перевірка підтверджує лише число $x = 3$. Число $x = 0$ — сторонній корінь. Відповідь: $x = 3$. *

5. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x+3} + \sqrt{3x-1} = 4$.

* $\sqrt{4x+3} + \sqrt{3x-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = 4-\sqrt{4x+3} \Rightarrow 3x-1 = 16-8\sqrt{4x+3}+4x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{4x+3} = 20+x \Rightarrow 64(4x+3) = 400+40x+x^2 \Leftrightarrow x^2-216x+208=0 \Leftrightarrow x = 108 \pm \sqrt{179}$.

Перевірка. Число $x = 108+8\sqrt{179}$ не підходить, бо при цьому ліва частина більша за праву. Перевіримо число $x = 108-8\sqrt{179}$: $\sqrt{4(108-8\sqrt{179})+3} + \sqrt{3(108-8\sqrt{179})-1} = \sqrt{435-32\sqrt{179}} +$

$+\sqrt{323-24\sqrt{179}} = \sqrt{256-2\cdot 16\sqrt{179}+179} + \sqrt{179-2\cdot 12\sqrt{179}+144} = \sqrt{(16-\sqrt{179})^2} +$

$+\sqrt{(\sqrt{179}-12)^2} = 16-\sqrt{179}+\sqrt{179}-12 = 4$. Отже, $x = 108-8\sqrt{179}$ підходить.

Відповідь: $x = 108-8\sqrt{179}$. *

5.2. При розв'язанні останнього прикладу ми бачили, що схема наслідків може бути незручною через громіздку перевірку. Застосуємо схему рівносильних переходів за допомогою змішаних систем:

$$\sqrt{4x+3} + \sqrt{3x-1} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{4x+3} + \sqrt{3x-1}\right)^2 = 16, \\ x \geq \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+2+2\sqrt{(4x+3)(3x-1)}=16, \\ x\ge\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{12x^2+5x-3}=14-7x, \\ x\ge\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(12x^2+5x-3)=(14-7x)^2, \\ x\ge\frac{1}{3}, \\ 14-7x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-216x+208=0, \\ \frac{1}{3}\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=108\pm 8\sqrt{179}, \\ \frac{1}{3}\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=108-8\sqrt{179}.$$

На останньому етапі треба пересвідчитись у справедливості подвійної нерівності $\frac{1}{3}\le 108-8\sqrt{179}\le 2.$

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{5x-2}+\sqrt{4-x}=3.$

$$* \sqrt{5x-2}+\sqrt{4-x}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2+2\sqrt{(5x-2)(4-x)}=9, \\ \frac{2}{5}\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{-5x^2+22x-8}=7-4x, \\ \frac{2}{5}\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-5x^2+22x-8)=(7-4x)^2, \\ \frac{2}{5}\le x\le\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x^2-144x+81=0, \\ \frac{2}{5}\le x\le\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{2}, \\ \frac{2}{5}\le x\le\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4-\sqrt{7}}{2}.$$

Перевіркою можна встановити, що $\frac{2}{5}\le\frac{4-\sqrt{7}}{2}\le\frac{7}{4}$. Відповідь: $x=\frac{4-\sqrt{7}}{2}$. *

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+5}+\sqrt{1-4x}=\sqrt{x}.$

$$* \sqrt{2x+5}+\sqrt{1-4x}=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x+2\sqrt{(2x+5)(1-4x)}=x, \\ 0\le x\le\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2x+5)(1-4x)}=3x-6. \\ 0\le x\le\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Розв'язків немає, бо при $0\le x\le\frac{1}{4}$ $3x-6<0$. Відповідь: розв'язків немає. *

3. Розв'язати рівняння $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x-1}.$

$$* 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x-3+4\sqrt{(2x-1)(3x+1)}=4x-1, \\ \frac{1}{2}\le x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{(2x-1)(3x+1)}=2-7x, \\ \frac{1}{2}\le x. \end{cases}$$

Розв'язків немає, бо при $x\ge\frac{1}{2}$ $2-7x<0$. Відповідь: розв'язків немає. *

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{5x+1}.$

$$* \sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{5x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-3+2\sqrt{12x^2-11x+2}=5x+1, \\ \frac{2}{3}\le x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{12x^2-11x+2}=2-x, \\ \frac{2}{3}\le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2-11x+2=(2-x)^2, \\ \frac{2}{3}\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x^2-7x-2=0, \\ \frac{2}{3}\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7\pm\sqrt{137}}{22}. \\ \frac{2}{3}\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{137}}{22}.$$

За допомогою перевірки можна переконатись, що $\frac{2}{3}\le\frac{7+\sqrt{137}}{22}\le 2$.

Відповідь: $x=\frac{7+\sqrt{137}}{22}$. *

5.3. Дуже часто для розв'язання ірраціональних рівнянь ефективним є метод підстановки.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2+3}=3x$.

* Покладемо $u=\sqrt{x^2-3x+3}$, $v=\sqrt{x^2+3}$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u+v=3x, \\ u^2-v^2=-3x. \end{cases}$$

Число $x=0$ не є коренем рівняння. Розділимо друге рівняння на перше почленно і одержимо $u-v=-1$. Тепер маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u+v=3x, \\ u-v=-1, \end{cases}$$

звідки $u=\frac{3x-1}{2}$, $v=\frac{3x+1}{2}$. Враховуючи, що $v=\sqrt{x^2+3}$, маємо рівняння $\sqrt{x^2+3}=\frac{3x+1}{2}$.

$4(x^2+3)=(3x+1)^2$, $5x^2+6x-11=0$, звідки $x_1=1$, $x_2=-\frac{11}{5}$. Перевірка свідчить, що підходить лише $x_1=1$. Відповідь: $x=1$. *

2. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{41-x}+\sqrt[4]{x-24}=3$.

* Нехай $u=\sqrt[4]{41-x}$, $v=\sqrt[4]{x-24}$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^4+v^4=17. \end{cases}$$

Далі маємо $u^4+v^4=((u+v)^2-2uv)^2-2u^2v^2=(9-2uv)^2-2u^2v^2=2u^2v^2-36uv+81=17$. Поклавши $uv=t$, маємо квадратне рівняння $2t^2-36t+64=0$, звідки $t=2$ або $t=16$. Тепер запишемо систему

$$\begin{cases} t=2, \\ u+v=3, \end{cases} \quad \begin{cases} uv=2, \\ u+v=3, \end{cases}$$

звідки $u = 2$ або $u = 1$. У першому випадку маємо $\sqrt[3]{41-x} = 2$, $x = 25$, у другому — $\sqrt[3]{41-x} = 1$, $x = 40$. Перевірка підтверджує обидва знайдені корені. Відповідь: $x \in \{25; 40\}$. *

3. Розв'язати рівняння $2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{27-14x} = 1$.

* 1-й спосіб. Нехай $u = \sqrt[3]{x-1}$, $v = \sqrt[3]{27-14x}$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2u+v=1, \\ 14u^3+v^3=13. \end{cases} \quad \begin{cases} 2u+v=1, \\ 14u^3+(1-2u)^3=13. \end{cases} \quad \begin{cases} 2u+v=1, \\ u^3+2u^2-u-2=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2u+v=1, \\ (u+2)(u^2-1)=0, \end{cases}$$

звідки $u \in \{-2; 1; 1\}$. Відповідно маємо три випадки:

а) $u = \sqrt[3]{x-1} = -2$, тоді $x = -7$;

б) $u = \sqrt[3]{x-1} = -1$, тоді $x = 0$;

в) $u = \sqrt[3]{x-1} = 1$, тоді $x = 2$.

Перевірка підтверджує всі три знайдені розв'язки.

2-й спосіб. Нехай $a = 2\sqrt[3]{x-1}$, $b = \sqrt[3]{27-14x}$, $a + b = 1$. Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня: $(a + b)^3 = 1$, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 1$. Враховуючи, що $a + b = 1$, маємо $a^3 + b^3 + 3ab = 1$, або $8(x-1) + 27 - 14x + 6\sqrt[3]{-14x^2+41x-27} = 1$, $\sqrt[3]{-14x^2+41x-27} = x - 3$, $-14x^2 + 41x - 27 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$, $x^3 + 5x^2 - 14x = 0$, звідки $x \in \{0; 2; -7\}$. У кінці обов'язково треба зробити перевірку, бо при такому способі розв'язання можуть з'явитися сторонні корені.
Відповідь: $x \in \{-7; 0; 2\}$. *

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}$.

* Нехай $u = \sqrt{x-\frac{1}{x}}$, $v = \sqrt{1-\frac{1}{x}}$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{x-1}{x}, \\ u^2-v^2=x-1. \end{cases}$$

Помітимо, що число $x = 1$ є коренем даного рівняння. Якщо ж $x \neq 1$, то розділимо друге рівняння системи на перше і одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{x-1}{x}, \\ u+v=x. \end{cases}$$

Додамо рівняння системи: $2u = x + \frac{x-1}{x} = x - \frac{1}{x} + 1$, або $2\sqrt{x-\frac{1}{x}} = x - \frac{1}{x} + 1$. Поклавши $\sqrt{x-\frac{1}{x}} = z$, маємо $2z = z^2 + 1$, звідки $z = 1$. Ми одержали рівняння $\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 1$, $x - \frac{1}{x} = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$, отже, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Перевірка свідчить про те, що підходить лише $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $x \in \left\{1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. *

5.4. Наведемо ще декілька ірраціональних рівнянь, для розв'язання яких застосовують різні штучні прийоми.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}.$$

* Область допустимих значень визначається нерівністю $|x|\le 1$. Покладемо $x=\cos\varphi$, де $\varphi\in[0;\pi]$. Помітимо, що $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1+\sin\varphi}=\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=$ $=\left|\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}$, бо $0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{2}$. Далі, $\sqrt{(1+x)^3}=\sqrt{(1+\cos\varphi)^3}=\sqrt{8\cos^6\frac{\varphi}{2}}=$ $=2\sqrt{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}$; $\sqrt{(1-x)^3}=\sqrt{(1-\cos\varphi)^3}=\sqrt{8\sin^6\frac{\varphi}{2}}=2\sqrt{2}\sin^3\frac{\varphi}{2}$. Рівняння тепер має вигляд $2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos^3\frac{\varphi}{2}-\sin^3\frac{\varphi}{2}\right)=2+\sin\varphi$, або $\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\right.$ $\left.+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\sin\varphi$, $\sqrt{2}\cos\varphi\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\right)=1+\frac{1}{2}\sin\varphi$. Зрозуміло, що $1+\frac{1}{2}\sin\varphi\ne 0$, отже, з останнього рівняння маємо $\sqrt{2}\cos\varphi=1$ і $\cos\varphi=x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Відповідь: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. *

2. Розв'язати рівняння $16x^2+2x+2=\sqrt{256x-15}$.

* Розділимо обидві частини рівняння на 16 і подамо рівняння у вигляді $x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}=$ $=\sqrt{x-\frac{15}{256}}$. Виділяючи повний квадрат, маємо $\left(x+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{31}{256}=\sqrt{x+\frac{1}{16}-\frac{31}{256}}$. Покладемо $\left(x+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{31}{256}=t>0$. Маємо систему

$$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{31}{256}=t,\\ t^2=\left(x+\frac{1}{16}\right)-\frac{31}{256}.\end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге: $\left(x+\frac{1}{16}\right)^2-t^2=t-x-\frac{1}{16}$. Далі, $\left(x+\frac{1}{16}-t\right)\left(x+\right.$ $\left.+\frac{1}{16}+t\right)=t-x-\frac{1}{16}$, $\left(x+\frac{1}{16}-t\right)\left(x+\frac{1}{16}+t+1\right)=0$. Враховуючи, що в області допустимих значень $x\ge\frac{15}{256}$ і що $t>0$, маємо $x+\frac{1}{16}+t+1>0$. Тепер запишемо рівняння і розв'яжемо його:

$x+\frac{1}{16}-t=0,\ x+\frac{1}{16}-\left(x+\frac{1}{16}\right)^2-\frac{31}{256}=0,\ x^2-\frac{7}{8}x+\frac{1}{16}=0,\ x=\frac{7\pm\sqrt{33}}{16}.$

Відповідь: $x=\frac{7\pm\sqrt{33}}{16}$. *

3. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2x+21}-\sqrt{3x-5}=1$.

* Нехай $u=\sqrt[3]{2x+21},\ v=\sqrt{3x-5}$, тоді $u^3=2x+21$, $v^2=3x-5$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases}u-v=1,\\3u^3-2v^2=73,\end{cases}\quad\begin{cases}v=u-1,\\3u^3-2(u-1)^2=73,\end{cases}$$

звідки $3u^3-2u^2+4u-75=0,\ 3u^3-9u^2+7u^2-21u+25u-75=0,\ (u-3)(3u^2+7u+25)=0,\ u=3=\sqrt[3]{2x+21},\ 2x+21=27,\ x=3$. Відповідь: $x=3$. *

4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x.$$

* Поділимо обидві частини рівняння на $x-5$. При цьому обов'язково треба перевірити, чи не є число $x=5$ коренем рівняння. Виявляється, що число $x=5$ є коренем рівняння. Після ділення обох частин на $5-x\neq 0$ одержимо рівняння $\frac{1}{5-x}\sqrt{x^2-9x+24}-\frac{1}{5-x}\sqrt{6x^2-59x+149}=1$.

Тепер розглянемо два випадки:

а) $5-x>0$, тоді рівняння має вигляд

$$\sqrt{\frac{x^2-9x+24}{(5-x)^2}}-\sqrt{\frac{6x^2-59x+149}{(5-x)^2}}=1,$$

або

$$\sqrt{1+\frac{x-1}{(5-x)^2}}-\sqrt{6+\frac{x-1}{(5-x)^2}}=1,$$

після чого, покладаючи $y=\frac{x-1}{(5-x)^2}$, отримаємо рівняння $\sqrt{1+y}-\sqrt{6+y}=1$, що не має розв'язків, бо ліва частина рівняння від'ємна;

б) $5-x<0$, тоді рівняння має вигляд

$$-\sqrt{1+\frac{x-1}{(5-x)^2}}+\sqrt{6+\frac{x-1}{(5-x)^2}}=1 \text{ або } \sqrt{6+y}=1+\sqrt{1+y},$$

де $y=\frac{x-1}{(5-x)^2}$, і $6+y=1+2\sqrt{1+y}+1+y,\ 2=\sqrt{1+y}$, звідки $y=3$, і оскільки перевірка підтверджує це значення кореня рівняння, маємо систему

$$\begin{cases}5-x<0,\\\frac{x-1}{(5-x)^2}=3,\end{cases}$$

звідки $x=6\frac{1}{3}$. Відповідь: $x\in\left\{5;6\frac{1}{3}\right\}$. *

5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x^2-5x-2}+\sqrt{2x^2-5x+2}=\sqrt{8x^2-15x-2}.$$

* Подамо рівняння у вигляді $\sqrt{(3x+1)(x-2)}+\sqrt{(2x-1)(x-2)}=\sqrt{(8x+1)(x-2)}$.

Область допустимих значень $D=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[2;\infty)$. Розглянемо два випадки:

а) $\begin{cases}x\ge 2,\\ \sqrt{3x+1}\,\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-1}\,\sqrt{x-2}=\sqrt{8x+1}\,\sqrt{x-2};\end{cases}$

зрозуміло, що число $x = 2$ є коренем рівняння; крім того, маємо систему

$$\begin{cases}x\ge 2,\\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{8x+1},\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge 2.\\ 5x+2\sqrt{6x^2-x-1}=8x+1,\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge 2,\\ 2\sqrt{6x^2-x-1}=3x+1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge 2,\\ 4\left(6x^2-x-1\right)=9x^2+6x+1,\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge 2,\\ x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{3},\end{cases}\quad x\in\varnothing;$$

б) $\begin{cases}x\le -\frac{1}{3}.\\ \sqrt{-3x-1}\,\sqrt{2-x}+\sqrt{1-2x}\,\sqrt{2-x}=\sqrt{-8x-1}\,\sqrt{2-x},\end{cases}\quad \begin{cases}x\le -\frac{1}{3}.\\ \sqrt{-3x-1}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{-8x-1},\end{cases}$

$$\begin{cases}x\le -\frac{1}{3},\\ -5x+2\sqrt{6x^2-x-1}=-8x-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x\le -\frac{1}{3},\\ 2\sqrt{6x^2-x-1}=-3x-1,\end{cases}\quad \begin{cases}x\le -\frac{1}{3},\\ 4\left(6x^2-x-1\right)=9x^2+6x+1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le -\frac{1}{3},\\ x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{3},\end{cases}\quad x=-\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $x\in\left\{-\frac{1}{3};2\right\}$. *

6. Розв'язати рівняння $4\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}=4+x$.

* Дане рівняння рівносильне рівнянню $\sqrt{4-x^2}=4-4\sqrt{x}+x$ або $\sqrt{4-x^2}=\left(2-\sqrt{x}\right)^2$. Нехай $\sqrt{x}=u$, $2-\sqrt{x}=v$, тоді $\sqrt{4-x^2}=v^2$, $4-x^2=v^4$, $4=x^2+v^4=u^4+v^4$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases}u^4+v^4=4,\\ u+v=2,\end{cases}\quad \begin{cases}\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2=4,\\ u+v=2,\end{cases}\quad \begin{cases}(uv)^2-8uv+6=0,\\ u+v=2,\end{cases}\quad \begin{cases}uv=4\pm\sqrt{10},\\ u+v=2.\end{cases}$$

Розглянемо два випадки:

перший — $\begin{cases}uv=4+\sqrt{10},\\ u+v=2,\end{cases}$

у цьому випадку розв'язків немає;

другий — $\begin{cases}uv=4-\sqrt{10},\\ u+v=2,\end{cases}\quad z^2-2z+4-\sqrt{10}=0,\quad z=1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}.$

Система має два розв'язки: $u=1+\sqrt{\sqrt{10}-3}$, $v=1-\sqrt{\sqrt{10}-3}$ та $u=1-\sqrt{\sqrt{10}-3}$, $v=1+\sqrt{\sqrt{10}-3}$. Відповідно до цього маємо два випадки:

а) $u=1+\sqrt{\sqrt{10}-3}=\sqrt{x}$, $x=\sqrt{10}+2\sqrt{\sqrt{10}-3}-2$;

б) $u=1-\sqrt{\sqrt{10}-3}=\sqrt{x}$, $x=\sqrt{10}-2\sqrt{\sqrt{10}-3}-2$. Відповідь: $x=\sqrt{10}-2\pm 2\sqrt{\sqrt{10}-3}$. *

7. Розв'язати рівняння: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+11}=10$.

* Помітимо, що ліва частина рівняння — зростаюча функція. Тому рівняння не може мати більше ніж один корінь. Число $x=1$ є єдиним його коренем. Відповідь: $x=1$. *

8. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-1}+\sqrt{10x-3}=\sqrt{9-x}+\sqrt{23-3x}+\sqrt{6-x}.$$

* Ліва частина рівняння — зростаюча функція, а права — спадна. Тому рівняння не може мати більше ніж один корінь. Число $x=2$ є єдиним його коренем. Відповідь: $x=2$. *

Вправи

1. Довести, що рівняння не має розв'язків:

а) $\sqrt{10-7x}=-2$; б) $\sqrt{x-8}+\sqrt{3-x}=4$;

в) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=0$; г) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x-7}$;

д) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2.1}=2$; е) $\sqrt{x-3}=\sqrt[3]{1-2x}$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $\sqrt{7x-3}=x+1$; б) $\sqrt{1-5x}=13+x$; в) $\sqrt{4x-3}=2x-3$;

г) $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}=1$; д) $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}=5$; е) $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+2}=7$;

є) $\sqrt{4x+2}-\sqrt{3x-1}=3$; ж) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x-1}$; з) $\sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}$;

и) $\sqrt{2x-4}=\sqrt{x-3}+\sqrt{3x-11}$; і) $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x+21}$; й) $\sqrt{2x^2+8x+1}=3+x$;

к) $x+\sqrt{2x^2-14x+13}=5$; л) $\sqrt[3]{20+x}+\sqrt[3]{20-x}=4$; м) $\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{9-x}=6$;

н) $\sqrt[3]{12-x}=\sqrt[3]{19+2x}-1$; о) $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{x}=1$; п) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$;

р) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$; с) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$; т) $\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-4x+3}=x$;

у) $\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x+2}=-x$; ф) $\sqrt[4]{10+x+x^2}+\sqrt[4]{7-x-x^2}=3$;

х) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$; ц) $\sqrt{x+1}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=1$; ч) $\sqrt{x^2-\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{7}{x^2}}=x$;

ш) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$; щ) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+4}=4$; ю) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;

я) $\sqrt{1-x^2}=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$.

3. Знайти корені рівняння:

а) $\sqrt[4]{18-x}=2+\sqrt[8]{x-2}$; б) $x^5+x=\sqrt[3]{x-7}$; в) $x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$.

Відповіді до вправ

§ 1. 1. а) $(-\infty; -4)\cup(-4; 1)\cup(1; \infty)$; б) $(-1; 0)\cup(0; 2)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty; 1)\cup(1; 1{,}5)\cup(1{,}5; 2)\cup(2; \infty)$; **4.** а) $x = 1$; б) $x \in \varnothing$; в) $x \in \varnothing$. **5.** а) $x \in \{1; 3\}$; б) $x \in \{-2; -1; 1; 2\}$. **6.** а) $x = 3$; б) $x = 4$; в) $x = 2$. **7.** а) так; б) ні; в) ні; г) так; д) ні; е) ні. **8.** а) $x \in \{-3; 1\}$; б) $x = 3$.

§ 2. 1. а) $x = 7\frac{4}{7}$; б) $x = -\frac{23}{58}$; в) $x = \frac{9}{41}$. **2.** а) при $a \neq \pm 1$ $x = \frac{2a+3}{a-1}$, при $a = -1$ розв'язків немає, при $a = 1$ $x \in \mathbf{R}$; б) при $a \neq 1$, $a \neq -\frac{2}{5}$, $a \neq \frac{9}{4}$ $x = \frac{31-2a}{4a-9}$; при $a = \frac{9}{4}$ та $a = -\frac{2}{5}$ розв'язків немає, при $a = 1$ рівняння не має сенсу. **3.** а) $x \in \varnothing$; б) $x \in \varnothing$; в) $x = \frac{1}{3}$.

§ 3. 1. а) $x \in \left\{0; \frac{7}{2}\right\}$; б) $x \in \left\{0; 1\frac{1}{4}\right\}$; в) $x \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$; г) $x \in \left\{0; -\frac{5}{3}\right\}$; д) $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; е) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$; є) $x = \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$; ж) $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; з) $x \in \varnothing$; и) $x \in \varnothing$; і) $x \in \varnothing$; ї) $x \in \varnothing$; й) $x \in \left\{-1; \frac{4}{5}\right\}$; к) $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$; л) $x = -5 \pm 3\sqrt{3}$; м) $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{4}$; н) $x = \frac{1}{2}$; о) $x = \frac{1}{3}$; п) $x = 1$; р) $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$; с) $x \in \varnothing$; т) $x \in \varnothing$; у) $x \in \varnothing$; ф) $x \in \varnothing$; х) $x \in \left\{-2\frac{2}{7}; 3\right\}$; ц) $x \in \{2; 3\}$; ч) $x \in \{-9{,}5; 3\}$; ш) $x \in \{-3; 4\}$; щ) при $a \neq 1$, $a \neq 2$ $x = \frac{a-1\pm\sqrt{5a^2-10a+9}}{2}$; при $a = 2$ $x = 2$; при $a = 1$ рівняння не має сенсу. **2.** Два корені при $c < 4$, один корінь при $c = 4$, немає коренів при $c > 4$. **8.** $\frac{7}{9}$. **9.** При $s = 4$ $x_1 = x_2 = 2$. **10.** При $a = \frac{5}{2}$. **11.** При $b = -4\frac{2}{3}$. **12.** а) $\frac{n-2}{n+5}$; б) $\frac{3+n}{5-n}$; в) $\frac{3-n}{n+1}$; г) $\frac{n-10}{n+3}$. **13.** $5x^2 + 13x + 4 = 0$. **14.** $25x^2 - 56x + 4 = 0$. **15.** а) $x \in \left\{1; -\frac{3}{4}\right\}$; б) $x \in \left\{1; -\frac{5}{2}\right\}$; в) $x \in \{1; 8\}$; г) $x \in \left\{\frac{2}{5}; 1\right\}$. **16.** При $a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$. **17.** $a \in (-3; -2)$. **18.** При $a \in \left[\frac{16}{17}; 2\right)$. **19.** При $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$. **20.** При $a > 1$. **21.** Ні. **22.** При $a \leq \frac{3}{4}$. **23.** Ні. **24.** $a \in \varnothing$. **25.** При $a \in \left(-1; \frac{2}{5}\right)$. **26.** При $a < -2\frac{2}{7}$. **27.** При $a \in \left\{1; \frac{24-\sqrt{605}}{2}; \frac{24+\sqrt{605}}{2}\right\}$.

§ 4. 1. а) $x = -\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$; б) $x = \pm\sqrt[6]{\frac{7}{4}}$; в) $x \in \varnothing$. **2.** а) $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt[8]{3}$; б) $x = \pm 1$; в) $x \in \left\{-\sqrt[5]{6}; 1\right\}$; г) $x \in \varnothing$; д) $x = \pm\sqrt[4]{2}$. **3.** а) $x = \pm 1$; б) $x = \pm\frac{1}{2}$, $x = \pm 1$; в) $x \in \varnothing$. **5.** 1) при $a \in$

$\in\left(0;\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$; 2) при $a\in(-1;0]\cup\left\{\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right\}$, 3) при $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};\infty\right)$. **6.** а) $x=$ $=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$; б) $x\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$; в) $x\in\varnothing$; г) $x\in\left\{-1;\frac{9-\sqrt{17}}{8};\frac{9+\sqrt{17}}{8}\right\}$; д) $x\in\left\{-1;\frac{-\sqrt{7}-1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}}{2};\right.$ $\left.\frac{-\sqrt{7}-1+\sqrt{4+2\sqrt{7}}}{2}\right\}$. **7.** $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+3\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$. **8.** а) $x=\frac{1}{4}\left(-5-\sqrt{41}\pm\sqrt{34+10\sqrt{41}}\right)$; б) $x\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$; в) $x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{13}\right)$; г) $x\in\left\{3;\frac{1}{2}\left(-\sqrt{10}-3\pm\sqrt{6\sqrt{10}-17}\right)\right\}$. **9.** $x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\right.$ $\left.\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. **10.** а) $x=\frac{7\pm\sqrt{57}}{2}$, $x=\frac{21\pm\sqrt{489}}{6}$; б) $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$; в) $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$; г) $x=-1$; д) $x\in\{-1;4\}$; е) $x\in\left\{-\frac{9}{16};\frac{1}{2}\right\}$; ж) $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$; з) $x\in\left\{-6;-4;\ \frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}\right\}$; и) $x\in\{-2;-3\}$; і) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; ї) $x\in\{-4;-2\}$; й) $x=\frac{25\pm\sqrt{513}}{8}$; к) $x=7\pm\sqrt{34}$. **11.** $x\in\varnothing$. **12.** а) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}$; в) $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **13.** а) $x\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right\}$; б) $x\in\left\{\sqrt{3};\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}\right\}$; в) $x\in\left\{\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2};\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right\}$. **14.** а) $x=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$; б) $x\in\{1;3\}$; в) $x=1$; г) $x=-1\pm\sqrt{3}$; $x=-2\pm\sqrt{2}$; д) $x\in\varnothing$.

§ 5. 2. а) $x\in\{1;4\}$; б) $x=-7$; в) $x=3$; г) $x=3$; д) $x=2$; е) $x=4\frac{1}{4}$; є) $x=60-42\sqrt{2}$; ж) $x\in\varnothing$; з) $x=2$; и) $x=4$; і) $x\in\left\{3\frac{1}{5};4\right\}$; й) $x=2$; к) $x=-2$; л) $x=\pm14\sqrt{2}$; м) $x\in\varnothing$; н) $\sqrt{x}=4$; о) $x=0$; п) $x\in\left\{1;\frac{3}{2};2\right\}$; р) $x\in\left\{8;\frac{56\pm12\sqrt{21}}{7}\right\}$; с) $x=-2$; т) $x=\frac{2\pm2\sqrt{43}}{7}$; у) $x=-2$; ф) $x\in\{-3;2\}$; х) $x\in\{16;96\}$; ц) $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; ч) $x=2$; ш) $x\in\{1;2;10\}$; щ) $x=4$; ю) $x\in\{-1;5\}$; я) $x\in\{0;1\}$. **3.** а) $x=2$; б) $x=-1$; в) $x=-1$.

Тема 6. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

§ 1. Рівносильні системи рівнянь

Раніше ми вже зустрічалися з системами рівнянь з одним невідомим. Розглянемо докладніше системи рівнянь з двома та трьома невідомими. Нехай задано два рівняння з двома невідомими

$$f_1(x, y) = g_1(x, y) \quad \text{та} \quad f_2(x, y) = g_2(x, y)$$

і потрібно знайти всі пари $(x_0; y_0)$, що задовольняють кожному з цих рівнянь. Тоді кажуть, що задано систему рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ f_2(x,y) = g_2(x,y). \end{cases}$$

Втім система з двома невідомими може мати більше двох рівнянь.

Аналогічно означаються і системи рівнянь з трьома або більшим числом невідомих.

Розглянемо як приклад систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$$

Пара чисел (1;1) називається розв'язком системи, бо вона задовольняє обидва її рівняння. Розв'язати систему рівнянь — це означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає. Система рівнянь, що має хоч один розв'язок, називається *сумісною*. Якщо система не має розв'язків, вона називається *несумісною*. Дві системи рівнянь називаються *рівносильними*, якщо будь-який розв'язок першої системи є розв'язком другої і всякий розв'язок другої системи є розв'язком першої. Дві несумісні системи вважаються рівносильними. Процес розв'язку системи рівнянь полягає в послідовній заміні даної системи рівносильною системою простішого вигляду.

Наводимо основні теореми про рівносильність систем рівнянь.

Теорема 1. *Якщо в системі рівнянь замінити будь-яке рівняння рівносильним, то одержимо систему, рівносильну даній.*

Теорема 2. *Система рівнянь*

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} f(x,y) + \varphi(x,y) \cdot g(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

де функція $\varphi(x, y)$ визначена при всіх допустимих значеннях невідомих даної системи. Зокрема, функція $\varphi(x, y)$ може бути константою.

Теорема 3. *Система рівнянь*

$$\begin{cases} y = f(x), \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

рівносильна системі

$$\begin{cases} y = f(x), \\ g(x, f(x)) = 0. \end{cases}$$

Наслідок. *Якщо із одного рівняння системи виразити одне невідоме через інше, а потім підставити цей вираз в усі інші рівняння системи, то одержимо рівносильну систему.*

Метод розв'язання системи рівнянь, що грунтується на теоремі 3, називається *методом підстановки*. На теоремі 2 грунтується метод алгебраїчного додавання рівнянь.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 3x^2 - y^2 = -6. \end{cases}$$

* Із першого рівняння знаходимо, що

$$x = 7 - 2y. \qquad (6.1)$$

Підставляючи це значення x у друге рівняння, одержимо $3(7 - 2y)^2 - y^2 = -6$ або $11y^2 - 84y + 153 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{51}{11}$. Тепер із рівняння (6.1) маємо

$x_1 = 7 - 2y_1 = 7 - 2 \cdot 3 = 1, x_2 = 7 - 2y_2 = 7 - 2 \cdot \frac{51}{11} = -\frac{25}{11}$. Відповідь: $(1;3), \left(-\frac{25}{11}; \frac{51}{11}\right)$. *

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y + xy = 5, \\ x^2 + 3y - xy = 9. \end{cases}$$

* Додаючи почленно рівняння системи, одержимо

$$\begin{cases} x^2 + x + 2y = 14, \\ x^2 + 3y - xy = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{14 - x - x^2}{2}, \\ x^2 + 3 \cdot \dfrac{14 - x - x^2}{2} - x \cdot \dfrac{14 - x - x^2}{2} = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\left(14 - x - x^2\right), \\ x^3 - 17x + 24 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\left(14 - x - x^2\right), \\ (x-3)\left(x^2 + 3x - 8\right) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\left(14 - x - x^2\right), \\ x \in \left\{3; \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}\right\}. \end{cases}$$

Тепер одержимо $x = 3$; $y = \frac{1}{2}\left(14 - 3 - 3^2\right) = 1$;

$$x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}, y = \frac{1}{2}\left(14 - \frac{-3 - \sqrt{41}}{2} - \frac{\left(-3 - \sqrt{41}\right)^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{41}\right);$$

$$x=\frac{-3+\sqrt{41}}{2},\ y=\frac{1}{2}\left(14-\frac{-3+\sqrt{41}}{2}-\frac{\left(-3+\sqrt{41}\right)^2}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{41}\right).$$

Відповідь: $(3;1)$, $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};\frac{3-\sqrt{41}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{41}-3}{2};\frac{\sqrt{41}+3}{2}\right)$.*

§ 2. Системи лінійних рівнянь

2.1. Система

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

називається *системою лінійних рівнянь з двома невідомими*

$$\left(a_1^2+b_1^2\neq 0 \text{ і } a_2^2+b_2^2\neq 0\right).$$

Свою назву така система отримує від того, що обидва рівняння системи є рівняннями прямих ліній. З геометричної точки зору розв'язок такої системи — це координати точки перетину цих прямих. Можливі три випадки.

1. *Прямі перетинаються.* Система має єдиний розв'язок. У цьому випадку кутові коефіцієнти прямих не рівні,

$$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2} \text{ або } \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}. \tag{6.2}$$

Домножимо перше рівняння на b_2, а друге — на b_1:

$$\begin{cases}a_1b_2x+b_2b_1y=b_2c_1,\\ a_2b_1x+b_2b_1y=b_1c_2.\end{cases}$$

Віднімаючи друге рівняння від першого почленно, маємо $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$ і $x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$. Далі знаходимо, що $y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

2. *Прямі паралельні.* В цьому випадку розв'язків немає. Виконується умова

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}. \tag{6.3}$$

3. *Прямі збігаються.* В цьому випадку система має безліч розв'язків. Виконується умова

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}. \tag{6.4}$$

У цьому випадку всі розв'язки системи задаються парами виду $\left(x=t,\ y=\frac{c_1-a_1t}{b_1}\right)$, де $t\in\mathbf{R}$.

Розглянемо характерні приклади.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x-2y=7, \\ 2x+5y=3. \end{cases}$$

* У даному разі $a_1 = 3$, $b_1 = -2$, $a_2 = 2$, $b_2 = 5$.

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, отже система має єдиний розв'язок.

Для розв'язання системи лінійних рівнянь є декілька методів. Застосуємо метод алгебраїчного додавання рівнянь. Домножимо перше рівняння на 2, а друге на –3:

$$\begin{cases} 6x-4y=14, \\ -6x-15y=-9. \end{cases}$$

Тепер додамо рівняння системи і одержимо рівняння $-19y = 5$, звідки $y=-\frac{5}{19}$. Далі знаходимо $x=\frac{41}{19}$. Відповідь: $\left(2\frac{3}{19};-\frac{5}{19}\right)$. *

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 4x-6y=8. \end{cases}$$

* У даному разі $a_1 = 2$, $b_1 = -3$, $c_1 = 5$, $a_2 = 4$, $b_2 = -6$, $c_2 = 8$. Виконується умова (6.3), отже розв'язків немає. У цьому можна переконатися й іншим шляхом. Домноживши перше рівняння на –2 і додавши одержане рівняння до другого рівняння, маємо $0 = -2$, що приводить до протиріччя. Відповідь: розв'язків немає. *

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=6. \end{cases}$$

У даному разі виконується умова (6.4). Система має безліч розв'язків, що мають вигляд $\left(x=t, y=\frac{t-3}{2}\right)$, де $t \in \mathbf{R}$. Відповідь: $\left(t;\frac{t-3}{2}\right), t \in \mathbf{R}$. *

4. Знайти всі значення параметра a, при яких система

$$\begin{cases} 2x+\left(25a^2-2\right)y=5a, \\ x+y=1 \end{cases}$$

не має розв'язків.

* Згідно з умовою (6.3) $\frac{2}{1}=\frac{25a^2-2}{1}\neq\frac{5a}{1}$. Отже,

$$\begin{cases} 25a^2=4, \\ 5a\neq 2, \end{cases}$$

звідки $a=-\frac{2}{5}$. Відповідь: $a=-\frac{2}{5}$. *

5. Знайти всі значення параметра a, при яких система

$$\begin{cases} 2x+(a-1)y=3, \\ 4x+\left(a+\dfrac{1}{2}\right)y=2a+1 \end{cases}$$

має безліч розв'язків.

* Згідно з умовою (6.4) маємо

$$\frac{2}{4}=\frac{a-1}{a+\frac{1}{2}}=\frac{3}{2a+1},$$

звідки $a=\frac{5}{2}$. Відповідь: $a=\frac{5}{2}$.*

6. При яких значеннях параметра b система

$$\begin{cases} 4x-3y=10, \\ bx+y=7 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

* Згідно з умовою (6.2) $\frac{4}{b}\neq\frac{-3}{1}$, звідки $b\neq-\frac{4}{3}$. Відповідь: при $b\neq-\frac{4}{3}$. *

7. При кожному дійсному значенні a розв'язати систему

$$\begin{cases} ax+y=2, \\ x+y=2a. \end{cases}$$

* Якщо $\frac{a}{1}\neq\frac{1}{1}$, тобто при $a\neq 1$, система має єдиний розв'язок. Знайдемо його. Віднявши від першого рівняння друге, маємо $(a-1)x=2(1-a)$, $x=-2$. Далі $y=2a+2$. Якщо $a=1$, система має вигляд

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Вона має безліч розв'язків типу $(x=t,\ y=2-t)$, $t\in\mathbf{R}$. Відповідь: $(-2;\ 2a+2)$ при $a\neq 1$; $(t;\ 2-t)$, $t\in\mathbf{R}$ при $a=1$.*

8. Знайти всі значення параметра a такі, що для будь-якого b знайдеться хоч одне значення c, при якому система рівнянь

$$\begin{cases} 2x+by=c^2, \\ bx+2y=ac-1 \end{cases}$$

має хоча б один розв'язок.

*Якщо $\frac{2}{b}\neq\frac{b}{2}$, тобто при $b\neq\pm 2$, система має єдиний розв'язок при будь-якому значенні a.

При $b=2$ маємо систему

$$\begin{cases} 2x+2y=c^2, \\ 2x+2y=ac-1. \end{cases}$$

Ця система має розв'язки лише за умови, що виконується рівність $c^2=ac-1$ або $c^2-ac+1=0$. Ми одержали квадратне рівняння. Воно має розв'язки за умови, що $D=a^2-4\geq 0$, тобто при $a\leq -2$ або $a\geq 2$.

При $b = -2$ маємо систему

$$\begin{cases} 2x - 2y = c^2, \\ -2x + 2y = ac - 1. \end{cases}$$

Ця система має розв'язки лише за умови, що виконується рівність $c^2 = 1 - ac$ або $c^2 + ac - 1 = 0$. Це квадратне рівняння має розв'язки при будь-якому a, бо його дискримінант $D = a^2 + 4 > 0$. Відповідь: $a \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. *

2.2. Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

називається *системою лінійних рівнянь з трьома невідомими*.

Ми не ставимо за мету дослідження таких систем. Покажемо на прикладах, як їх розв'язувати.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y + z = 8, \\ 4x - y + 2z = 8, \\ 2x + 2y - z = 3. \end{cases}$$

* Із першого рівняння системи маємо $y = 8 - z - 3x$. Підставляючи це значення y в друге і третє рівняння системи, одержимо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} 4x - (8 - z - 3x) + 2z = 8, \\ 2x + 2(8 - z - 3x) - z = 3, \end{cases} \text{ далі } \begin{cases} 7x + 3z = 16, \\ -4x - 3z = -13, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $z = 3$. Отже, $y = 8 - 3 - 3 \cdot 1 = 2$. Відповідь: (1; 2; 3).*

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0, \\ 2x + y + 2z = 0, \\ 4x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

* Із першого рівняння системи знаходимо, що $y = 3x - z$. Підставимо це значення y в друге і третє рівняння:

$$\begin{cases} 2x + (3x - z) + 2z = 0, \\ 4x - 2(3x - z) + 3z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + z = 0, \\ -2x + 5z = 0, \end{cases}$$

звідки $x = z = 0$. Далі знаходимо $y = 3 \cdot 0 - 0 = 0$. Відповідь: (0; 0; 0).*

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 2x + 3y + 4z = 0, \\ 3x + 4y + 12z = 0. \end{cases}$$

* Із першого рівняння маємо $x = -2y + 4z$. Підставляючи це значення x в друге і третє рівняння системи, матимемо

$$\begin{cases} 2(-2y + 4z) + 3y + 4z = 0, \\ 3(-2y + 4z) + 4y + 12z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -y + 12z = 0, \\ -2y + 24z = 0. \end{cases}$$

Одержана система має безліч розв'язків виду ($y = 12t$; $z = t$), $t \in \mathbf{R}$. Тоді $x = -24t + 4t = -20t$. Відповідь: $(-20t; 12t; t)$, $t \in \mathbf{R}$.*

4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ 3x + 2y + z = 4, \\ 4x + 3y + 3z = 6. \end{cases}$$

* Із першого рівняння маємо $z = 2x + y - 3$. Підставимо це значення z в друге і третє рівняння системи:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2x + y - 3 = 4, \\ 4x + 3y + 3(2x + y - 3) = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 3y = 7, \\ 10x + 6y = 15. \end{cases}$$

Остання система несумісна, отже, і вихідна система несумісна. Відповідь: немає розв'язків. *

Вправи

1. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 2y = 7, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 3, \\ 5x + 2y = 4, \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$

2. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x - 5y = 2, \\ 6x - 10y = 7, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 4y = 3, \\ 4x - 7y = 6. \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 4x + 8y = 12, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 7y = 4, \\ 3x - 21y = 12. \end{cases}$

4. Знайти всі значення параметра a, при яких система

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ ax - 3y = 8 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

5. При яких значеннях a система

$$\begin{cases} ax - 6y = a + 1, \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

не має розв'язків?

6. Знайти всі значення параметра a, при яких система

$$\begin{cases} 3x - (a+1)y = 4, \\ 6x - (3a-7)y = a - 1 \end{cases}$$

має безліч розв'язків.

7. При кожному дійсному значенні a розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x - ay = 4, \\ x + 2y = a, \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a+1)x - 4y = 1, \\ 3x - ay = 2. \end{cases}$

8. Знайти всі значення a такі, що для будь-якого b знайдеться хоча б одне значення c, при якому система

$$\begin{cases} x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$$

має хоч один розв'язок.

9. Розв'язати систему рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 3x+y+z=5. \\ 2x+3y+z=1, \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 3x+y+2z=2. \\ 2x+3y+z=3. \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases} 3x+2y+z=0, \\ x+3y+2z=0, \\ 2x+y+3z=0, \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 2x-y-2z=0, \\ x+3y-4z=0, \\ x+2y+z=0. \end{cases}$$

11. Розв'язати систему рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases} x+2y+3z=0. \\ 3x+y+2z=0, \\ 10x+15y+23z=0, \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 2x-y+3z=0, \\ 3x-2y+z=0, \\ -6x+5y+5z=0. \end{cases}$$

12. Розв'язати систему рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 3x+y+2z=1, \\ 10x+15y+23z=1, \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x+y+2z=3, \\ 4x-3y+2z=4, \\ 6x-y+6z=1. \end{cases}$$

§ 3. Системи нелінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими

3.1. Нехай є система двох рівнянь з двома невідомими x та y. В ряді випадків одне невідоме, наприклад y, вдається визначити через друге невідоме. Після цього значення y підставляють у друге рівняння й одержують рівняння з одним невідомим x. Це рівняння називається *вивідним рівнянням* системи. Метод розв'язання системи рівнянь таким чином має назву *методу підстановки*.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y-x^2=1, \\ y^2-y-x^4=4. \end{cases}$$

* Із першого рівняння системи маємо $y = 1 + x^2$.

Підставимо це значення y в друге рівняння:

$$\left(1+x^2\right)^2-\left(1+x^2\right)-x^4=4 \text{ або } x^2=4. \qquad \text{(П6.1)}$$

Ми одержуємо вивідне рівняння системи (П6.1).

Далі $x = \pm 2$, $y = 1 + 4 = 5$. Відповідь: (2; 5) або (–2; 5).*

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x-2y=5. \\ 3x^2-y^2+4y=-2. \end{cases}$$

* Із першого рівняння системи маємо $x=\frac{5+2y}{3}$. Підставляючи це значення x в друге рівняння, одержуємо

$$3\left(\frac{5+2y}{3}\right)^2 - y^2 + 4y = -2 \text{ або } y^2 + 32y + 31 = 0. \qquad (П6.2)$$

Розв'язуючи вивідне рівняння (П6.2), маємо $y_1 = -1, y_2 = -31$. Відповідно $x_1 = 1, x_2 = -19$. Відповідь: (1; –1), (–19; –31).*

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 3\frac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

* Нехай $\frac{x+y}{x-y} = z$. Із першого рівняння системи маємо

$$z + \frac{1}{z} = \frac{10}{3}, 3z^2 - 10z + 3 = 0, z = 3 \text{ або } z = \frac{1}{3}.$$

Тепер розглянемо два випадки.

1) $\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 3, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Підставляючи значення x в друге рівняння, одержимо вивідне рівняння системи $4y^2 + y^2 = 5$, $y = \pm 1$. Відповідно $x = \pm 2$. Ми знайшли два розв'язки (2; 1) та (–2; –1).

2) $\begin{cases} z = \frac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x = -2y, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Тут вивідне рівняння має вигляд $(-2y)^2 + y^2 = 5, y^2 = 1, y = \pm 1$. Відповідно $x = \mp 2$. Ми одержали ще два розв'язки (–2; 1), (2; –1). Відповідь: (2; 1), (–2; –1), (–2; 1), (2; –1).*

3.2. Система рівнянь виду

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

називається системою однорідних рівнянь, бо ліві частини обох рівнянь — однорідні многочлени. Якщо одне з чисел d_1, d_2 дорівнює нулю, то з відповідного рівняння можна знайти зв'язок між невідомими x та y.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 7, \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

* Перевіримо, чи має система рівнянь такі розв'язки, в яких $y = 0$. Підставляючи в обидва рівняння $y = 0$, маємо систему

$$\begin{cases} 3x^2 = 7, \\ 2x^2 = 0, \end{cases}$$

яка не має розв'язків. Отже, $y \neq 0$. Розділимо обидві частини другого рівняння вихідної системи на y^2: $2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} - 2 = 0$. Покладемо $\frac{x}{y} = t$, тоді $2t^2 - 3t - 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Отже, $x = 2y$ або $x = -\frac{1}{2}y$.

Розглянемо два випадки.

1) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 7, \\ x = 2y. \end{cases}$ $\begin{cases} 12y^2 - 4y^2 - y^2 = 7, \\ x = 2y \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 1, \\ x = \pm 2. \end{cases}$

Маємо два розв'язки (2; 1) та (–2; –1).

2) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 7, \\ x = -\frac{1}{2}y, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3}{4}y^2 + y^2 - y^2 = 7, \\ x = -\frac{1}{2}y, \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \\ x = \mp\sqrt{\frac{7}{3}}. \end{cases}$

Маємо два розв'язки: $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; 2\sqrt{\frac{7}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{7}{3}}; -2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$. Відповідь: (2; 1), (–2; –1), $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; 2\sqrt{\frac{7}{3}}\right), \left(\sqrt{\frac{7}{3}}; -2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$. * Якщо $d_1 \cdot d_2 \neq 0$, можна звести розв'язання до першого випадку.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 3y^2 = 10, \\ x^2 + xy - 2y^2 = -5. \end{cases}$$

* Зрівняємо праві частини рівнянь. Для цього домножимо обидві частини другого рівняння на –2. Маємо систему

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 3y^2 = 10, \\ -2x^2 - 2xy + 4y^2 = 10. \end{cases}$$

Тепер віднімемо друге рівняння одержаної системи від першого: $4x^2 - y^2 = 0$, $y = \pm 2x$.

Розглянемо два випадки.

1) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = -5, \\ y = 2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2x^2 - 8x^2 = -5, \\ y = 2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 1, \\ y = 2x. \end{cases}$

Маємо два розв'язки (1; 2) та (–1; –2).

2) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = -5, \\ y = -2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x^2 - 8x^2 = -5, \\ y = -2x, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}, \\ y = -2x. \end{cases}$

Маємо ще два розв'язки $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ та $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$. Відповідь: (1; 2), (–1; –2), $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$. *

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3xy^2 - x^2y - 2x^3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

* В цій системі є розв'язки, для яких $x = 0$.
При $x = 0$ друге рівняння має вигляд $y^2 = 8$.
Отже, система має розв'язки $\left(0; 2\sqrt{2}\right)$ і $\left(0; -2\sqrt{2}\right)$.

Якщо $x \neq 0$, розділимо обидві частини першого рівняння на x^3: $3\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} - 2 = 0$ або $3t^2 - t - 2 = 0$, де $t = \frac{x}{y}$. Далі $t = 1$ або $t = -\frac{2}{3}$.

1) $t = 1$. Маємо систему

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ x^2 = 4. \end{cases}$$

Два розв'язки (2; 2) та (–2; –2).

2) $t = -\frac{2}{3}$. Маємо систему

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ y^2 = \frac{72}{13}. \end{cases}$$

Ще два розв'язки $\left(-4\sqrt{\frac{2}{13}}; 6\sqrt{\frac{2}{13}}\right), \left(4\sqrt{\frac{2}{13}}; -6\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$. Відповідь: $\left(0; 2\sqrt{2}\right), \left(0; -2\sqrt{2}\right)$, (2; 2), (–2; –2), $\left(-4\sqrt{\frac{2}{13}}; 6\sqrt{\frac{2}{13}}\right), \left(4\sqrt{\frac{2}{13}}; -6\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$. *

3.3. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ xy(x + y) = 6. \end{cases} \tag{6.5}$$

* Якщо змінити місцями x і y, то система не зміниться. Така система називається *симетричною*. Найпростішою симетричною системою є система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Згідно з теоремою Вієта квадратне рівняння з коренями x та y має вигляд $t^2 - at + b = 0$. Якщо це рівняння має корені t_1, t_2, то система має розв'язки $(t_1; t_2)$ та $(t_2; t_1)$. Повернемося до системи (6.5). Запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} 2(x + y) = 3xy, \\ xy(x + y) = 6. \end{cases}$$

Покладемо $x + y = u$, $xy = v$. (Ці підстановки є характерними для розв'язання будь-якої симетричної системи.) Маємо

$$\begin{cases} 2u = 3v, \\ uv = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{2}{3}v, \\ uv = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{3}{2}v, \\ \frac{3}{2}v^2 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{3}{2}v, \\ v^2 = 4. \end{cases}$$

Два розв'язки ($u = 3$; $v = 2$), ($u = -3$; $v = -2$).

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$

Складаємо квадратне рівняння $t^2 - 3t + 2 = 0$ і одержуємо два розв'язки системи (1; 2) та (2; 1).

2) $\begin{cases} x + y = -3, \\ xy = -2. \end{cases}$

Складаємо квадратне рівняння $t^2 + 3t - 2 = 0$ і одержуємо ще два розв'язки системи $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$ та $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$. Відповідь: (1; 2), (2; 1), $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$. *

Розглянемо декілька прикладів.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ x + xy + y = 3. \end{cases}$$

* Зробимо стандартні підстановки $x + y = u$, $xy = v$. Помітимо, що $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Наша система має вигляд

$$\begin{cases} u^2 - v = 3, \\ u + v = 3. \end{cases}$$

Додавши обидва рівняння системи, одержимо вивідне рівняння $u^2 + u = 6$, звідки $u_1 = 2$ або $u_2 = -3$. Відповідно $v_1 = 1$ або $v_2 = 6$.

Розглянемо два випадки.

1) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$

Складаємо квадратне рівняння $t^2 - 2t + 1 = 0$, $t = 1$. Система має єдиний розв'язок (1; 1).

2) $\begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 6. \end{cases}$

Складаємо квадратне рівняння $t^2 + 3t + 6 = 0$. Розв'язків немає. Відповідь: (1; 1).*

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17. \\ x^3y + xy^3 = 10. \end{cases}$$

* Запишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=17,\\ xy\left(x^2+y^2\right)=10.\end{cases}$$

Покладемо $x^2+y^2=p\geq 0$, $xy=q$. Система має вигляд

$$\begin{cases}p^2-2q^2=17,\\ qp=10.\end{cases}$$

Із другого рівняння $q=\frac{10}{p}$ підставляємо в перше рівняння: $p^2-2\frac{100}{p^2}=17$, $p^4-17p^2-200=0$,

$$p^2=\frac{17\pm 33}{2},\ p^2=25,\ p=5\ (\text{адже } p\geq 0).$$

Відповідно $q=\frac{10}{5}=2$. Маємо систему

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ xy=2.\end{cases}$$

Із другого рівняння $y=\frac{2}{x}$ підставимо у перше рівняння: $x^2+\frac{4}{x^2}=5$, $x^4-5x^2+4=0$, $x^2=1$ або $x^2=4$. Звідси одержуємо чотири розв'язки системи: (1; 2), (–1; –2), (2; 1), (–2; –1).
Відповідь: (1; 2), (–1; 2), (2; 1), (–2; –1). *

3.4. Розв'яжемо ще декілька систем рівнянь різними способами.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{3}{x+2y-1}+\frac{2}{x-y+1}=2,\\ \frac{4}{x+2y-1}-\frac{1}{x-y+1}=\frac{5}{6}.\end{cases}$$

*Покладемо $\frac{1}{x+2y-1}=a$, $\frac{1}{x-y+1}=b$ і одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}3a+2b=2,\\ 4a-b=\frac{5}{6},\end{cases}$$

звідки $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}$. Тепер маємо нову систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}x+2y-1=3,\\ x-y+1=2,\end{cases}$$

звідки $x=2, y=1$. Відповідь: (2; 1).*

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}(5x-1)(3y+2)=(2x+1)(9y-2).\\ (3x+2)(2y-9)=-(x+2)(y+9).\end{cases}$$

* Після розкриття дужок і зведення подібних членів маємо систему

$$\begin{cases} 3xy+12y-14x=0, \\ 7xy+6y-18x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} xy=\frac{1}{3}(14x-12y), \\ xy=\frac{1}{7}(18x-6y). \end{cases}$$

Звідси маємо $\frac{1}{3}(14x-12y)=\frac{1}{7}(18x-6y)$, $x=\frac{3}{2}y$. Тепер із першого рівняння вихідної системи маємо

$$\left(\frac{15}{2}y-1\right)(3y+2)=(3y+1)(9y-2),\ 9y^2-18y=0,\ y_1=0,\ y_2=2.$$

Відповідно $x_1=0$, $x_2=3$. Відповідь: (0; 0), (3; 2).*

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2-3y=23, \\ 3y^2-8x=59. \end{cases}$$

* Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} 2(x^2-4)=3(y+5), \\ 8(x-2)=3(y^2-25). \end{cases}$$

Зрозуміло, що пара (2; –5) є розв'язком системи. Розділимо почленно перше рівняння на друге:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{1}{y-5} \quad \text{або} \quad (x+2)(y-5)=4. \qquad (П6.3)$$

Запишемо вихідну систему у вигляді

$$\begin{cases} 2(x^2-16)=3(y-3), \\ 8(x+4)=3(y^2-9). \end{cases}$$

Тепер видно, що пара (–4; 3) також є розв'язком вихідної системи. Розділимо почленно перше рівняння на друге рівняння останньої системи:

$$\frac{x-4}{4}+\frac{1}{y+3} \quad \text{або} \quad (x-4)(y+3)=4. \qquad (П6.4)$$

Рівняння (П6.3) і (П6.4) складають систему

$$\begin{cases} (x+2)(y-5)=4, \\ (x-4)(y+3)=4. \end{cases}$$

Звідси $(x+2)(y-5)=(x-4)(y+3)$ і $3y=4x-1$. Із першого рівняння вихідної системи маємо $2x^2-(4x-1)=23$, $x=1\pm2\sqrt{3}$. Далі $y=\frac{3\pm8\sqrt{3}}{3}$. Ми одержали ще дві пари розв'язків. Перевірка підтверджує, що ці розв'язки підходять. Відповідь: (2; –5), (–4; 3), $\left(1+2\sqrt{3}; \frac{3+8\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(1-2\sqrt{3}; \frac{3-8\sqrt{3}}{3}\right)$.*

4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$$

* Додавши рівняння системи, одержимо $(x + y)^2 + (x + y) = 30$, звідки $x + y = -6$ або $x + y = 5$. Маємо два випадки.

1) $x + y = -6$, $x = -y - 6$. Із першого рівняння вихідної системи одержимо $(-y - 6)^2 - (y + 6)y - -y - 6 = 10$, $y = -4$, $x = -2$. Ми одержали розв'язок $(-2; -4)$.

2) $x + y = 5$, $x = 5 - y$. Із першого рівняння вихідної системи одержимо $(5 - y)^2 + (5 - y)y + 5 - -y = 10$, $y = \frac{10}{3}$, $x = \frac{5}{3}$. Іще один розв'язок $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$. Обидва розв'язки витримують перевірку.

Відповідь: $(-2; -4)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$. *

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{y + 7x} + \sqrt{y + 2x} = 5, \\ \sqrt{y + 2x} - y + x = 1. \end{cases}$$

* Віднімаючи друге рівняння від першого, одержимо $\sqrt{y + 7x} + y - x = 4$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{y + 7x} = 4 + x - y, \\ \sqrt{y + 2x} = 1 - x + y. \end{cases} \quad \text{Далі} \quad \begin{cases} y + 7x = (4 + x - y)^2, \\ y + 2x = (1 - x + y)^2. \end{cases}$$

Віднявши друге рівняння від першого, маємо $5x = 5(3 + 2x - 2y)$, звідки $x = 2y - 3$. Підставляючи це значення x в друге рівняння вихідної системи, маємо $\sqrt{5y - 6} = 4 - y$, $5y - 6 = 16 - 8y + + y^2$, $y = 2$ або $y = 11$. Перевіркою встановимо, що $y = 11$ не підходить. Отже, $y = 2$ і $x = 1$.
Відповідь: $(1; 2)$.* Перевірку зробіть самостійно.

6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 10(y - x) - x^4 = 9, \\ \sqrt{y} + \sqrt{y - 2x} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

* Із другого рівняння $\sqrt{y - 2x} = \sqrt{2} - \sqrt{y}$, $y - 2x = 2 + y - 2\sqrt{2y}$, $\sqrt{2y} = 1 + x$, $y = \frac{1}{2}(1 + x)^2$. Тепер із першого рівняння системи маємо $10\left(\frac{1}{2}(1 + x)^2 - x\right) - x^4 = 9$, $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Ми одержали для x чотири значення: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$. Відповідно маємо $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = \frac{1}{2}$, $y_4 = \frac{9}{2}$. Перевірка свідчить про те, що підходять пари $(-1; 0)$, $(1; 2)$. Відповідь: $(-1; 0)$, $(1; 2)$.*

Вправи

1. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy = 6, \\ 2x - y - 4 = 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 16, \\ x + y - 5 = 0, \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=3\dfrac{1}{3}, \\ x^2-y^2=8. \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=3\dfrac{1}{3}, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

2. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x^2-5xy-3y^2=0, \\ x^2+y^2=10, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2-xy-12y^2=0, \\ x^2+2y^2=17, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+3xy=18, \\ xy+5y^2=8, \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ xy+2y^2=3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ x^2-4xy+5y^2=5, \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=21, \\ x^2+2xy-4y^2=20, \end{cases}$ є) $\begin{cases} 2xy^2+3x^2y-14x^3=0, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 4(x+y)=3xy, \\ x^2+x+y^2+y=26, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x+xy+y=7, \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}, \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5, \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61, \\ xy=12, \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1, \\ x^4+x^2y^2+y^4=1, \end{cases}$ є) $\begin{cases} (x^2+y^2)xy=78, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=1.1, \\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{9}{x+y}=0.1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y-1}+\dfrac{4}{2x+y+1}=1, \\ \dfrac{3}{2x-y-1}+\dfrac{2}{2x+y+1}=1. \end{cases}$

5. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2(x+y)=80, \\ x^2(2x-3y)=80, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=13x+4y, \\ y^2=4x+13y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ x^2+3y^2-xy-4y=-1, \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3+xy^2=40y, \\ y^3+x^2y=10x, \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+y^2=2{,}5xy, \\ x-y=0{,}25xy. \end{cases}$ е) $\begin{cases} (x-y)^2-(x-y)=6, \\ 2(x^2+y^2)=5xy. \end{cases}$

6. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x^2+14y=19, \\ 7y^2+10x=17, \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+x-y=3, \\ x^2y-xy^2=2. \end{cases}$

7. Розв'язати систему рівнянь:

$\begin{cases} \sqrt{2y-x}+x+y=3, \\ \sqrt{5y-x}+x=3. \end{cases}$

§ 4. Системи нелінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

4.1. Ми розглянемо системи з трьома невідомими, що містять три рівняння. Розв'язком такої системи є трійка чисел, яка задовольняє кожне рівняння системи. Звичайно прагнуть одержати вивідне рівняння з одним невідомим.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} yz = 8, \\ x(z-2) = 2, \\ (2-x)(3-y) = 1. \end{cases}$$

* З перших двох рівнянь маємо $y = \frac{8}{z}$, $x = \frac{2}{z-2}$. Підставимо ці значення в третє рівняння: $\left(2 - \frac{2}{z-2}\right)\left(3 - \frac{8}{z}\right) = 1$. Ми одержали вивідне рівняння. Далі одержимо $\frac{2z-6}{z-2} \cdot \frac{3z-8}{z} = 1$, $5z^2 - 32z + 48 = 0$, $z = 4$ або $z = \frac{12}{5}$. Тепер маємо два випадки: 1) $z = 4$, $x = 1$, $y = 2$ 2) $z = \frac{12}{5}$, $y = \frac{10}{3}$. $x = 5$. Відповідь: $(1; 2; 4)$, $(5; 3\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5})$. *

Ефективним є також метод алгебраїчного додавання рівнянь.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y^2 + z^2 = b, \\ z^2 + x^2 = c. \end{cases}$$

де a, b, c — додатні числа, що є довжинами сторін трикутника.

* Додавши почленно всі рівняння системи, одержимо

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = a + b + c, x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Віднімаючи від останнього рівняння кожне рівняння системи, одержуємо $z^2 = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $x^2 = \frac{1}{2}(a + c - b)$, $y^2 = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Звідки маємо відповідь: $\left(\sqrt{\frac{a+c-b}{2}}; \sqrt{\frac{a+b-c}{2}}; \sqrt{\frac{b+c-a}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{a+c-b}{2}}; -\sqrt{\frac{a+b-c}{2}}; -\sqrt{\frac{b+c-a}{2}}\right)$. *

Зауваження. Якщо a, b, c — довжини сторін трикутника, то числа $a + c - b$, $a + b - c$, $b + c - a$ додатні.

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 3. \end{cases}$$

* Перемножимо почленно всі рівняння системи: $x^2y^2z^2 = 6$, $xyz = \pm\sqrt{6}$. Розділимо одержане рівняння на кожне з рівнянь системи: $z = \pm\sqrt{6}$, $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$. Відповідь: $\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. *

4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=72,\\(x+z)(x+y+z)=96,\\(y+z)(x+y+z)=120.\end{cases}$$

* Розділимо почленно перше рівняння на друге і друге рівняння на третє. Одержимо систему

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\[2mm]\dfrac{x+z}{y+z}=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$ Далі $$\begin{cases}4x+4y=3x+3z,\\5x+5z=4y+4z,\end{cases}\quad\begin{cases}x+4y=3z,\\5x-4y=-z.\end{cases}$$

Із останньої системи одержуємо $y = 2x$, $z = 3x$. Тепер із першого рівняння вихідної системи маємо $3x \cdot 6x = 72$, $x = \pm 2$. Відповідно $y = \pm 4$, $z = \pm 6$. Відповідь: (2; 4; 6), (–2; –4; –6).*

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x^2y+yz=8,\\x^2+yz=7,\\x^2y^2+z=7.\end{cases}$$

* Віднімемо від першого рівняння друге: $x^2y - x^2 = 1$. Домножимо третє рівняння на y (перевірте, що $y \neq 0$) і віднімемо одержане рівняння від другого: $x^2 - x^2y^3 = 7 - 7y$. Маємо систему рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases}x^2y-x^2=1,\\x^2-x^2y^3=7-7y,\end{cases}\quad\begin{cases}x^2(y-1)=1,\\x^2(1-y^3)=7(1-y).\end{cases}$$

Із першого рівняння останньої системи видно, що $y \neq 1$. Розділивши обидві частини другого рівняння на $1 - y$, маємо $x^2(1 + y + y^2) = 7$. Ми одержали систему

$$\begin{cases}x^2(y-1)=1,\\x^2(1+y+y^2)=7.\end{cases}$$

Розділимо почленно друге рівняння на перше (враховуючи, що $x \neq 0$):

$$\frac{1+y+y^2}{y-1}=7,$$

звідки $y = 2$ або $y = 4$. Розглянемо два випадки.

1) $y = 2$, тоді $x = \pm 1$, $z = 5$.

2) $y = 4$, тоді $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{5}{3}$. Відповідь: (1; 2; 5), (–1; 2; 5), $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};4;\dfrac{5}{3}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};4;\dfrac{5}{3}\right)$. *

6. Знайти додатні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases}xy(x+y)=6,\\yz(y+z)=12,\\zx(z+x)=30.\end{cases}$$

* Розділимо третє рівняння на перше, а потім третє рівняння на друге й одержимо систему

$$\begin{cases} \frac{z}{y}\cdot\frac{z+x}{x+y}=5, \\ \frac{x}{y}\cdot\frac{z+x}{y+z}=\frac{5}{2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \frac{z}{y}\cdot\frac{\frac{z}{y}+\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}=5, \\ \frac{x}{y}\cdot\frac{\frac{z}{y}+\frac{x}{y}}{1+\frac{z}{y}}=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Поклавши $\frac{x}{y}=a, \frac{z}{y}=b,$ одержимо

$$\begin{cases} b\cdot\frac{b+a}{a+1}=5, \\ a\cdot\frac{b+a}{1+b}=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Із першого рівняння маємо $a=\frac{b^2-5}{5-b}$. Підставимо це значення a в друге рівняння і після спрощень одержимо рівняння $b^3+7b^2-25b-15=0, (b-3)(b^2+10b+5)=0, b_1=3, b_{2,3}=-5\pm 2\sqrt{5}.$

Оскільки $b_{2,3} < 0$, то $b_{2,3}$ не підходять, бо при $\frac{z}{y}<0$ одне з чисел z, y від'ємне. Отже, підходить лише $b = 3$. Далі маємо $a=\frac{9-5}{5-3}=2, z=3y, x=2y.$ Із третього рівняння вихідної системи одержимо $3y\cdot 2y\cdot 5y=30, y^3=1, y=1, x=2, z=3.$ Відповідь: (2; 1; 3).*

Покажемо ще один спосіб.

* Запишемо вихідну систему у вигляді

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ y^2z+yz^2=12, \\ z^2x+zx^2=30. \end{cases}$$

Додамо три рівняння системи:

$$x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2=48.$$

Перемноживши всі рівняння вихідної системи, одержимо

$$\begin{aligned} &x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x)=2160, \\ &x^2y^2z^2(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz)=2160, \\ &x^2y^2z^2(48+2xyz)=2160, x^2y^2z^2(24+xyz)=1080. \end{aligned}$$

Позначимо $xyz = t$ — одержимо

$$t^3+24t^2-1080=0, (t-6)(t^2+30t+180)=0.$$

Одержане рівняння має єдиний додатний корінь $t = 6$. Отже, $xyz = 6$.

Домноживши перше рівняння вихідної системи на z, друге — на x, третє — на y, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=z, \\ y+z=2x, \\ z+x=5y, \end{cases}$$

звідки $x = 2, y = 1, z = 3$. *

4.2. Розглянемо систему симетричних рівнянь з трьома невідомими. Це такі системи, які не змінюються при заміні x на y, y на z, а z на x. Найпростішою системою симетричних рівнянь з трьома невідомими є система

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+zx=b, \\ xyz=c. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Нехай t_1, t_2, t_3 — корені кубічного рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, тоді $t^3 + pt^2 + qt + r = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$ або $t^3 + pt^2 + qt + r = t^3 - (t_1 + t_2 + t_3)t^2 + (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)t - t_1t_2t_3$, звідки

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=-p, \\ t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=q, \\ t_1t_2t_3=-r. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Теорема Вієта (для кубічного рівняння). *Для того щоб числа t_1, t_2, t_3 були коренями кубічного рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась система рівнянь (6.7).*

Для того щоб розв'язати систему рівнянь (6.6), складемо кубічне рівняння $t^3 - at^2 + bt - c = 0$. Якщо це рівняння має три корені x_1, x_2, x_3, то система (6.6) має рівно шість розв'язків $(x_1; x_2; x_3)$, $(x_1; x_3; x_2)$, $(x_2; x_1; x_3)$, $(x_2; x_3; x_1)$, $(x_3; x_1; x_2)$, $(x_3; x_2; x_1)$.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+yz+zx=27. \end{cases}$$

* Із другого рівняння маємо $xy + yz + zx = xyz$, отже, $xyz = 27$. Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ xy+yz+zx=27, \\ xyz=27. \end{cases}$$

Складаємо кубічне рівняння $t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0, (t-3)^3 = 0, t = 3$. Кубічне рівняння має три однакових корені (або один корінь потрійної кратності) $x_1 = x_2 = x_3 = 3$. Відповідь: (3; 3; 3).*

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy+yz+zx=11, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xyz=6. \end{cases}$$

Знайти тільки додатні розв'язки.

* Помітимо, що $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = 14+2\cdot 11 = 36$. Отже, $x+y+z = \pm 6$. Тепер розглянемо випадок

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+yz+zx=11, \\ xyz=6. \end{cases}$$

Складаємо кубічне рівняння $t^3-6t^2+11t-6=0, (t-1)(t-2)(t-3)=0$. Рівняння має три корені: $t_1=1, t_2=2, t_3=3$. Отже, система має шість розв'язків. Відповідь: (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).*

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$$

* Введемо стандартні підстановки $z+y+x=p, xy+yz+zx=q, xyz=r$. Очевидно, $p=2$. Далі $6 = x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) = p^2-2q$ або $6 = 2^2-2q$ і $q=-1$. Крім того, $8 = x^3+y^3+z^3 = 3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 3xyz+2\cdot(6-(-1))$, звідки $xyz = r = -2$. Ми одержали систему

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+yz+zx=-1, \\ xyz=-2. \end{cases}$$

Складаємо кубічне рівняння $t^3-2t^2-t+2=0, (t+1)(t-1)(t-2)=0$. Кубічне рівняння має три корені: –1, 1 і 2. Відповідно до цього вихідна система має шість розв'язків (–1; 1; 2), (–1; 2; 1), (1; –1; 2), (1; 2; –1), (2; –1; 1), (2; 1; –1).*

Зауваження. Уважний читач помітив, що ми фактично встановили тотожність $x^3+y^3+z^3 = 3r+p(p^2-3q) = 3r+p^3-3pq$.

4.3. Розглянемо ще декілька систем рівнянь з трьома невідомими.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+6y-z^2=-6, \\ y^2+4x+z=-4, \\ 7x-11y+2z(z+1)=4. \end{cases}$$

* Із першого рівняння системи знаходимо $z^2 = x^2+6y+6$. Із другого рівняння системи знаходимо $z = -4-y^2-4x$. Підставимо ці значення z^2 та z в третє рівняння системи:

$$7x-11y+2(x^2+6y+6)+2(-4-y^2-4x)=4$$

або $-x+y+2x^2-2y^2=0, (x-y)(2x+2y-1)=0$.

Розглянемо два випадки.

1) $x=y$. З перших двох рівнянь вихідної системи маємо

$$\begin{cases} x^2+6x=z^2-6, \\ x^2+4x+4=-z \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2+6x=z^2-6, \\ (x+2)^2=-z. \end{cases}$$

Підставляючи значення z із другого рівняння в перше, отримуємо $x^2+6x=(x+2)^4-6$, $(x+3)^2=(x+2)^4+3$. Нехай $x+2=t$, тоді $t^4-(t+1)^2+3=0$, $t^4-t^2-2t+2=0$, $(t-1)^2(t^2+2t-2)=0$. Це рівняння має єдиний дійсний корінь $t=1$. Далі $x=t-2=-1=y$.

Із другого рівняння вихідної системи рівнянь тепер маємо $(-1)^2+4\cdot(-1)+z=-4$ і $z=-1$.

Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок $(-1;-1;-1)$.

2) $2x+2y-1=0$, звідки $6y=3-6x$. Тепер із першого рівняння вихідної системи маємо $x^2+3-6x=z^2-6$, $(x-3)^2=z^2$, $z=\pm(x-3)$. Розглянемо два випадки для різних значень z.

а) $z=x-3$. Із другого рівняння вихідної системи маємо $\left(\frac{1-2x}{2}\right)^2+4x+x-3=-4$, $4x^2+16x+5=0$, $x=-2\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$. Далі $y=\frac{1-2x}{2}=\frac{5\mp\sqrt{11}}{2}$, $z=-5\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$. Ми одержали ще два розв'язки $\left(-2\pm\frac{\sqrt{11}}{2};\frac{5\mp\sqrt{11}}{2};-5\pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

б) $z=3-x$. Із другого рівняння вихідної системи рівнянь одержимо $\left(\frac{1-2x}{2}\right)^2+4x+3-x=-4$, $4x^2+8x+29=0$. Розв'язків немає. Відповідь: $(-1;-1;-1)$, $\left(-2\pm\frac{\sqrt{11}}{2};\frac{5\mp\sqrt{11}}{2};-5\pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.*

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x+y+z=4,\\2xy-z^2=16.\end{cases}$$

$$*\begin{cases}x+y=4-z,\\2xy=16+z^2.\end{cases}$$

Цікаво, що система з трьома невідомими складається з двох рівнянь.

Використаємо нерівність $(x+y)^2\ge 4xy$. Із даної системи маємо $(4-z)^2\ge 32+2z^2$ або $z^2+8z+16\le 0$. $(z+4)^2\le 0$, звідки $z=-4$. Тепер одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}x+y=8,\\2xy=32,\end{cases}$$

звідки $x=y=4$. Відповідь: $(4;4;-4)$.*

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2z^2-xz+5xy^2=0,\\xz-z^2+3x^2y=9x^2y^3,\\z^2-2x^2-5y^2z=18x^2y.\end{cases}$$

* Якщо $x=0$, то із першого рівняння бачимо, що $z=0$. Зрозуміло, що в цьому випадку система має безліч розв'язків виду $(0;t;0)$, де $t\in\mathbf{R}$.

Аналогічні міркування приводять до висновку, що якщо $z=0$, то система має розв'язки виду $(0;t;0)$.

Нехай $xz \neq 0$, тоді домножимо перше рівняння системи на z, друге — на $6x$, третє — на x:

$$\begin{cases} 2z^3 - xz^2 + 5xy^2z = 0, \\ 6x^2z - 6xz^2 + 18x^3y = 54x^3y^3. \\ xz^2 - 2x^3 - 5xy^2z = 18x^3y. \end{cases}$$

Додавши почленно всі рівняння одержаної системи, маємо

$$\begin{gathered} 2z^3 + 6x^2z - 6xz^2 - 2x^3 = 54x^3y^3, \\ 2(z-x)^3 = 54x^3y^3,\ z - x = 3xy. \end{gathered} \qquad (П6.5)$$

Із другого рівняння вихідної системи маємо

$$z(x-z) + 3x^2y = 9x^2y^3$$

або з урахуванням рівняння (П6.5)

$$-3xyz + 3x^2y = 9x^2y^3,\ \ 3xy(x-z) = 9x^2y^3. \qquad (П6.6)$$

Якщо $x = 0$, то одержуємо вже відомий випадок. Якщо $y = 0$, то із рівняння (П6.5) маємо $x = z$ і з першого рівняння вихідної системи одержимо, що $x = 0$ і ми знову приходимо до розглянутого випадку. Якщо ж $xy \neq 0$, то із рівняння (П6.6) отримуємо $x - z = 3xy^2$. Враховуючи рівняння (П6.5), маємо $-3xy = 3xy^2$, звідки $y = -1$. Із рівняння (П6.5) маємо $z = -2x$. Із першого рівняння вихідної системи маємо $2 \cdot 4x^2 + 2x^2 + 5x = 0$ і $x = -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$. Далі $z = 1$. Відповідь: $\left(-\frac{1}{2}; -1; 1\right), (0; t; 0), t \in \mathbf{R}$. *

4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z, \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x. \end{cases}$$

* Помітимо, що якщо $x = 0$, то й $y = 0$ і $z = 0$. Отже, система має розв'язок (0; 0; 0). Нехай $xyz \neq 0$. Перемножимо почленно всі рівняння вихідної системи: $\dfrac{8x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = xyz$. Оскільки $xyz \neq 0$, то $\dfrac{8xyz}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = 1$ і $8xyz = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$. Легко бачити, що $2x \leq 1 + x^2$, причому рівність досягається лише при $x = 1$. Крім того, $2y \leq 1 + y^2$ і $2z \leq 1 + z^2$. Тепер зрозуміло, що $8xyz \leq (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$, причому рівність досягається лише при $x = y = z = 1$. Отже, система має ще один розв'язок: (1; 1; 1). Відповідь: (0; 0; 0), (1; 1; 1).*

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 288. \end{cases}$$

* Запишемо перше рівняння системи у вигляді

$$(3x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 3z)^2 = 0,$$

звідки $x = 2z$, $y = 3z$. Тепер із другого рівняння маємо $(2z)^3 + (3z)^3 + z^3 = 288$, $36z^3 = 288$, $z = 2$. Далі $x = 4$, $y = 6$. Відповідь: (4; 6; 2).*

6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 3, \\ x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 3, \\ x^{2n+2} + y^{2n+2} + z^{2n+2} = 3. \end{cases}$$

* 1-й спосіб. Додамо перше та третє рівняння системи і віднімемо від цієї суми подвоєне друге рівняння:

$$x^{2n} + x^{2n+2} - 2x^{2n+1} + y^{2n} + y^{2n+2} - 2y^{2n+1} + z^{2n} + z^{2n+2} - 2z^{2n+1} = 0,$$

$$x^{2n}(x-1)^2 + y^{2n}(y-1)^2 + z^{2n}(z-1)^2 = 0.$$

Одержане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} x^{2n}(x-1)^2 = 0, \\ y^{2n}(y-1)^2 = 0, \\ z^{2n}(z-1)^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \text{ або } x = 1, \\ y = 0 \text{ або } y = 1, \\ z = 0 \text{ або } z = 1. \end{cases}$$

Ця система має 8 розв'язків (0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 0; 1), (1; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 1; 1). Перевіркою встановлюємо, що підходить лише розв'язок (1; 1; 1).

2-й спосіб. Розглянемо вектори $\bar{a}(x^n; y^n; z^n)$ і $\bar{b}(x^{n+1}; y^{n+1}; z^{n+1})$. Вихідну систему запишемо у вигляді

$$\begin{cases} |\bar{a}| = \sqrt{3}, \\ \bar{a} \cdot \bar{b} = 3, \\ |\bar{b}| = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Відомо, що $\bar{a} \cdot \bar{b} \le |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, причому рівність виконується лише у випадку, коли вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ співнапрямлені. Оскільки в даному випадку $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, то $\frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{y^{n+1}}{y^n} = \frac{z^{n+1}}{z^n} > 0$ або $x = y = z > 0$. Із першого рівняння вихідної системи маємо $3x^{2n} = 3$, $x^{2n} = 1$, звідки $x = 1$, бо $x > 0$. Відповідь: (1; 1; 1).*

Вправи

1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} xz = 15, \\ y(z-3) = 8, \\ (1-x)(3-y) = 2. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy = 15, \\ yz = 24, \\ zx = 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 3xy, \\ y + z = 4yz, \\ z + x = 5xz. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = xyz, \\ y + z = xyz, \\ z + x = xyz. \end{cases}$

3. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y+z=4\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4\frac{1}{3}. \\ xyz=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=9\frac{1}{8}. \\ x+y+z=xy+yz+zx. \\ xyz=1, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1. \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y^2-5z=5, \\ x^2-8y-z^2=8, \\ x(5x-1)-4y^2-35y=35. \end{cases}$$

5. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x^2+8x^2z+y^2z^3=0, \\ y+6xy+12xz^2=8x^2z, \\ 2x^2+xy-3yz^2=0. \end{cases}$$

6. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} (x+y)^3=z, \\ (y+z)^3=x, \\ (z+x)^3=y. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=8, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x+y+z=3. \end{cases}$

Відповіді до вправ

§ 2. 1. а) $\left(3\frac{2}{7};1\frac{6}{7}\right)$, б) $\left(\frac{10}{13};\frac{1}{13}\right)$, в) $\left(2\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$. **2.** а) розв'язків немає, б) $\left(\frac{3}{2};0\right)$. **3.** а) $(3-2t;\ t)$, $t\in\mathbf{R}$, б) $(4+7t;\ t)$, $t\in\mathbf{R}$. **4.** $a\neq -4{,}5$. **5.** При $a=-4$. **6.** При $a=9$. **7.** а) $\left(\frac{a^2+8}{a+4};\frac{2(a-2)}{a+4}\right)$ при $a\neq -4$, немає розв'язків при $a=-4$, б) $\left(\frac{8-a}{12-a-a^2};\frac{2a^2-a}{12-a-a^2}\right)$ при $a\neq -4$, $a\neq 3$; немає розв'язків при $a=-4$ або $a=3$. **8.** $-\frac{3\sqrt{2}+4}{8}\le a\le\frac{3\sqrt{2}-4}{8}$. **9.** а) $\left(1\frac{9}{17};-1\frac{4}{17};1\frac{11}{17}\right)$, б) $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **10.** а) (0; 0; 0), б) (0; 0; 0). **11.** а) $\left(-\frac{1}{5}t;-\frac{7}{5}t;t\right)$, $t\in\mathbf{R}$, б) $(-5t;-7t;t)$, $t\in\mathbf{R}$. **12.** а) розв'язків немає, б) розв'язків немає.

§ 3. 1. а) (–1; 6), (3; 2), б) (3; 2), $\left(\frac{3}{4};4\frac{1}{4}\right)$, в) (4; 5), $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. г) (3; 1), (–3; –1), д) (4; 2), (–4; –2), (–4; 2), (4; –2). **2.** а) (3; 1), (–3; –1), $\left(\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$. б) (3; 2), (–3; –2), $\left(-\frac{4}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$,

$\left(\frac{4}{\sqrt{2}};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, в) (3; 1), (–3; –1), $\left(\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{-15\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, г) $\left(\frac{15}{\sqrt{21}};\frac{3}{\sqrt{21}}\right)$, $\left(-\frac{15}{\sqrt{21}};\right.$ $\left.-\frac{3}{\sqrt{21}}\right)$, д) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-5}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, (3; 2), (–3; –2), е) (4; 1), (–4; –1), $\left(\frac{26}{\sqrt{11}};\frac{19}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(\frac{-26}{\sqrt{11}};\frac{-19}{\sqrt{11}}\right)$. є) $\left(0;\sqrt{5}\right),\left(0;-\sqrt{5}\right)$, $\left(-2\sqrt{\frac{5}{53}};7\sqrt{\frac{5}{53}}\right),\left(2\sqrt{\frac{5}{53}};-7\sqrt{\frac{5}{53}}\right)$. **3.** а) (2; 4), (4; 2), $\left(\frac{-13+\sqrt{377}}{6};\frac{-13-\sqrt{377}}{6}\right),\left(\frac{-13-\sqrt{377}}{6};\frac{-13+\sqrt{377}}{6}\right)$, б) (1; 3), (3; 1), в) (2; 4), (4; 2), $\left(\frac{-3\pm\sqrt{33}}{3};\frac{-3\mp\sqrt{33}}{3}\right)$, г) (1; 2), (2; 1), д) (3; 4), (4;3), (–4; –3), (–3; –4), е) (0; 1), (0; –1), (1; 0), (–1; 0), є) (3; 2), (–3; –2), (2; 3), (–2; –3). **4.** а) (7; 3), б) (3; 1). **5.** а) (4; 1), б) (0; 0), (12; –3), (–3; 12), (17; 17), в) (0; 1), (1; 1), $\left(\frac{1+3\sqrt{6}}{7};\frac{2}{7}\right),\left(\frac{1-3\sqrt{6}}{7};\frac{2}{7}\right)$, г) (0; 0), (4; 2), (–4; –2), д) (0; 0), (4; 2), (–2; –4), е) (6; 3), (–3; –6), (2; 4), (–4; –2). **6.** а) (1; 1), $\left(\frac{-5\pm\sqrt{140}}{5};\frac{-7\pm\sqrt{140}}{35}\right)$, б) (2; 1), (–1; –2), $\left(1+\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right),\left(1-\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$. **7.** (1; 1).

§ 4. 1. (3; 4; 5), $\left(\frac{5}{17};\frac{1}{6};51\right)$. **2.** а) $\left(\frac{5}{2};6;4\right),\left(-\frac{5}{2};-6;-4\right)$. б) (0; 0; 0), $\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{3}\right)$, в) (0; 0; 0), $\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$. **3.** а) $\left(1;3;\frac{1}{3}\right),\left(1;\frac{1}{3};3\right),\left(3;1;\frac{1}{3}\right),\left(3;\frac{1}{3};1\right),\left(\frac{1}{3};3;1\right),\left(\frac{1}{3};1;3\right)$, б) $\left(1;2;\frac{1}{2}\right),\left(1;\frac{1}{2};2\right),\left(\frac{1}{2};2;1\right),\left(\frac{1}{2};1;2\right),\left(2;\frac{1}{2};1\right),\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$, в) (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0). **4.** (1; –1; –1), $\left(6-\sqrt{2};3-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right),\left(6+\sqrt{2};3+\sqrt{2};-2-\sqrt{2}\right)$. **5.** (0; 0; t), $t\in R$; $\left(\frac{3\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}};-6\sqrt[3]{2};-\frac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}}\right)$. **6.** а) (0; 0; 0), $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, б) розв'язків немає, в) (1; 1; 1).

Тема 7. ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ

§ 1. Як розв'язати задачу на складання рівнянь

Часто такі задачі називають *текстовими*. Розв'язання текстової задачі складається з кількох етапів: вибір невідомих, складання рівняння або системи рівнянь, розв'язання цих рівнянь або систем рівнянь. Ефективне розв'язання більшості текстових задач залежить від розумного вибору невідомих. Не завжди шукане число має бути невідомим. В ряді випадків за невідомі приймають деяку комбінацію даних. Невідомі треба вводити так, щоб через них легко було записати умову задачі. Після того, як введено невідомі, умову задачі перекладають на мову рівнянь (або систем рівнянь). Цей процес називають *математизацією* ситуації.

Коли складено рівняння або систему рівнянь, ми абстрагуємось від умови і розв'язуємо конкретне рівняння (систему рівнянь). Після цього тлумачимо розв'язки згідно з умовою задачі. Часто перевірку треба робити за умовою задачі, а не за рівнянням (або системою рівнянь). Рекомендуємо читачеві робити перевірку в усіх задачах, де ми її не зробили (для економії місця). Зауважимо, що багато геометричних задач можна розглядати як текстові задачі, у розв'язку яких застосовують геометричні теореми.

Задачі

1. За планом тракторна бригада повинна була зорати поле за 14 днів. Оскільки бригада кожен день зорювала на 5 га більше, ніж було намічено за планом, вона закінчила роботу за 12 днів. Скільки га в день було зорано? Знайдіть площу поля.

* Нехай x — кількість га, яку бригада повинна була зорювати щоденно за планом. Після збільшення продуктивності праці бригада зорювала щоденно $x + 5$ га. Згідно з умовою складаємо рівняння $14 \cdot x = 12(x + 5)$, звідки $x = 30$ га.

Отже, бригада за 1 день зорювала 35 га.

Площа поля дорівнює $12 \cdot 35 = 420$ га. Відповідь: 35 га, 420 га. *

2. Маса туриста з валізою в 6 разів більша за масу валізи. Визначити масу туриста і масу валізи окремо, якщо сума мас трьох валіз і маси туриста дорівнює 120 кг. (Валізи мають однакову масу).

* Позначимо через x масу валізи. Тоді маса туриста $6x - x = 5x$. Далі згідно з умовою маємо $3x + 5x = 120$, звідки $x = 15$ кг. Турист має масу $5x = 75$ кг. Відповідь: 75 кг, 15 кг. *

3. Є монети вартістю 25 і 10 коп. Скількома способами можна розміняти 1 грн. за допомогою цих монет?

* Нехай монет вартістю 25 коп. було x, а вартістю 10 коп. — y. Складаємо рівняння $25x + 10y = 100$, або $5x + 2y = 20$. Звідки $y = \frac{20 - 5x}{2} = 10 - 2x - \frac{x}{2}$. Оскільки y — ціле число, то і $\frac{x}{2}$ повинно бути цілим числом. Отже, $\frac{x}{2} = k$ і $x = 2k$. Далі знаходимо $y = 10 - 5k$.

Маємо систему

$$\begin{cases} x = 2k, \\ y = 10 - 5k. \end{cases}$$

Оскільки x і y — невід'ємні числа, маємо систему

$$\begin{cases} k \geq 0, \\ 10 - 5k \geq 0, \end{cases}$$

звідки $0 \leq k \leq 2$. Отже, $k \in \{0, 1, 2\}$. Таким чином, маємо три можливості: 1) десять монет по 10 коп., коли $k = 0$; 2) дві монети по 25 коп. і п'ять монет по 10 коп., коли $k = 1$; 3) чотири монети по 25 коп., коли $k = 2$. **Відповідь:** 1) десять монет по 10 коп.; 2) дві монети по 25 коп. і п'ять монет по 10 коп.; 3) чотири монети по 25 коп.

4. Вздовж річки розташовані пункти A, B, C (B між A і C). Швидкість течії річки на ділянці AB вдвічі більша, ніж на ділянці BC, і на кожній з цих ділянок постійна. Катер зробив три рейси: перший із A в C, другий із C в A і третій із A в B. В перших двох рейсах його швидкість відносно води була одна й та сама, а в третьому рейсі в $1\frac{1}{4}$ рази більша, ніж у перших двох. Перший рейс забрав 7 год, третій — 2 год. Якби швидкість течії на ділянці AB була такою самою, як і на ділянці BC, то перший рейс забрав би 6 год (катер рухався б з тією самою швидкістю відносно води). Скільки часу забрав другий рейс?

* В умові не зазначено, куди спрямована течія річки: від пункту A до пункту B чи навпаки. Нехай v і $v_т$ відповідно швидкість катера відносно води і швидкість течії.

Якщо течія спрямована від A до B, то згідно з умовою

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{v + 2v_т} + \dfrac{BC}{v + v_т} = 7, \\ \dfrac{AB}{v + v_т} + \dfrac{BC}{v + v_т} = 6. \end{cases}$$

Ця система несумісна, бо ліва частина першого рівняння менша за ліву частину другого рівняння, а права частина більша.

Отже, течія спрямована від B до A.

Згідно з умовою задачі складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{v - 2v_т} + \dfrac{BC}{v - v_т} = 7, \\ \dfrac{AB}{v - v_т} + \dfrac{BC}{v - v_т} = 6. \\ \dfrac{AB}{\frac{5}{4}v - 2v_т} = 2. \end{cases} \qquad \text{(П7.1)}$$

Ми одержали систему, що складається з трьох рівнянь і має чотири невідомі. Знайти всі ці невідомі із системи неможливо, але це й не потрібно. Підрахуємо, скільки часу забрав другий рейс. Якщо цей час позначити через t, то

$$t = \frac{BC}{v + v_т} + \frac{AB}{v + 2v_т}. \qquad \text{(П7.2)}$$

Отже, треба з одержаної системи знайти деяку комбінацію невідомих.

Із третього рівняння системи (П7.1) знаходимо: $AB = \frac{5}{2}v - 4v_т$. Із другого рівняння системи (П7.1) знаходимо: $AC = 6(v - v_т)$. Далі $BC = AC - AB = \frac{7}{2}v - 2v_т$. Із першого рівняння системи (П7.1) знаходимо:

$$\frac{\frac{5v}{2}-4v_т}{v-2v_т}+\frac{\frac{7v}{2}-2v_т}{v-v_т}=7,\ 2v^2-11v_т\cdot v+12v_т^2=0,$$

1) $v=4v_т$, 2) $v=\frac{3}{2}v_т$.

Зрозуміло, що $v=\frac{3}{2}v_т$ не підходить, бо тоді $AB=\frac{5}{2}v-4v_т=\frac{15}{4}v_т-4v_т<0$, що неможливо.

Отже, $v = 4v_т$. Послідовно знаходимо: $BC=\frac{7}{2}\cdot 4v_т-2v_т=12v_т$, $AB=\frac{5}{2}\cdot 4v_т-4v_т=6v_т$. Тепер із рівняння (П7.2) маємо

$$t=\frac{12v_т}{4v_т+v_т}+\frac{6v_т}{4v_т+2v_т}=2{,}4+1=3{,}4 \text{ год.}$$

Відповідь: 3 год 24 хв. *

У наступних параграфах розглянемо найбільш розповсюджені типи текстових задач.

§ 2. Задачі на рух

Звичайно система рівнянь, що складається на основі умови такої задачі, містить рівняння із механіки, які пов'язують фізичні величини шляху (S), швидкості (v), часу (t) тощо.

При розв'язанні задач на рух приймають деякі домовленості.

1) Рух на окремих ділянках рівномірний і визначається формулою $S = vt$.

2) Якщо тіло рухається за течією річки, то його швидкість складається з швидкості v в стоячій воді та швидкості течії $v_т$ ($v + v_т$). Якщо тіло рухається проти течії, то його швидкість дорівнює $v - v_т$.

Пліт рухається з швидкістю течії річки.

До задач на рух відносяться також задачі, в яких мова йде про заповнення або спорожнення деякого резервуара, і задачі на виконання певної роботи. В таких випадках робота відіграє роль відстані, а продуктивності працівників аналогічні швидкостям. У ряді випадків допомагає малюнок, який сприяє кращому розумінню умови.

Задачі

1. Із міста A в місто B, відстань між якими 21 км, виїхав велосипедист, а через 20 хв навздогін виїхав мотоцикліст, швидкість якого в $2\frac{1}{3}$ рази більша за швидкість велосипедиста. Знайти швидкість велосипедиста, якщо відомо, що мотоцикліст приїхав в місто B на 40 хв раніше велосипедиста.

* Позначимо швидкість велосипедиста через x, тоді швидкість мотоцикліста $\frac{7}{3}x$. Велосипедист витратив на весь шлях $\frac{21}{x}$ год, а мотоцикліст — $\frac{21}{\frac{7x}{3}}=\frac{9}{x}$ год. Крім того, очевидно велосипедист витратив на 20 хв + 40 хв = 1 год більше. Складаємо рівняння $\frac{21}{x}-1=\frac{9}{x}$, звідки $x = 12$.

Відповідь: 12 км/год. *

Зауваження. Як ми вже зазначали, пропонуємо читачеві зробити перевірку самостійно.

2. Шлях, по якому проїхав мотоцикліст, складається з трьох послідовних відрізків. Середня швидкість на всьому шляху дорівнює швидкості на другому відрізку. Швидкість на першому відрізку на 2 км/год менша за середню швидкість на всьому шляху, а швидкість на третьому відрізку на 15 км/год менша за подвоєну середню швидкість на всьому шляху. Довжина першого відрізку в 6 разів більша за довжину третього. Знайти середню швидкість мотоцикліста на всьому шляху.

* Позначимо через x шукану середню швидкість. Згідно з умовою на першому відрізку шляху швидкість дорівнює $x-2$, а на третьому — $2x-15$. Якщо довжина третього відрізка S, то довжина першого відрізка $6S$. Перший відрізок шляху мотоцикліст проїхав за $\frac{6S}{x-2}$ год, а третій — за $\frac{S}{2x-15}$. Середня швидкість руху на першому і третьому відрізку дорівнює середній швидкості руху мотоцикліста на всьому шляху. Отже,

$$x=7S:\left(\frac{6S}{x-2}+\frac{S}{2x-15}\right),\ x=\frac{7(x-2)(2x-15)}{13x-92},$$

$x^2-41x+210=0$, $x=35$ або $x=6$. Значення $x=6$ не підходить, бо тоді $2x-15<0$.

Відповідь: 35 км/год. *

3. Два велосипедисти виїхали одночасно із пункту A в одному напрямку: перший зі швидкістю 8 км/год, а другий — 10 км/год. Через 30 хв з пункту A в тому самому напрямку виїхав третій велосипедист, який наздогнав першого, а ще через півтори години — другого велосипедиста. Знайти швидкість третього велосипедиста.

* Позначимо через x швидкість третього велосипедиста, а через t — час, протягом якого їхав перший велосипедист до того моменту, коли його наздогнав третій. Згідно з умовою складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 8t=x\left(t-\frac{1}{2}\right), \\ 10\left(t+\frac{3}{2}\right)=x\left(t-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Розділимо почленно друге рівняння на перше:

$$\frac{5\left(t+\frac{3}{2}\right)}{4t}=\frac{t+1}{t-\frac{1}{2}},\ 5\left(t^2+t-\frac{3}{4}\right)=4t^2+4t,$$

$t^2+t-\frac{15}{4}=0$, $t=-\frac{5}{2}$ або $t=\frac{3}{2}$. Розв'язок $t=-\frac{5}{2}$ не підходить, отже $t=\frac{3}{2}$. Далі знаходимо x.

Із першого рівняння системи одержуємо $8\cdot\frac{3}{2}=x\cdot 1$, $x=12$. Відповідь: 12 км/год. *

4. Пішохід, велосипедист та мотоцикліст рухаються по шосе в одному напрямку з постійними швидкостями. У той момент, коли велосипедист і мотоцикліст були в одній точці, пішохід був на відстані 10 км попереду них. У той момент, коли мотоцикліст наздогнав пішохода, велосипедист відстав від них на 5 км. На скільки кілометрів мотоцикліст буде попереду пішохода, коли його наздожене велосипедист?

* Позначимо через v_1, v_2 та v_3 відповідно швидкості пішохода, велосипедиста та мотоцикліста. До зустрічі мотоцикліста і пішохода мотоцикліст пройшов на 10 км більше за пішохода, а велосипедист — на 5 км більше. Звідси маємо рівняння:

$$\frac{10}{v_3-v_1}=\frac{5}{v_3-v_2}\ \text{і}\ \frac{v_3-v_2}{v_3-v_1}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

У той момент, коли велосипедист наздогнав пішохода, мотоцикліст проїхав на x км більше за велосипедиста і на $10 + x$ км більше за пішохода. Звідси маємо рівняння

$$\frac{x}{v_3 - v_2} = \frac{10+x}{v_3 - v_1}. \text{ Далі } \frac{x}{10+x} = \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1} = \frac{1}{2}.$$

Звідси $2x = 10 + x$ і $x = 10$. Відповідь: на 10 км. *

5. З пункту A в пункт B вийшов пішохід. Одночасно з ним з пункту B в пункт A виїхав велосипедист, який зустрів пішохода через 50 хв після свого виїзду з пункту B. Скільки часу потрібно пішоходу для того, щоб пройти весь шлях від A до B, якщо відомо, що велосипедист проїхав би цей шлях на 4 год скоріше, ніж пішохід?

* Позначимо через v_1 і v_2 відповідно швидкості пішохода та велосипедиста. Згідно з умовою складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{v_1 + v_2} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{AB}{v_1} - \dfrac{AB}{v_2} = 4. \end{cases}$$

Система має два рівняння з трьома невідомими. Знайти ці невідомі неможливо. Але нам потрібно знайти не самі невідомі, а деяку їх комбінацію. Потрібно знайти величину $\dfrac{AB}{v_1}$. Далі

$$\begin{cases} 6AB = 5(v_1 + v_2), \\ AB(v_2 - v_1) = 4v_1 \cdot v_2. \end{cases}$$

Розділимо друге рівняння на перше: $\dfrac{v_2 - v_1}{6} = \dfrac{4v_1 v_2}{5(v_1 + v_2)}$,

$$5(v_2^2 - v_1^2) = 24v_1 \cdot v_2, \quad 5v_2^2 - 24v_1 \cdot v_2 - 5v_1^2 = 0,$$

$$v_2 = 5v_1 \quad \text{або} \quad v_2 = -\frac{1}{5}v_1.$$

За змістом задачі підходить лише значення $v_2 = 5v_1$. Із першого рівняння системи маємо $\dfrac{AB}{v_1 + 5v_1} = \dfrac{AB}{6v_1} = \dfrac{5}{6}$ і $\dfrac{AB}{v_1} = 5$. Відповідь: 5 год. *

6. Дві труби, діючи разом, заповнюють за 1 год 3/4 басейну. Якщо спочатку перша труба наповнить 1/4 частину басейну, а потім друга при вимкненій першій доведе об'єм води до 3/4 басейну, то на це піде 2,5 год. Якщо першу трубу включити на 1 год, а другу — на 0,5 год, то вони заповнять басейн більш як наполовину. За який час заповнює басейн кожна труба, діючи окремо?

* Нехай перша труба заповнює басейн за x год, а друга — за y год. Тоді за 1 год перша труба заповнює $\dfrac{1}{x}$ басейну, а друга — $\dfrac{1}{y}$. Згідно з умовою складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{y} = 2\dfrac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Далі} \quad \begin{cases} 4x + 4y = 3xy, \\ x + 2y = 10. \end{cases}$$

Із другого рівняння $x = 10 - 2y$. Підставимо це значення x в перше рівняння:

$$4(10 - 2y) + 4y = 3(10 - 2y) \cdot y, \quad 6y^2 - 34y + 40 = 0,$$

$y_1 = 4, y_2 = \frac{5}{3}$. Відповідно $x_1 = 2, x_2 = \frac{20}{3}$. Для остаточного визначення відповіді в умові задачі є додаткові дані. Візьмемо пару $\left(\frac{20}{3}; \frac{5}{3}\right)$. За 1 год перша труба заповнить $\frac{3}{20}$ об'єму басейну, а друга за 0,5 год заповнить $\frac{3}{10}$ об'єму басейну; $\frac{3}{20} + \frac{3}{10} = \frac{9}{20} < \frac{1}{2}$. Отже, ця пара значень не підходить. Візьмемо пару (2; 4). За 1 год перша труба заповнить $\frac{1}{2}$ об'єму басейну, а за півгодини друга труба заповнить $\frac{1}{8}$ об'єму басейну. Оскільки $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$, ця пара значень підходить. Відповідь: за 2 год і за 4 год. *

Вправи

1. Перший велосипедист щохвилини проїжджає на 50 м менше за другого, тому на шлях довжиною 120 км він витрачає на 2 год більше, ніж другий. Знайти швидкість другого велосипедиста.

2. Насос може викачати з басейну $\frac{2}{3}$ води за 15 хв. Попрацювавши 0,3 год, насос зупинився. Знайти місткість басейну, якщо після зупинки насоса в басейні ще залишилося 50 м^3 води.

3. Дві точки рівномірно обертаються за двома колами. Перша з них здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає виконати за 1 хв на 2 оберти більше. Скільки обертів за 1 хв здійснює друга точка?

4. Через 1 год після початку рівномірного спуску води у басейні їі залишилось 80 м^3, а ще через 3 год — 62,5 % того, що залишилось через 1 год. Скільки води було у басейні?

5. Села A і B розташовані на березі річки, причому село B розташоване нижче за течією. О 9 год ранку із села A до села B вирушає пліт. У цей самий момент із села B до села A вирушає човен, який зустрічається з плотом через 5 год. Дійшовши до села A, човен повертає і приходить до села B одночасно з плотом. Чи встигнуть човен і пліт прийти до села B до 9 год вечора того самого дня?

6. Два спортсмени бігають по кільцевій доріжці стадіону. Швидкість кожного постійна, і на пробіг всієї доріжки один витрачає на 5 с менше, ніж другий. Якщо вони почнуть біг з одного місця одночасно і в одному напрямку, то опиняться поруч через 30 с. Через який час вони зустрінуться, якщо почнуть біг з одного місця одночасно в протилежних напрямках?

7. Басейн, до якого підведено дві труби, через першу трубу заповнюється на 5 год швидше, ніж через другу. Якщо спочатку відкрити другу трубу, а через 8 год відкрити і першу, то басейн буде заповнений за 18 год. Який об'єм басейну і скільки води протікає через кожну трубу за 1 год, якщо за 5 год через першу трубу і за 4 год через другу проходить у сумі 20 м^3 води?

8. Пішохід і велосипедист відправляються одночасно із пункту A в пункт B. У пункті B велосипедист повертає назад і зустрічає пішохода через 20 хв після початку руху. Не зупиняючись, велосипедист доїжджає до пункту A, повертає назад і наздоганяє пішохода через 10 хв після першої зустрічі. За який час пішохід пройде шлях від A до B?

§ 3. Задачі з цілими невідомими

В цьому параграфі розглядаються тільки такі задачі, в яких невідомі можуть набувати лише цілих значень. Часто однозначний розв'язок такої задачі існує лише за умови істотного використання цієї обставини.

Задачі

1. Скількома способами можна розміняти 1 грн. монетами вартістю 2 коп. і 5 коп.?

* Нехай розміняли 1 грн. потрібним чином, причому монет вартістю 2 коп. було x, а монет вартістю 5 коп. — y. Маємо рівняння $2x + 5y = 100$. Це рівняння з двома невідомими має безліч розв'язків. Якщо дотриматися вимоги, щоб обидва невідомі були цілими, то таке рівняння називатиметься *лінійним діофантовим рівнянням* на честь давньогрецького математика Діофанта.

Розв'язком такого рівняння є пара цілих чисел. У даному разі нас цікавлять такі розв'язки, в яких обидва числа пари невід'ємні.

Наприклад, пара (20; 12) є розв'язком даного рівняння і означає, що за 1 грн. треба дати двадцять монет вартістю 2 коп. і дванадцять монет вартістю 5 коп.

Із складеного рівняння $x = \dfrac{100-5y}{2} = 50-2y-\dfrac{y}{2}$. Оскільки x і y — цілі числа, то $\dfrac{y}{2}$ — ціле число. Нехай $\dfrac{y}{2} = t$. Тоді $y = 2t$, $x = 50-5t$.

Отже, вихідне рівняння має безліч розв'язків у цілих числах виду $(50 - 5t; 2t)$, де $t \in \mathbf{Z}$. Ми шукаємо випадки, коли обидва числа в парі невід'ємні. Це приводить до системи

$$\begin{cases} 50-5t \geq 0, \\ t \geq 0, \end{cases}$$

звідки $0 \leq t \leq 10$. Оскільки t — ціле число, $t \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$. Потрібних випадків 11. Кожному значенню t зі знайденої множини відповідає деякий варіант розміну 1 грн. **Відповідь**: 11. *

2. Знайти два натуральних числа з найбільшою сумою, якщо добуток цих чисел у 23 рази більший, ніж їх сума.

* Нехай x і y — натуральні числа з потрібною властивістю. Тоді $xy = 23(x + y)$. Зрозуміло, що хоч одне із чисел x, y ділиться на 23, бо 23 — просте число. Нехай $x = 23m$, де m — натуральне число. Зі складеного рівняння одержуємо: $23my = 23\,(23m + y)$,

$$my = 23m + y,\ y = \frac{23m}{m-1} = 23 + \frac{23}{m-1}.$$

Оскільки y — натуральне число, то число $\dfrac{23}{m-1}$ — також натуральне. Звідси ясно, що є два випадки: 1) $m - 1 = 23$, 2) $m - 1 = 1$. Розглянемо ці випадки.

1) $m = 24$, $x = 23 \cdot 24 = 552$, $y = 24$.

2) $m = 2$, $x = 23 \cdot 2 = 46$, $y = 46$.

Таким чином, є лише дві пари чисел з потрібною властивістю: (552; 24) і (46; 46). Найбільшу суму мають числа 552 і 24. **Відповідь**: 552 і 24. *

3. Для кожного трицифрового числа знаходять відношення цього числа до суми його цифр. Для якого числа це відношення найменше?

* Розглянемо трицифрове число $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Відношення цього числа до суми його цифр $M = \dfrac{100x+10y+z}{x+y+z} = 1 + \dfrac{99x+9y}{x+y+z}$. При фіксованих x і y дріб $\dfrac{99x+9y}{x+y+z}$ набуває найменшого значення при $z = 9$. Отже $M \geq 1 + \dfrac{99x+9y}{x+y+9} = 1 + \dfrac{99x+99y+891-90y-891}{x+y+9} = 100 - \dfrac{90y+891}{x+y+9}$. При фіксованому y M набуває найменшого значення при $x = 1$. Отже, $M \geq 100 - \dfrac{90y+891}{y+10} = 10 + \dfrac{9}{y+10}$.

Зрозуміло, що $y = 9$ і шукане число 199, а найменше значення M дорівнює $\frac{199}{19}$.

Покажемо ще один спосіб розв'язання цієї задачі.

Інтуїтивно ясно, що кількість сотень у шуканого числа повинна бути якомога меншою, а кількість десятків і одиниць — якомога більшою. Таким чином, приходимо до числа 199. Доведемо, що $\frac{100x+10y+z}{x+y+z} \geq \frac{199}{19}$,

$$1900x+190y+19z \geq 199x+199y+199z,$$

$1701x \geq 9y+180z$, що справедливо, бо $1701x \geq 1701$, а $9y + 180z \leq 9 \cdot 9 + 180 \cdot 9 = 1701$. Відповідь: для числа 199. *

4. Число років деякої людини в 1962 р. дорівнювало сумі цифр її року народження. Скільки років їй було в цьому році?

* По-перше, встановимо, що ця людина народилася в XX ст. Якби вона народилась в XIX ст., то сума цифр року народження не перевищувала б 1 + 8 + 9 + 9 = 27, а вік був би більше за 62 роки. Ми прийшли до протиріччя.

Отже, нехай ця людина народилася в $\overline{19xy}$ р. Згідно з умовою $1962 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$, $62 - 10x - y = 10 + x + y$, $52 = 11x + 2y$.

З останнього рівняння видно, що $x \leq 4$ і x — парне число. Якщо $x = 2$, то $2y = 30$, що неможливо, бо $y \leq 9$. Лишається єдина можливість: $x = 4$. Далі $y = 4$. Отже, людина народилась в 1944 р. і в 1962 р. їй було 18 років. Відповідь: 18. *

5. Школяр купив авторучку, книгу, ранець і м'яч. Якби ці предмети коштували відповідно в 12, 6, 4 і 3 рази дешевше, то він сплатив би 10 грн. А якби вони коштували відповідно в 12, 15, 20 і 30 разів дешевше, то він сплатив би 5 грн. Що дорожче, авторучка чи ранець?

* Позначимо через x, y, z, t — збільшені в 60 разів ціни авторучки, книги, ранця і м'яча.

Вартість покупки будемо вимірювати в десятках гривень. Згідно з умовою складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x+10y+15z+20t = 600, \\ 5x+4y+3z+2t = 300 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x+2y+3z+4t = 120, \\ 5x+4y+3z+2t = 300. \end{cases} \quad (\text{П7.3})$$

Додавши обидві рівності системи, одержимо

$$x + y + z + t = 70. \quad (\text{П7.4})$$

Віднявши це рівняння від першого рівняння системи (П7.3), маємо

$$y + 2z + 3t = 50. \quad (\text{П7.5})$$

Помножимо рівняння (П7.4) на 2 і віднімемо одержане рівняння від другого рівняння системи (П7.3):

$$3x + 2y + z = 160. \quad (\text{П7.6})$$

Із рівнянь (П7.5) і (П7.6) маємо $y = 50 - 2z - 3t$ та $2y = 160 - 3x - z$, звідки $100 - 4z - 6t = 160 - 3x - z$ і $3x = 60 + 3z + 6t > 3z$ і $x > z$, отже, авторучка дорожча від ранця. Відповідь: авторучка. *

Вправи

1. Якщо двоцифрове число розділити на добуток його цифр, то в результаті одержимо 6. Якщо ж цифри цього числа переставити і знову розділити одержане число на суму його цифр, то одержимо число 7. Знайти це двоцифрове число.

2. Якщо суму двох чисел додати до суми їх квадратів, одержимо 86, а якщо до різниці квадратів цих же чисел додати різницю самих чисел, то одержимо 26. Знайти ці числа.

3. Навколо будинку посадили дуби і берези, причому загальна кількість беріз більша за 14. Якщо подвоїти кількість дубів, а кількість беріз збільшити на 18, то беріз стане більше, ніж дубів. Якщо ж подвоїти кількість беріз, не змінюючи кількості дубів, то дубів все одно буде більше, ніж беріз. Скільки дубів і скільки беріз було посаджено?

4. Купили декілька однакових книжок і однакових альбомів. За всі книжки сплачено 10 грн. 56 коп., за альбоми 56 коп. Книжок купили на 6 шт. більше, ніж альбомів. Скільки куплено книжок, якщо вартість однієї книжки більша за вартість одного альбому на 1 грн.?

5. Знайти всі двоцифрові числа, рівні добутку своїх цифр, збільшених на 2.

6. Якщо двоцифрове число розділити на добуток його цифр, то дільник дорівнюватиме 1, а остача 16. Якщо ж до квадрату різниці цифр цього числа додати добуток його цифр, то одержимо дане число. Знайти це число.

7. У бібліотеці є книжки англійською, французькою та німецькою мовами. Книжки англійською складають 36 % всіх книжок, французькою — 75 % англійських, а решта 185 книжок — німецькі. Скільки іноземних книжок у бібліотеці?

8. Сума трьох натуральних чисел більша, ніж їх добуток, а сума двох із них дорівнює 33. Знайти всі такі числа.

§ 4. Задачі на розчини і сплави

При розв'язуванні задач на розчин і сплави приймають такі домовленості.

1) Сплави та суміші, що одержуються, є однорідними.

2) При злитті двох розчинів з об'ємами V_1 та V_2 відповідно одержується суміш з об'ємом $V = V_1 + V_2$ (така домовленість не завжди виконується в дійсності).

Якщо p — маса розчиненої речовини, m — маса розчину, то величина $C = \frac{p}{m} \cdot 100$ називається *концентрацією розчину*, поданою в процентах.

Якщо зливають два розчини з масами m_1, m_2 і концентраціями C_1, C_2 відповідно, то концентрація C суміші знаходиться за формулою

$$C = \frac{m_1C_1 + m_2C_2}{m_1 + m_2}. \qquad (7.1)$$

Аналогічно при злитті n розчинів концентрація суміші знаходиться за формулою

$$C = \frac{m_1C_1 + m_2C_2 + \ldots + m_nC_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (7.2)$$

Задачі

1. Скільки чистого спирту треба додати до 500 г 12 %-го розчину йоду в спирті, щоб дістати 10 %-й розчин?

* В 500 г розчину було розчинено $500 \cdot 0{,}12 = 60$ г йоду. Якщо ми хочемо зробити 10 %-й розчин, то маса розчину повинна бути 600 г. Отже, до 12 %-го розчину треба додати 100 г чистого спирту.

Цю саму задачу розв'яжемо за допомогою формули (7.1): $m_1 = 500$, $C_1 = 12$, $m_2 = x$, $C_2 = 0$. Згідно з формулою (7.1) $10 = \frac{500 \cdot 12 + x \cdot 0}{500 + x}$, звідки $x = 100$. Відповідь: 100 г. *

2. Змішали 30 %-й розчин соляної кислоти з 10 %-м і дістали 300 г 15 %-го розчину. Скільки грамів 10 %-го розчину було взято?

* Невідому масу 10 %-го розчину позначимо через x. Згідно з формулою (7.1) маємо $\frac{0{,}1x + 0{,}3(300 - x)}{300} = 0{,}15$, звідки $x = 225$ г. Відповідь: 225 г. *

3. Деякий сплав складається з двох металів, які входять до нього у відношенні 1:3, а другий містить ті самі метали у відношенні 2:5. У якому відношенні треба взяти частини даних сплавів, щоб дістати третій сплав, який містить ці самі метали у відношенні 11:29?

* Концентрації першого металу в першому, другому і третьому сплавах дорівнюють відповідно $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}$ та $\frac{11}{40}$. Нехай x і y — маси частин першого і другого сплавів, які ввійшли до третього сплаву (маси x і y виражені в одних і тих самих одиницях). Згідно з формулою (7.1) маємо:

$$\frac{x\cdot\frac{1}{4}+y\cdot\frac{2}{7}}{x+y}=\frac{11}{40},\quad \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{y}+\frac{2}{7}}{\frac{x}{y}+1}=\frac{11}{40}.$$

Поклавши $z=\frac{x}{y}$, маємо $\frac{\frac{1}{4}z+\frac{2}{7}}{z+1}=\frac{11}{40}$, звідки $z=\frac{3}{7}=x:y$. Відповідь: на три частини першого сплаву потрібно взяти 7 частин другого. *

4. В посудині, що має об'єм V_0 л, міститься p %-й розчин деякої речовини. Із посудини виливають a л розчину і доливають a л води, після чого розчин перемішують. Далі цю процедуру повторюють декілька разів. Яка концентрація речовини буде в розчині через n процедур?

* Спочатку в розчині було $\frac{pV_0}{100}$ л речовини. Після того, як з посудини відлили a л, в посудині лишилось $\frac{pV_0}{100}-\frac{pa}{100}=\frac{p}{100}(V_0-a)=\frac{pV_0}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)$ л речовини. Після того, як долили a л води, концентрація речовини дорівнює $\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)=C_1$. Після проведення другої процедури відливання a л розчину кількість речовини в посудині складатиме $\frac{pV_0}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)-C_1a=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)(V_0-a)=$

$=\frac{pV_0}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2$. Після доливання вдруге a л води концентрація речовини дорівнює $C_2=$

$=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2$.

Продовжуючи аналогічні дії, після n процедур одержимо концентрацію речовини

$$C_n=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^n. \quad *\qquad (П7.7)$$

5. Ощадбанк сплачує p % річних. Яка сума буде на рахунку через n років, якщо в банк покладено суму S_0?

* В кінці першого року на рахунку буде сума

$$S_1=S_0+\frac{p}{100}\cdot S_0=S_0\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Наприкінці другого року на рахунку буде сума

$$S_2=S_1+\frac{p}{100}\cdot S_1=S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Зрозуміло, що через n років на рахунку буде сума

$$S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \quad * \qquad (П7.8)$$

Формула (П7.8) має назву формули «складних відсотків». Якщо наприкінці кожного року змінюється величина p, тобто в перший рік банк сплачує p_1 % річних, у другий рік — p_2 %, ..., у n-й рік — p_n %, формула (П7.8) узагальнюється наступним чином:

$$S_n = S_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right). \qquad (П7.9)$$

6. Свіжі ягоди малини містять за масою 90 % води, а сухі — 12 %. Скільки вийде сухих ягід із 11 кг свіжих?

* В 11 кг свіжих ягід малини міститься $11 \cdot 0{,}9 = 9{,}9$ кг води і 1,1 кг «малинової» речовини. Оскільки сухі ягоди містять 12 % води, то 1,1 кг «малинової» речовини складають 100 % – 12 % = = 88 % всієї маси сухих ягід. Отже, шукана маса дорівнює $1{,}1 : 0{,}88 = 1{,}25$ кг. Відповідь: 1,25 кг. *

Вправи

1. Сплав міді зі сріблом містить срібла на 1845 г більше, ніж міді. Якби до цього сплаву додати деяку кількість чистого срібла, що за масою дорівнює $\frac{1}{3}$ маси чистого срібла, яке міститься у заданому сплаві, то утворився б новий сплав із вмістом срібла 83,5 %. Яка маса срібла у сплаві?

2. Є два розчини однієї й тієї самої речовини у воді. Для одержання суміші, що містить 10 г речовини і 90 г води, беруть першого розчину вдвічі більше за масою, ніж другого. Через тиждень із кожного кілограма першого і другого розчину випарилося по 200 г води і для одержання такої самої суміші, як і раніше, потрібно першого розчину взяти вчетверо більше за масою, ніж другого. Скільки грамів речовини містилося спочатку в 100 г кожного розчину?

3. Є 500 кг руди, яка містить деяку кількість заліза. Після вилучення з руди 200 кг домішок, які містять у середньому 12,5 % заліза, у решті руди вміст заліза підвищився на 20 %. Яка кількість заліза була у руді?

4. Скільки кілограмів води треба випарувати з 0,25 т целюлозної маси, $\frac{17}{20}$ якої складає вода, щоб дістати масу з вмістом 75 % води?

5. При випаровуванні з 16 кг розсолу дістали 4 кг солі, яка містить 10 % води. Скільки відсотків води містить розсіл?

6. Повний бак містить 729 л кислоти. З баку відлили a л кислоти і долили бак водою. Після ретельного перемішування відлили a л розчину і знову долили бак водою. Після того, як ця процедура була повторена 6 разів, розчин у баці містив 64 л кислоти. Знайти a.

7. Банк сплачує p % річних. Через скільки років покладена в банк сума подвоїться?

8. Дві посудини з розчином солі поставлені для випаровування. Порції солі, що випаровуються щоденно, постійні для кожної посудини. З першої посудини одержано 48 кг солі, а з другої, яка стояла на 6 днів менше, — 27 кг. Якби перша посудина стояла стільки днів, скільки друга, а друга — стільки, скільки перша, то з обох розчинів одержали б однакові кількості солі. Скільки днів стояв кожен розчин?

Відповіді до вправ

§ 2. 1. 15 км/год. **2.** 250 м^3. **3.** 4 об/хв. **4.** 90 м^3. **5.** Ні. **6.** 6 с. **7.** 60 м^3, 2,4 м^3, 2 м^3. **8.** За 1 год.

§ 3. 1. 12. **2.** 7 і 5. **3.** 11 дубів і 5 беріз. **4.** 8. **5.** 12, 24, 35, 56. **6.** 37, 48. **7.** 500. **8.** 32, 1, 1.

§ 4. 1. 2505 л. **2.** 5 г і 20 г. **3.** 212,5 кг. **4.** 100 кг. **5.** 77,5 %. **6.** 243 л. **7.** $\log_{1+\frac{p}{100}} 2$. **8.** 24 і 18.

Тема 8. НЕРІВНОСТІ

§ 1. Числові нерівності

1.1. Множина дійсних чисел **R** лінійно впорядкована. Які б не були дійсні числа a і b, виконується одне з трьох співвідношень: $a < b$, $a = b$ або $a > b$.

Означення. *Нерівність $a < b$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $a - b < 0$. Нерівність $a > b$ справедлива тоді і тільки тоді, коли $a - b > 0$.*

Основні властивості числових нерівностей:

$a < c$	при $a < b$	і	$b < c$;	(8.1)
	при $a > b$		$a + c > b + c$, де $c \in \mathbf{R}$;	(8.2)
$ac > bc$	при $a > b$	і	$c > 0$;	(8.3)
$ac < bc$	при $a > b$	і	$c < 0$;	(8.4)
$a + c > b + m$	при $a > b$	і	$c > m$;	(8.5)
$ac > bm$	при $a > b > 0$	і	$c > m > 0$.	(8.6)

Властивість (8.1) числових нерівностей називається *транзитивністю*. Доведемо її. Оскільки $a < b$, то за означенням $a - b < 0$; $b < c$, отже, $b - c < 0$. Сума двох від'ємних чисел знову від'ємне число: $(a - b) + (b - c) < 0$, або $a - c < 0$. За означенням $a < c$, що й треба було довести.

Властивість (8.1) можна узагальнити: якщо $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$, ..., $a_{n-1} < a_n$, то $a_1 < a_n$.

Наряду з нерівностями виду $a < b$, які називають строгими, зустрічаються і нестрогі нерівності: $a \le b$.

Система нерівностей $\begin{cases} a < b, \\ c < m \end{cases}$ справедлива в тому і тільки в тому випадку, коли обидві її нерівності справедливі. Прикладом справедливої системи нерівностей є система $\begin{cases} 3 < 6, \\ -1 < 2, \end{cases}$ а несправедливої — система $\begin{cases} 2 < 5, \\ 1 < 0{,}5. \end{cases}$ Аналогічний зміст має і система нестрогих нерівностей і система кількох (більше двох) нерівностей. Наприклад, система $\begin{cases} 3 < 3{,}7, \\ 4 \le 4, \\ 5 \le 10 \end{cases}$ справедлива.

Подвійна нерівність $a < b < c$ справедлива тоді і тільки тоді, коли справедлива система нерівностей $\begin{cases} a < b, \\ b < c. \end{cases}$

Сукупність нерівностей $\left[\begin{array}{l} a<b, \\ c<m \end{array}\right.$ справедлива в тому і тільки в тому випадку, коли справедлива хоча б одна з її нерівностей. Наприклад, справедливі такі сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} 1<3, \\ 2<4, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3<1, \\ 4<6. \end{array}\right.$ Сукупність $\left[\begin{array}{l} 3<1, \\ 2<0 \end{array}\right.$ несправедлива.

1.2. Задання числових множин за допомогою нерівностей показано в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Множина чисел, що задовольняє умови	Позначення	Назва
$a \le x \le b$	$[a; b]$	Відрізок (замкнений проміжок)
$a < x < b$	$(a; b)$	Інтервал (відкритий проміжок)
$a \le x < b$	$[a; b)$	Напіввідкритий проміжок
$a < x \le b$	$(a; b]$	Те саме
$x > b$	$(b; +\infty)$	Промінь числової прямої
$x \ge b$	$[b; +\infty)$	Те саме
$x < a$	$(-\infty; a)$	»
$x \le a$	$(-\infty; a]$	»
$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty; +\infty)$	Числова пряма

1.3. Порівняння чисел розглянемо на прикладах.

Приклади

1. Дано числа $a = 2{,}1783$ та $b = 2{,}1749$, які треба порівняти.

Оскільки цілі частини чисел a та b рівні, порівнюємо десяті долі. Десяті долі рівні, порівняємо соті долі, і вони рівні. Нарешті, порівнявши тисячні долі, встановлюємо, що $a > b$. Так само можна порівняти будь-які числа, задані у вигляді десяткових дробів.

Порівняти числа.

2. $\frac{1}{6}$ і $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

* Визначимо різницю: $\frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{6} = \frac{3\sqrt{3}-5}{30}$. Маємо $3\sqrt{3} > 5$, бо $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, $5 = \sqrt{25}$, тобто $\sqrt{27} > \sqrt{25}$. Отже, $\frac{3\sqrt{3}-5}{30} > 0$ і $\frac{\sqrt{3}}{10} > \frac{1}{6}$. *

3. $\sqrt{2}$ і $\sqrt[3]{3}$.

* $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}$. Оскільки $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$, то $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. *

4. $A = \frac{678901234}{789012345}$ і $B = \frac{678901235}{789012347}$.

* Нехай $A = \frac{m}{n}$, тоді $B = \frac{m+1}{n+2}$ (тут m = 678901234, n = 789012345), $A - B = \frac{m}{n} - \frac{m+1}{n+2} =$

$= \frac{2m-n}{n(n+2)} > 0$, бо $2m > n$, тобто $A > B$. *

5. $A=\sqrt{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$ і $B=\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{17}}$.

* Оскільки $A>0, B>0$, порівняємо числа $A^2=\sqrt{13}-\sqrt{11}$ та $B^2=\sqrt{19}-\sqrt{17}$:

$$A^2=\sqrt{13}-\sqrt{11}=\frac{\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}=\frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} \text{ і } B^2=\frac{2}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}.$$

Зрозуміло, що $\sqrt{13}+\sqrt{11}<\sqrt{19}+\sqrt{17}$, а тому $A^2>B^2$, отже, $A>B$. *

1.4. Розглянемо деякі *важливі нерівності*.

1. При $a\ge 0, b\ge 0$ виконується нерівність

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}. \tag{8.7}$$

* Візьмемо справедливу нерівність $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$, тобто $a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$, звідки $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. Рівність досягається тільки при $a=b$. *

Число $\frac{a+b}{2}$ називається *середнім арифметичним*, а число $\sqrt{ab}$ *середнім геометричним* чисел a і b.

Вираз (8.7) називається *нерівністю Коші*. Її узагальненням є нерівність

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},\ a_i\ge 0.$$

Рівність виконується тільки при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

2. При $a>0$ виконується нерівність

$$a+\frac{1}{a}\ge 2. \tag{8.8}$$

* Згідно з нерівністю Коші маємо

$$a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{a\frac{1}{a}}=2, \text{ звідки } a+\frac{1}{a}\ge 2.$$

Рівність досягається тільки при $a=\frac{1}{a}$, тобто при $a=1$. *

3. Для довільних дійсних чисел a_1, a_2, b_1, b_2 виконується нерівність

$$\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right). \tag{8.9}$$

* Розкриваючи дужки та зводячи подібні члени, дістаємо

$$2a_1a_2b_1b_2\le a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2 \text{ або } \left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2\ge 0,$$

що справедливо. Рівність досягається тільки при $a_1b_2=a_2b_1$ або $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$. *

Вираз (8.9) називається *нерівністю Коші — Буняковського*. Її узагальненням є нерівність

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right),$$

де a_i, b_i — будь-які дійсні числа.

4. Для будь-яких дійсних чисел a, b виконується нерівність

$$|a+b| \le |a| + |b|. \qquad (8.10)$$

* Доведемо це твердження двома способами.

1) Відомо, що $-|a| \le a \le |a|$ та $-|b| \le b \le |b|$. Додавши ці подвійні нерівності, маємо $-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$, звідки $|a+b| \le |a| + |b|$.

2) Врахуємо, що $|x|^2 = x^2$. Оскільки обидві частини нерівності (8.10) невід'ємні, маємо: $(a+b)^2 \le a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$ або $ab \le |ab|$, що справедливо. Рівність досягається тільки у випадку, коли $ab \ge 0$. Узагальненням нерівності (8.10) є нерівність

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \text{ де } a_i \in \mathbf{R}. *$$

§ 2. Доведення нерівностей

Звичайно вдається за допомогою тотожних перетворень звести дану нерівність до очевидної або відомої. Очевидними є, наприклад, нерівності $x^2 \ge 0, x^2 + y^2 \ge 0, |x| \ge 0$, $|x| \ge x$ тощо.

Розглянемо на прикладах доведення деяких нерівностей.

Приклади

Довести нерівність.

1. $a^2 + ab + b^2 \ge 0$ при будь-яких дійсних a, b.

* Помітимо, що $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$. Задана нерівність набирає вигляду $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \ge 0$, що очевидно. Рівність досягається тільки при $a = b = 0$. *

2. $a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 4b + 2 \ge 0$.

* Запишемо дану нерівність так:

$$\left(a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b\right) + \left(b^2 - 2b + 1\right) \ge 0,$$

або

$$(a - b + 1)^2 + (b - 1)^2 \ge 0,$$

що справедливо. Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються рівності $b - 1$ і $a - b + 1 = 0$, тобто $b = 1$, $a = 0$. *

3. $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$.

*Домноживши обидві частини нерівності на 2, маємо

$$2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2bc+2ca, \text{ або } \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ac+a^2\right)=$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0,$$

що справедливо. Рівність досягається тільки при $a = b = c$. *

4. $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$.

* Підносимо обидві частини нерівності до квадрата:

$$a+2\sqrt{ab}+b \le 2a+2b, \text{ звідки } 0 \le a-2\sqrt{ab}+b, \text{ або } 0 \le \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,$$

що справедливо. Рівність досягається тільки при $a = b$. *

5. $\dfrac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \le \sqrt{ab}$, де $a>0, b>0$.

* Згідно з нерівністю Коші

$$2\sqrt{a^{-1}b^{-1}} \le a^{-1}+b^{-1} \text{ або } 2(ab)^{-1/2} \le a^{-1}+b^{-1}.$$

звідки $2\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1} \le \sqrt{ab}$, що й треба було довести. Рівність досягається тільки при $a = b$. Вираз $2\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}$ називається *середнім гармонічним чисел a, b*. Доведена нерівність може бути узагальнена:

$$n\left(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}\right)^{-1} \le \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, a_i>0. \ *$$

6. $|a-b| \le |a|+|b|$.

* У відомій нерівності $|x+y| \le |x|+|y|$ покладемо $x = a, y = -b$, тоді маємо $|a-b| \le |a|+|-b| = |a|+|b|$. *

7. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3} \le 2$.

* Згідно з нерівністю Коші — Буняковського

$$\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(1\cdot\sqrt{5-x}+1\cdot\sqrt{x-3}\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)(5-x+x-3)=4.$$

Звідси $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3} \le 2$. що й треба було довести. Рівність досягається тільки при $\dfrac{\sqrt{5-x}}{1}=\dfrac{\sqrt{x-3}}{1}$, тобто при $x = 4$. *

Вправи

1. Порівняйте числа A та B: а) $A=\sqrt{5}, B=\dfrac{9}{4}$; б) $A=\sqrt{2}+\sqrt{3}, B=\sqrt{10}$; в) $A=\sqrt{3}, B=\sqrt[3]{5}$; г) $A=\dfrac{12345}{23456}, B=\dfrac{12346}{23458}$; д) $A=\dfrac{1}{3}, B=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{157}+\dfrac{1}{24492}$; е) $A=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; $B = 4{,}001$.

Довести нерівність.

2. а) $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; б) $\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$; в) $\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2} - \sqrt{b_1^2+b_2^2}\right| \le |a_1-b_1|+|a_2-b_2|$;

г) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}, a>0, b>0, c>0.$

3. а) $a^2-ab+b^2 \ge 0$; б) $a^2+2ab+3b^2+2a+6b+3 \ge 0$; в) $5a^2+5b^2+8ab+2a-2b+2 \ge 0.$

4. $2 \le \sqrt{8-x}+\sqrt{x-4} \le 2\sqrt{2}.$

5. а) $|a|+\frac{1}{|a|} \ge 2$; б) $|a|-|b| \le |a-b|$; в) $|a|+|b| \le |a+b|+|a-b|.$

§ 3. Нерівності зі змінною

3.1. Нерівність виду $f(x) > g(x)$ називається *нерівністю з однією змінною. Розв'язком* цієї нерівності називається число x_0 таке, що числова нерівність $f(x_0) > g(x_0)$ справедлива.

Розв'язати нерівність з однією змінною значить знайти всі її розв'язки. Аналогічно *розв'язком системи нерівностей* $\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x) \end{cases}$ називається число x_0 таке, що система справедлива. Нехай дано систему нерівностей $\begin{cases} f_1(x_0) > g_1(x_0), \\ f_2(x_0) > g_2(x_0), \end{cases}$ $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ — множини розв'язків $\{f_1(x) > g_1(x), f_2(x) > g_2(x)\}$ першої і другої нерівностей. Якщо $\mathbf{R}$ — множина розв'язків системи, то за означенням $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2$.

Розв'язком сукупності нерівностей $\begin{bmatrix} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0 \end{bmatrix}$ називається число, яке задовольняє хоча б одну з її нерівностей. Щоб знайти множину розв'язків сукупності нерівностей, треба знайти об'єднання множин розв'язків її нерівностей. Нехай $\mathbf{R}_1$ — множина розв'язків нерівності $f_1(x) > 0$, $\mathbf{R}_2$ — множина розв'язків нерівності $f_2(x) > 0$, $\mathbf{R}$ — множина розв'язків сукупності нерівностей $\begin{bmatrix} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \end{bmatrix}$ тоді $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$. Дві нерівності (або системи нерівностей) називаються *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків збігаються. Запис $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f_1(x) > g_1(x)$ означає, що нерівності $f(x) > g(x)$ та $f_1(x) > g_1(x)$ рівносильні.

Заміна нерівності (або системи) рівносильною називається *рівносильним перетворенням нерівності* (системи). Замінюючи вихідну нерівність (систему) рівносильною, але простішою, приходимо до нерівності типу $x > a$, де a — деяке число.

Рівносильні перетворення нерівностей (систем) з однією змінною грунтуються на таких теоремах.

Теорема 1. *Якщо до обох частин нерівності додамо вираз, визначений при всіх припустимих значеннях змінної, дістанемо нерівність, рівносильну даній.*

Наслідок. *Будь-який член нерівності можна перенести з однієї частини нерівності до другої, змінивши його знак на протилежний.*

Теорема 2. *Якщо обидві частини нерівності домножимо на вираз, додатний при всіх припустимих значеннях змінної, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.*

Теорема 3. *Якщо будь-яку нерівність системи нерівностей замінимо на рівносильну, то дістанемо систему, рівносильну даній.*

Теорема 4. *Нехай дано нерівність* $f_1(x) > f_2(x)$ *і зростаючу функцію* $g(x)$ *таку, що* $E(f_1) \subset D(g)$ *і* $E(f_2) \subset D(g)$, *тоді нерівність* $g(f_1(x)) > g(f_2(x))$ *рівносильна даній.*

Приклади

Розв'язати нерівність.

1. $\frac{3x-1}{4} > \frac{2-4x}{5}$.

* Помножимо обидві частини нерівності на 20 і дістанемо рівносильну нерівність $5(3x - 1) > 4(2 - 4x)$, або $15x - 5 > 8 - 16x$, в якій можна звести подібні: $15x + 16x > 8 + 5$ або $31x > 13$. Тепер домножимо обидві частини останньої нерівності на додатне число $\frac{1}{31}$, визначивши невідоме: $x > \frac{13}{31}$. *

Зауваження. Розв'язання можна записати за допомогою знака рівносильності: $\frac{3x-1}{4} > \frac{2-4x}{5} \Leftrightarrow 5(3x-1) > 4(2-4x) \Leftrightarrow 15x-5 > 8-16x \Leftrightarrow 31x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{31}$. Відповідь: $x > \frac{13}{31}$. *

2. $\frac{1}{x} < 1$.

* Область допустимих значень нерівності $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. У цій області x не є додатним, отже, домноживши обидві частини нерівності на x, дістаємо нерівність $1 < x$, не рівносильну даній, бо порушуються умови теореми 2. Вихідна нерівність рівносильна нерівності $\frac{1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} < 0$. Дріб від'ємний, коли чисельник і знаменник мають різні знаки. Відповідно розглянемо дві системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} 1-x<0, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow x>1,$$

$$2) \begin{cases} 1-x>0, \\ x<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x<0, \end{cases} \Leftrightarrow x<0.$$

Об'єднуючи множини розв'язків цих систем, маємо $x < 0$, $x > 1$, або $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Зауважимо, що $x^2 > 0$ при $x \in D$. Отже, домноживши обидві частини вихідної нерівності на x^2, маємо нерівність $x < x^2$, рівносильну вихідній. Розв'язавши останню нерівність, маємо $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. *

3.2. Нерівність виду $ax + b > 0$ називається *лінійною* (a та b дійсні числа, $a \neq 0$). Розв'язування таких нерівностей грунтується на теоремах 1 і 2 про рівносильність нерівностей.

Приклади

1. Знайти найбільше ціле x, що задовольняє нерівність

$$\frac{7x+3}{8} - \frac{6x-2}{5} > 1{,}5.$$

* Помножимо обидві частини нерівності на 40:

$$5(7x+3) - 8(6x-2) > 60 \Leftrightarrow -13x > 29 \Leftrightarrow x < -\frac{29}{13}.$$

На рис. 8.1 множина розв'язків даної нерівності заштрихована. Найбільше ціле число із цієї множини (–3). Відповідь: –3. *

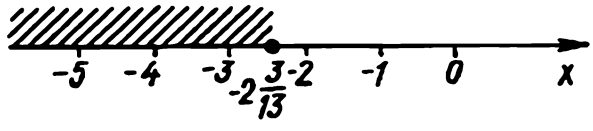


Рис. 8.1

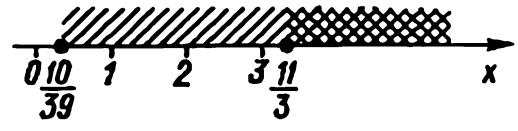


Рис. 8.2

Розв'язати систему нерівностей.

2. $$\begin{cases} \dfrac{9x-2}{4} \geq \dfrac{1-3x}{3}, \\ \dfrac{2x+1}{5} < x-2. \end{cases}$$

$$* \begin{cases} 3(9x-2) \geq 4(1-3x), \\ 2x+1 < 5(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 39x \geq 10, \\ 11 < 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{10}{39}, \\ x > \dfrac{11}{3}. \end{cases}$$

З рис. 8.2 видно, що перетином множин розв'язків нерівностей системи є множина $\left(\frac{11}{3}; +\infty\right)$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{11}{3}; +\infty\right)$. *

3. $$\begin{cases} \dfrac{3x-2}{5} < \dfrac{1-4x}{2}, \\ \dfrac{5-2x}{4} < \dfrac{7x+1}{3}. \end{cases}$$

$$* \begin{cases} 2(3x-2) < 5(1-4x), \\ 3(5-2x) < 4(7x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26x < 9, \\ 11 < 34x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{9}{26}, \\ x > \frac{11}{34}. \end{cases}$$

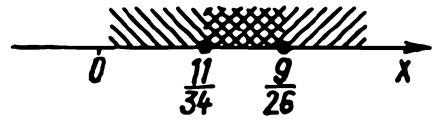


Рис. 8.3

З рис. 8.3 знаходимо, що $\frac{11}{34} < x < \frac{9}{26}$. Відповідь: $x \in \left(\frac{11}{34}; \frac{9}{26}\right)$. *

3.3. Розглянемо *лінійні нерівності з модулем* $|x| < a$ і $|x| > a, a > 0$. Виходячи з геометричного змісту модуля, бачимо, що розв'язком нерівності $|x| < a$ є будь-яке число, що знаходиться від точки 0 на відстані, меншій від a (рис. 8.4). Звідси дістаємо мно-

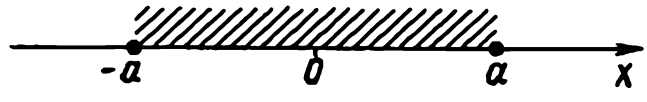


Рис. 8.4

жину розв'язків: $x \in (-a; a)$. Таким чином, нерівність $|x| < a$ рівносильна подвійній нерівності $-a < x < a$ або системі нерівностей

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

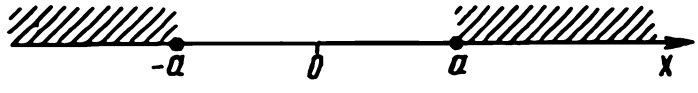


Рис. 8.5

Розв'язком нерівності $|x| > a, a > 0$ є будь-яке число, розміщене від точки 0 на відстані, більшій за a (рис. 8.5). Звідси дістаємо множину розв'язків: $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$. Таким чином, нерівність $|x| > a$ рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{cases} x > a, \\ x < -a. \end{cases}$$

Приклади

Розв'язати нерівність.

1. $|3x-2| < 5$.

* Задана нерівність рівносильна подвійній нерівності $-5 < 3x - 2 < 5$, звідки $-3 < 3x < 7$. $-1 < x < 7/3$. Відповідь: $x \in (-1; 7/3)$. *

2. $|4x-2| > 3$.

* Ця нерівність рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{bmatrix} 4x-2>3, \\ 4x-2<-3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x>5/4, \\ x<-1/4. \end{bmatrix}$$

Відповідь: $x \in (-\infty;\ 1/4) \cup (5/4;\ +\infty)$. *

3. $|3x+1|<4x-2$.

* Нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x+1<4x-2, \\ 3x+1>-(4x-2), \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} 3<x, \\ x>1/7 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

Відповідь: $x>3$. *

4. $|3x-7|>2x+4$.

* Нерівність рівносильна сукупності

$$\begin{bmatrix} 3x-7>2x+4. \\ 3x-7<-(2x+4) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x>11, \\ x<0,6. \end{bmatrix}$$

Відповідь: $x \in (-\infty;\ 0,6) \cup (11;\ +\infty)$. *

5. $1<|x|<3$.

* Ця подвійна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} |x|>1, \\ |x|<3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \begin{bmatrix} x>1, \\ x<-1, \end{bmatrix} \\ -3<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3<x<-1, \\ 1<x<3 \end{bmatrix}$$ (рис. 8.6).

Відповідь: $x \in (-3;\ -1) \cup (1;\ 3)$. *

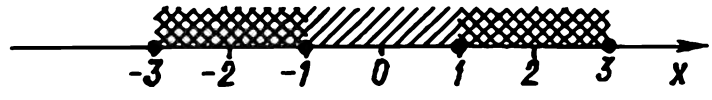


Рис. 8.6

Вправи

1. Чи рівносильні нерівності:

а) $x+1>0$ та $x+1+\frac{1}{x}>\frac{1}{x}$;

б) $x-1>0$ та $x-1+\sqrt{x-3}>\sqrt{x-3}$;

в) $\frac{3}{x-5}<2$ та $3<2x-10$;

г) $\frac{x-2}{x^2+1}<4$ та $x-2<4(x^2+1)$?

2. Розв'язати нерівність:

а) $\frac{5x-2}{4}+\frac{2x-5}{2}<3$; б) $\frac{5+3x}{2}>\frac{4x-10}{3}+x$; в) $\frac{4x+1}{2}>\frac{x+4}{5}$;

г) $(3x-1)^2+(4x-1)^2<(5x-1)^2$; д) $\frac{7x+1}{9}-\frac{4x-5}{5}>1$; е) $\frac{4x-3}{3}-\frac{8x-2}{5}>-\frac{8}{7}$.

3. Знайти найбільше ціле x, що задовольняє нерівність

$$\frac{3x-11}{2}-x+1 \geq \frac{7x+4}{3}.$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

а) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+4<\frac{6x-1}{4}, \\ x+3>\frac{1-5x}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x-4}{7}+3\ge\frac{x+2}{4}, \\ \frac{4-6x}{11}-1<\frac{x-1}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{5x-6}{3}-\frac{3x+2}{7}\le 1, \\ \frac{2-8x}{3}-2<\frac{3x-1}{4}. \end{cases}$

5. Знайти всі цілі числа x, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} 6x+\frac{5}{7}>4x+7, \\ \frac{8x+3}{2}<2x+25. \end{cases}$$

6. Знайти найбільше ціле x, що задовольняє систему нерівностей

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{3(x-2)}{8}-1>\frac{5-3x}{2}, \\ 3-\frac{4x-1}{18}>\frac{x+1}{12}-\frac{4-5x}{9}. \end{cases}$$

7. Розв'язати нерівність:

а) $|4x-7|<4$; б) $|3-7x|\le 5$; в) $|12x-4|>3$; г) $|13-9x|\ge 4$.

8. Розв'язати подвійну нерівність:

а) $1<|x+2|<5$; б) $2{,}5<|3-5x|<4{,}3$.

9. Розв'язати нерівність:

а) $|4x-6|\le 2-5x$; б) $|3x+4|>6x-1$.

§ 4. Квадратні нерівності

4.1. Нерівність виду $ax^2+bx+c>0$ називається *квадратною* ($a, b, c\in\mathbf{R}$, $a\ne 0$). Квадратну нерівність завжди можна звести до випадку, коли $a>0$. Дійсно, якщо $a<0$, то обидві частини нерівності домножимо на (-1). Тому вважатимемо, що $a>0$. Можливі такі випадки.

а) $D>0$. Нерівність $ax^2+bx+c>0$ виконується при $x<x_1$ або $x>x_2$ (рис. 8.7). Нерівність $ax^2+bx+c<0$ виконується при $x_1<x<x_2$ (x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, причому $x_1<x_2$).

б) $D=0$. Нерівність $ax^2+bx+c>0$ виконується при будь-якому дійсному $x\ne -\frac{b}{2a}$ (рис. 8.8). Нерівність $ax^2+bx+c<0$ не має розв'язків.

в) $D<0$. Нерівність $ax^2+bx+c>0$ виконується при будь-якому дійсному x (рис. 8.9). Нерівність $ax^2+bx+c<0$ не має розв'язків.

Приклади

Розв'язати квадратну нерівність.

1. $3x^2-2x-1<0$.

* Послідовно знаходимо: $D=16$, $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=1$.

Відповідь: $-\frac{1}{3}<x<1$.*

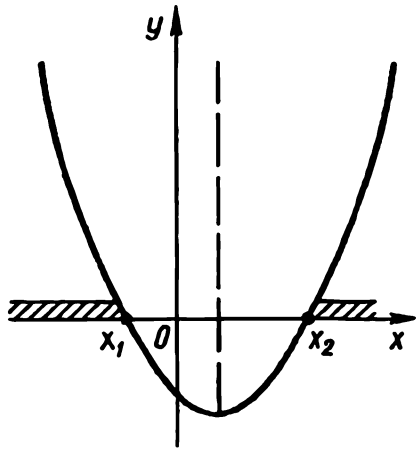


Рис. 8.7

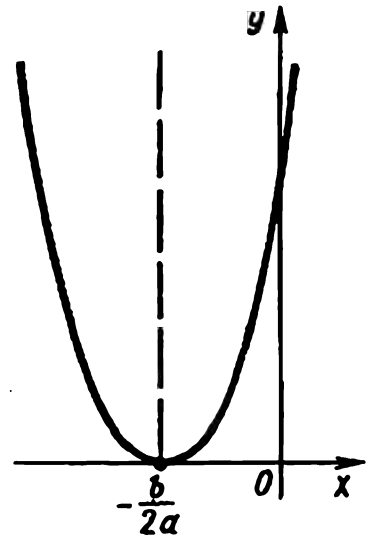


Рис. 8.8

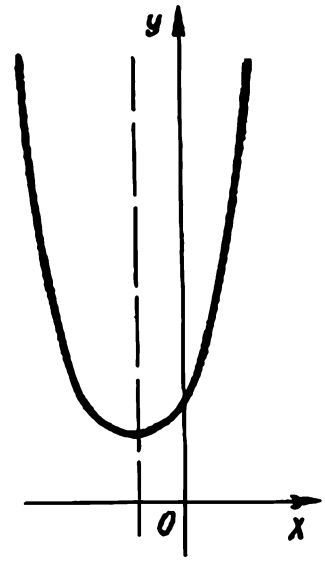


Рис. 8.9

2. $-4x^2 + 5x - 1 < 0$.

* Домножимо обидві частини нерівності на (–1): $4x^2 - 5x + 1 > 0$. Далі знаходимо: $D = 9$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1$. Відповідь: $x \in (-\infty; 1/4) \cup (1; +\infty)$. *

3. $5x^2 - x + 2 > 0$.

* Знаходимо: $D = -39$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

4. $3x^2 - 6x + 3 \le 0$.

* Знаходимо: $D = 0$, $x_1 = x_2 = 1$. Відповідь: $x = 1$. *

4.2. *Квадратні нерівності з модулем* розглянемо на прикладах.

Приклади

Розв'язати квадратну нерівність з модулем.

1. $\left|4x^2 - 3x\right| < 1$.

* Вихідна нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} 4x^2 - 3x < 1, \\ 4x^2 - 3x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 < 0, \\ 4x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/4 < x < 1, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (-1/4; 1)$. *

2. $6x^2 - 13|x| + 6 < 0$.

* Нехай $|x| = t$. Оскільки $|x|^2 = x^2$, маємо $6t^2 - 13t + 6 < 0$. Знаходимо $D = 25$, $t_1 = 2/3$; $t_2 = 3/2$. Отже, $2/3 < t < 3/2 \Leftrightarrow 2/3 < |x| < 3/2$. Відповідь: $x \in (-3/2; -2/3) \cup (2/3; 3/2)$.

Вправи

Розв'язати нерівність.

1. а) $x^2 + 2x - 3 < 0$; б) $-x^2 + 2x - 2 > 0$; в) $x^2 + x + 1 > 0$; г) $-x^2 + x - 5 > 0$;
д) $3x + x^2 \le 0$; е) $7x^2 - 4 \ge 0$.

2. а) $\left|x^2 - 2x\right| < 3$; б) $2x^2 - 5|x| + 2 > 0$; в) $\left|x^2 - 9\right| - 3x + 1 < 0$.

§ 5. Раціональні нерівності

Раціональною називається нерівність виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, де $P(x)$ та $Q(x)$ — многочлени. Вираз $Q^2(x)$ додатний при всіх допустимих значеннях даної нерівності. Домноживши обидві частини нерівності на $Q^2(x)$, дістанемо нерівність $P(x)\,Q(x) > 0$, рівносильну вихідній. Отже,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x)\,Q(x) > 0.$$

Таким чином, раціональна нерівність зводиться до нерівності $M(x) > 0$, де $M(x)$ — многочлен.

Такі нерівності розв'язують *методом інтервалів*. Розглянемо його докладніше.

Нехай є нерівність $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0$, де $x_1 < x_2 <...< x_n$. Ліва частина цієї нерівності — многочлен $M(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ з коренями $x_1, x_2, ..., x_n$. Причому $M(x) > 0$ на проміжку $(x_n; +\infty)$, бо на цьому проміжку кожен із співмножників $x - x_1, x - x_2, ..., x - x_n$ додатний; $M(x) < 0$ на проміжку $(x_{n-1}; x_n)$, бо на цьому проміжку $x - x_1 > 0, x - x_2 > 0, ...,$ а $x - x_n < 0$. Ясно, що $M(x) > 0$ на проміжку (x_{n-2}, x_{n-1}), бо на цьому проміжку $x - x_{n-1} < 0$ та $x - x_n < 0$, а інші співмножники додатні. Міркуючи аналогічно, бачимо, що многочлен $M(x)$ на сусідніх інтервалах має різні знаки.

Приклади

Розв'язати нерівність методом інтервалів.

1. $\frac{x-1}{x-5} > 0.$

* Ця нерівність рівносильна нерівності $(x - 1)(x - 5) > 0$. При $x > 5$ обидві дужки додатні, ліва частина нерівності додатна. Якщо $1 < x < 5$, то $x - 1 > 0$, а $x - 5 < 0$, отже, $(x - 1)(x - 5) < 0$. Ми бачимо, що при переході з інтервалу $(5; +\infty)$ в інтервал $(1; 5)$ ліва частина нерівності змінює знак. При переході з інтервалу $(1; 5)$ в інтервал $(-\infty; 1)$ ліва частина знову змінює знак, бо якщо $x < 1$, то $x - 1 < 0$ та $x - 5 < 0$. На рис. 8.10 показано знаки многочлена $M(x) = (x - 1)(x - 5)$ на різних проміжках осі Ox. Зверніть увагу на те, що звивиста лінія («змійка») проходить над віссю Ox там, де $M(x) > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$. *

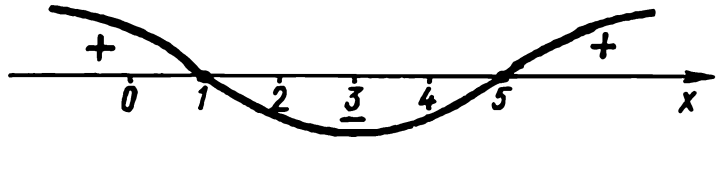


Рис. 8.10

2. $(x + 3)(x - 2)(x - 7) < 0.$

* Позначимо на осі Ox корені многочлена, що стоїть у лівій частині нерівності: $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 7$ (рис. 8.11). При $x > 7$ ліва частина нерівності додатна. Проводимо «змійку». Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \cup (2; 7)$. *

3. $(4 - 2x)(x + 4)(x - 3)(x + 6) < 0.$

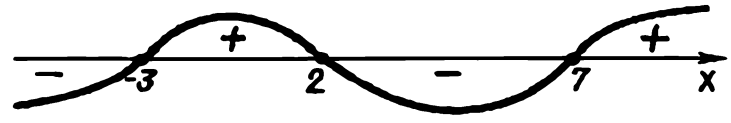


Рис. 8.11

* Запишемо нерівність у вигляді

$$-2(x-2)(x+4)(x-3)(x+6)<0 \text{ або } (x+6)(x+4)(x-2)(x-3)>0.$$

Позначимо на осі Ox корені многочлена, що стоїть у лівій частині: $x_1=-6$, $x_2=-4$, $x_3=2$, $x_4=3$ і проведемо «змійку» (рис. 8.12). Відповідь: $x\in(-\infty;-6)\cup(-4;2)\cup(3;+\infty)$. *

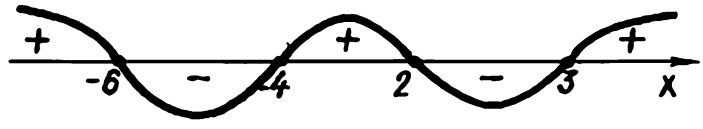


Рис. 8.12

4. $(x+7)(x-1)^2(x-4)<0$.

* Зазначимо, що $(x-1)^2>0$ при $x\neq 1$. Отже, дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases}(x+7)(x-4)<0,\\ x\neq 1.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-7<x<1,\\ 1<x<4.\end{array}\right.$ Відповідь: $x\in(-7;1)\cup(1;4)$. *

5. $(x+5)(x-2)^3(x-3)>0$.

* Зазначимо, що вирази $(x-2)^3$ та $x-2$ при $x\neq 2$ мають однакові ознаки. Отже, вихідна нерівність рівносильна такій: $(x+5)(x-2)(x-3)>0$. Розв'язавши цю нерівність, дістанемо відповідь: $x\in(-5;2)\cup(3;+\infty)$. *

Вправи

Розв'язати нерівність.

1. а) $\dfrac{x+1}{4-x}>0$; б) $\dfrac{3}{x}>-2$; в) $\dfrac{x+4}{2x-3}<0$.

2. а) $x+8>\dfrac{54}{7-x}$; б) $\dfrac{x}{x^2-4}\geq 0$; в) $\dfrac{(x+7^3)(3x-2)}{(x+2)(x-4)}\leq 0$.

3. а) $x^3-6x^2+11x-6<0$; б) $(x-1)^3(x-2)^2\leq 0$.

4. а) $(x-2)^3(2x-7)^5>0$; б) $\dfrac{(x-4)^5}{(x-1)(x+2)^3}\leq 0$; в) $(x-1)(x-2)(x+3)^2<0$.

5. а) $\dfrac{(x+3)^3}{(x+4)(x-2)(x-3)}\leq 0$; б) $\dfrac{1}{x+2}\leq x-3$.

§ 6. Ірраціональні нерівності

Ірраціональними називають нерівності, в яких змінна стоїть під знаком кореня (всюди розглядаються лише арифметичні корені).

6.1. Нерівність $\sqrt{g(x)} < f(x)$ рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) < \left(f(x)\right)^2. \end{cases} \tag{8.11}$$

Нерівність $\sqrt{g(x)} > f(x)$ рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > \left(f(x)\right)^2 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{8.12}$$

Приклади

Розв'язати нерівність.

1. $\sqrt{3x-1} < 3-x.$

* Згідно з формулою (8.11) маємо $\sqrt{3x-1} < 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0, \\ 3-x > 0, \\ 3x-1 < (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/3 \leq x < 3, \\ x^2 - 9x + 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/3 \leq x < 3, \\ \left(x - 4{,}5 + \sqrt{10{,}25}\right)\left(x - 4{,}5 - \sqrt{10{,}25}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1/3 \leq x < 4{,}5 - \sqrt{10{,}25}.$

Відповідь: $x \in \left[1/3;\ 4{,}5 - \sqrt{10{,}25}\right)$. *

2. $\sqrt{x+5} > x-1.$

* Згідно з формулою (8.12) маємо $\sqrt{x+5} > x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+5 > (x-1)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 3x - 4 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \right.\right.$
$\left.\left. \begin{cases} x-1 < 0, \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \right. \right. \left. \begin{cases} -5 \leq x < 1 \end{cases} \right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \Leftrightarrow x \geq 1, \\ -1 < x < 4, \\ -5 \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 1 \leq x < 4, \\ -5 \leq x < 1. \end{cases}\right.\right.$ Відповідь: $x \in [-5;\ 4)$. *

3. $\sqrt{2x+3} \geq x.$

* Згідно з формулою (8.12) маємо $\sqrt{2x+3} \geq x \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x+3 \geq x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq 0, \\ -1 \leq x \leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \right.\right.$
$\left.\left. \begin{cases} x < 0, \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \right. \right. \left. \begin{cases} -1{,}5 \leq x < 0 \end{cases} \right.$

$\left[\begin{cases} x \geq 0. \\ -1 \leq x \leq 3. \\ -1{,}5 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 \leq x \leq 3. \\ -1{,}5 \leq x < 0 \end{cases}\right.\right. \Leftrightarrow -1.5 \leq x \leq 3.$ Відповідь: $x \in [1.5;\ 3]$. *

4. $\dfrac{2}{4-\sqrt{x}} < 1.$

* $\frac{2}{4-\sqrt{x}}<1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{4-\sqrt{x}}<0$. Нехай $\sqrt{x}=y$. Маємо систему нерівностей

$$\begin{cases}\frac{y-2}{4-y}<0,\\ y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y<2,\\ y>4,\end{array}\right.\\ y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le y<2,\\ y>4.\end{array}\right.$$

Розглянемо два випадки:

1) $0\le\sqrt{x}<2$, тоді $0\le x<4$;

2) $\sqrt{x}>4$, тоді $x>16$. Відповідь: $x\in[0;4)\cup(16;+\infty)$. *

5. $\sqrt{x^2-1}+2<|x-2|$.

* Розглянемо два випадки:

$$1)\begin{cases}x-2<0,\\ \sqrt{x^2-1}+2<2-x,\\ x^2-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2,\\ \sqrt{x^2-1}<-x,\\ x^2-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2,\\ -x>0,\\ x^2>x^2-1,\\ x^2-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\le -1;$$

$$2)\begin{cases}x-2\ge 0,\\ \sqrt{x^2-1}+2<x-2,\\ x^2-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2,\\ \sqrt{x^2-1}<x-4,\\ x^2\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2,\\ x>4,\\ x^2\ge 1,\\ x^2-1<(x-4)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>4,\\ x^2\ge 1,\\ 8x<17\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Відповідь: $x\le -1$. *

6. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+7}\le 9$.

* Очевидні обмеження: $\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 2x+3\ge 0,\\ 3x+7\ge 0,\end{cases}$ звідки $x\ge -1$.

Ліва частина нерівності є зростаючою функцією $f(x)$ на проміжку $[-1;+\infty)$, оскільки це сума трьох зростаючих функцій. Рівність досягається лише при $x=3$. Якщо $-1\le x\le 3$, то $f(x)\le 9$, а якщо $x>3$, то $f(x)>9$. Відповідь: $x\in[-1;3]$. *

7. $\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$.

* Згідно з означенням арифметичного кореня чисельник дробу додатний при $x>-1{,}5$. Тому вихідна нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases}x>-1{,}5\\ 2x^2-x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1{,}5,\\ \left[\begin{array}{l}x<-0{,}5,\\ x>1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow (-1{,}5<x<-0{,}5 \text{ або } x>1).$$

Відповідь: $x\in(-1{,}5;-0{,}5)\cup(1;+\infty)$. *

Вправи

Розв'язати нерівність.

1. а) $\sqrt{3x+1}<5-2x$; б) $\sqrt{4x+1}\le 1-2x$; в) $\sqrt{7x-3}>3x-2$; г) $\sqrt{5-2x}\ge 4x-1$.

2. а) $\frac{3}{2-\sqrt{x}}<2$; б) $\frac{4}{\sqrt{x}-3}\ge 1$.

3. а) $\sqrt{x^2-x-2}>2x+6$; б) $\sqrt{2x^2-x-1}>2-x$; в) $\sqrt{2x^2-x-1}<2-x$; г) $\sqrt{x^2-2}\le 2x+5$.

Відповіді до вправ

§ 2. 1. а) $A<B$; б) $A<B$; в) $A>B$; г) $A>B$; д) $A=B$; е) $A<B$.

§ 3. 1. а) Ні; б) ні; в) ні; г) так. **2.** а) $x<8/3$; б) $x<7$; в) $x>1/6$; г) $x>1/4$; д) $x<5$; е) $x<2\frac{1}{28}$.

3. –4. **4.** а) $x>3.75$; б) $x>-\frac{10}{29}$; в) $x\in\left(-\frac{13}{41};\frac{69}{26}\right)$. **5.** 4, 5, 6, 7. 8, 9. 10, 11. **6.** 3. **7.** а) $x\in\left(\frac{3}{4};\frac{11}{4}\right)$;

б) $x\in\left[-\frac{2}{7};\frac{8}{7}\right]$; в) $x\in(-\infty;1.12)\cup(7/12;+\infty)$; г) $x\in(-\infty;1]\cup[17/9;+\infty)$. **8.** а) $x\in(-1;3)\cup(-7;-3)$;

б) $x\in(-0{,}26;0{,}1)\cup(1{,}1;1{,}46)$. **9.** а) $x\in(-\infty;-4]$; б) $x\in(-\infty;5/3)$.

§ 4. 1. а) $x\in(-3;1)$; б) $x\in\varnothing$; в) $x\in\mathbf{R}$; г) $x\in\varnothing$; д) $x\in[-3;0]$; е) $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{7}}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{2}{\sqrt{7}};+\infty\right)$. **2.** а) $x\in(-1;3)$; б) $x\in(-\infty;-2)\cup(-0{,}5;0{,}5)\cup(2;+\infty)$; в) $x\in\left(2;\left(3+\sqrt{41}\right)/2\right)$.

§ 5. 1. а) $x\in(-1;4)$; б) $x\in(-\infty;-1{,}5)\cup(0;+\infty)$; в) $x\in(-4;1{,}5)$. **2.** а) $x\in(-2;1)\cup(7;+\infty)$; б) $x\in(-2;0]\cup(2;+\infty)$; в) $x\in[-7;-2)\cup[2/3;4)$. **3.** а) $x\in(-\infty;1)\cup(2;3)$; б) $x\in(-\infty;1]\cup\{2\}$. **4.** а) $x\in(-\infty;2)\cup(3{,}5;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;-2)\cup(1;4]$; в) $x\in(1;2)$. **5.** а) $x\in(2;3)\cup(-4;-3]$;

б) $x\in\left[\frac{1-\sqrt{29}}{2};-2\right)\cup\left[\frac{1+\sqrt{29}}{2};\infty\right)$.

§ 6. 1. а) $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{23-\sqrt{145}}{8}\right)$; б) $x\in\left[-\frac{1}{4};0\right]$; в) $x\in\left[\frac{3}{7};\frac{19+\sqrt{109}}{18}\right)$; г) $x\in\left(-\infty;\frac{3+\sqrt{73}}{16}\right]$.

2. а) $x\in\left[0;\frac{1}{4}\right)\cup(4;+\infty)$; б) $x\in(9;49]$. **3.** а) $x\in(-\infty;-2)$; б) $x\in\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right)\cup$

$\cup\left(\frac{-3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$; в) $x\in\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[1;\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)$;. г) $x\in\left[\sqrt{2};+\infty\right)\cup$

$\cup\left[\frac{\sqrt{19}-10}{3};-\sqrt{2}\right]$.

Тема 9. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

§ 1. Показникова і логарифмічна функції

1.1. *Показниковою* називається функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Основні властивості цієї функції:

1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) несиметрична; 3) неперіодична; 4) функція додатна на всій області визначення; 5) на всій області визначення зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$: 6) при $a > 1$ має горизонтальну асимптоту — вісь Ox на $-\infty$; при $0 < a < 1$ має горизонтальну асимптоту — вісь Ox — на $+\infty$.

На рис. 9.1, 9.2 показано відповідно графіки функцій $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Показникова функція неперервна на всій числовій прямій. Відо-

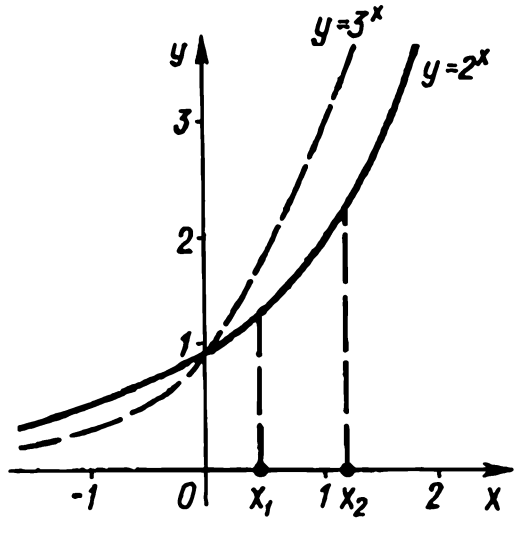


Рис. 9.1

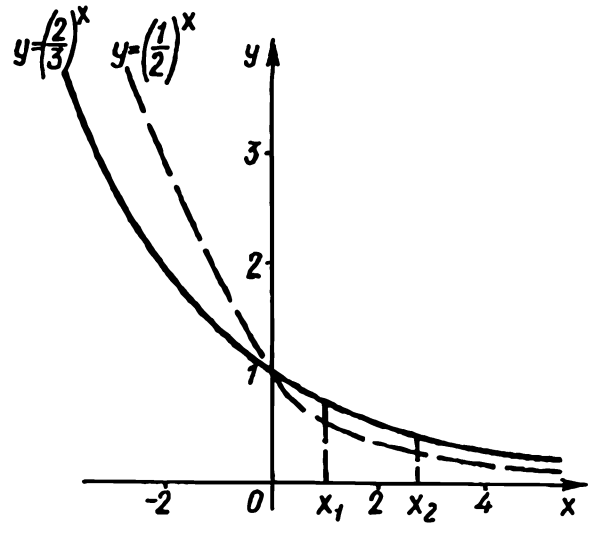


Рис. 9.2

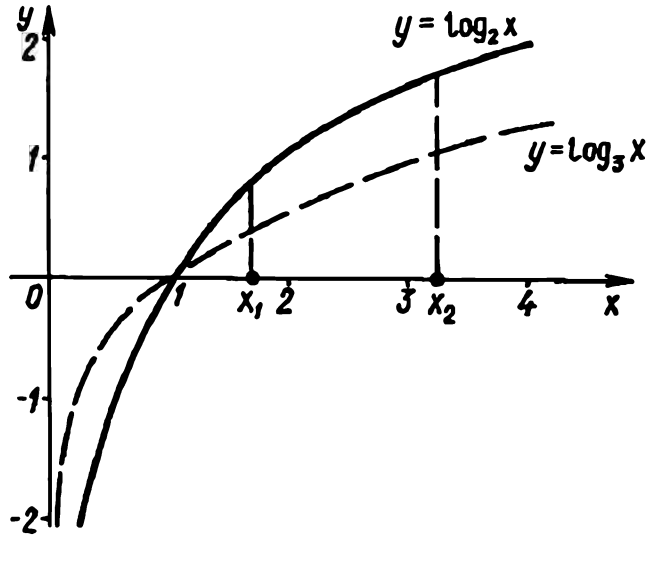


Рис. 9.3

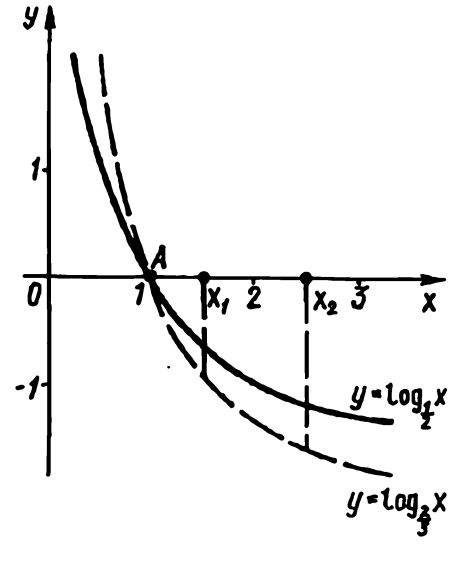


Рис. 9.4

мо, що неперервна монотонна функція має обернену. Ця обернена функція називається *логарифмічною* і позначається так: $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Основні властивості логарифмічної функції:

1) $D(y) = (0; \infty)$; 2) несиметрична; 3) неперіодична; 4) $y > 0$ при $x > 1$, $y = 0$ при $x = 1$, $y < 0$ при $0 < x < 1$, якщо $a > 1$; 5) при $a > 1$ функція зростає; при $0 < a < 1$ функція спадає на всій області визначення; 6) має вертикальну асимптоту — вісь Oy.

На рис. 9.3, 9.4 відповідно показано графіки функцій $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ та $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{2}{3}} x$. Ці графіки легко одержати, використовуючи теорему про те, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Так, графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$ симетричні відносно прямої $y = x$.

1.2. Розглянемо приклади побудови графіків показникової і логарифмічної функцій за допомогою геометричних перетворень.

Приклади

1. Побудувати графік функції $y = 2^{1-|x|}$ та дослідити цю функцію.

* Побудову графіка даної функції зробимо за такими етапами:

1) $f(x) = 2^x$ — графік і властивості цієї функції вважаємо відомими.

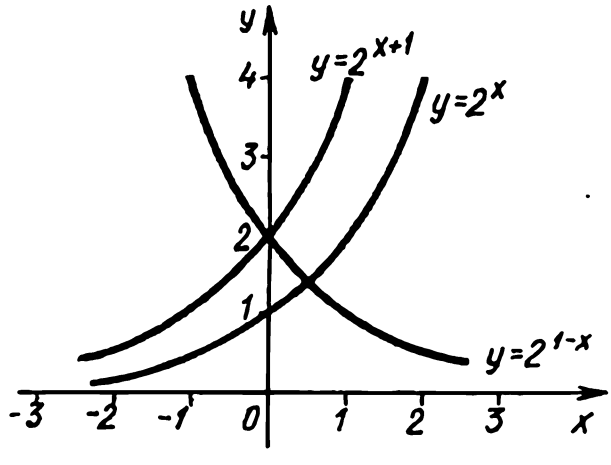


Рис. 9.5

2) $f(x + 1) = 2^{x+1}$. Графік цієї функції одержується з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного зсуву на одну одиницю ліворуч.

3) $f(-x + 1) = 2^{1-x}$. Графік цієї функції симетричний графіку функції $f(x + 1)$ відносно осі Oy.

4) $f(1 - |x|) = 2^{1-|x|}$. Ця функція парна. Її графік легко отримати, якщо помітити, що при $x \geq 0$ цей графік збігається з графіком функції $f(-x + 1)$. Етапи побудови графіка показано на рис. 9.5. а потрібний графік — на рис. 9.6.

Відмітимо основні властивості даної функції: 1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) функція парна; 3) неперіодична; 4) додатна на всій області визначення; 5) зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; \infty)$, $\max\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = f(0) = 2$; 6) має горизонтальну асимптоту — вісь Ox на $\pm\infty$. *

2. Побудувати графік функції $y = \log_3 \big||x| - 1\big|$ і дослідити цю функцію.

* Відмітимо етапи побудови графіка:

1) $f(x) = \log_3 x$ — вважаємо графік і властивості цієї функції відомими;

2) $f(|x|) = \log_3 |x|$ — ця функція парна, причому її графік при $x > 0$ збігається з графіком функції $f(x)$;

3) $f(|x - 1|) = \log_3 |x - 1|$ — графік цієї функції можна одержати із графіка функції $f(|x|)$ за допомогою паралельного зсуву на одну одиницю праворуч;

4) $f\big(\big||x| - 1\big|\big) = \log_3 \big||x| - 1\big|$ — ця функція парна, причому її графік при $x \geq 0$ збігається з графіком функції $y = f(|x - 1|)$.

Етапи побудови графіка показано на рис. 9.7. а підсумковий графік — на рис. 9.8.

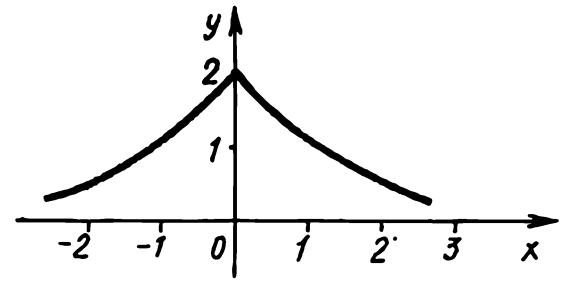


Рис. 9.6

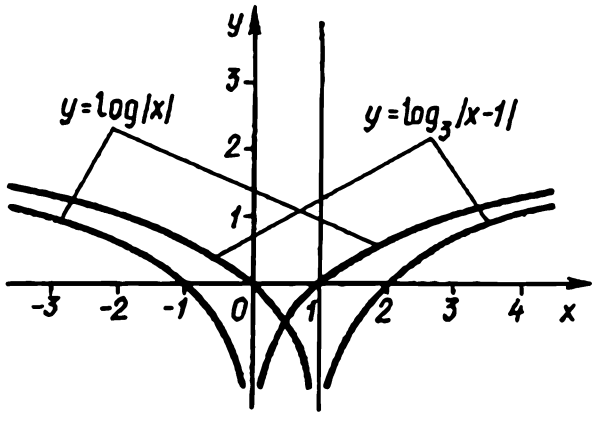


Рис. 9.7

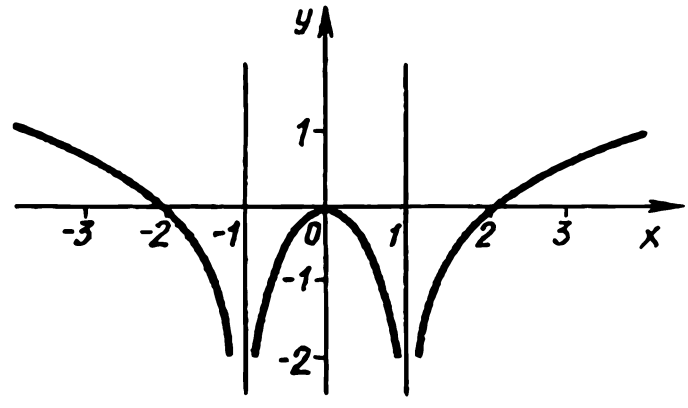


Рис. 9.8

Основні властивості даної функції: 1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$, графік має дві вертикальні асимптоти $x = -1$, $x = 1$; 2) функція парна; 3) неперіодична; 4) $f(x) = 0$ при $x \in \{-2; 0; 2\}$. $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$; 5) функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ та $(0; 1)$, зростає на кожному з проміжків $(-1; 0)$ та $(1; \infty)$. Функція має локальний максимум $y_{max} = y(0) = 0$. *

Вправи

1. Знайти область визначення функції:

а) $y = 2^{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y = \log_2\left(1 - x^2\right)$; в) $y = \log_3\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

2. Побудувати графік і дослідити функцію:

а) $y = 3^{|x-2|}$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|-1}$; г) $y = 2\log_2\left(2 - |x-1|\right)$; д) $y = -\log_3\left(|x-2| - 1\right)$.

§ 2. Властивості логарифмів

2.1. Нехай a — додатне число, $a \neq 1$. Число t називається *логарифмом числа* M за основою a, якщо $M = a^t$. Число a називається *основою логарифма*. Позначення: $t = \log_a M$.

Отже, за означенням $t = \log_a M \Leftrightarrow a^t = M$ при $a > 0$, $a \neq 1$. Підставляючи в рівність $a^t = M$ значення t, одержуємо основну логарифмічну тотожність $a^{\log_a M} = M$.

Основні властивості логарифмів:

$$1.\ \log_a(pq) = \log_a p + \log_a q \quad (p > 0,\ q > 0); \tag{9.1}$$

$$2.\ \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q \quad (p > 0,\ q > 0); \tag{9.2}$$

$$3.\ \log_a p^\gamma = \gamma \log_a p \quad (p > 0,\ \gamma \in \mathbf{R}); \tag{9.3}$$

$$4.\ \log_{a^\beta} p^\alpha = \frac{\alpha}{\beta}\log_a p \quad (\beta \neq 0,\ p > 0); \tag{9.4}$$

$$5.\ \log_q p = \frac{\log_a p}{\log_a q} \quad (p > 0,\ q > 0,\ q \neq 1); \tag{9.5}$$

$$6.\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad (c > 0,\ a > o,\ b > 0,\ b \neq 1). \tag{9.6}$$

Властивості логарифмів тісно пов'язані з властивостями степенів.

Доведемо властивість 1. Нехай $\log_a p = t_1$, $\log_a q = t_2$. Тоді $p = a^{t_1}, q = a^{t_2}$, $p \cdot q = a^{t_1 + t_2}$, звідки $\log_a (pq) = t_1 + t_2 = \log_a p + \log_a q$. Аналогічно доводимо властивість 2.

Доведемо властивість 3: $a^{\gamma \log_a p} = \left(a^{\log_a p}\right)^{\gamma} = p^{\gamma}$, звідки за означенням $\gamma \log_a p = \log_a p^{\gamma}$.

Доведемо властивість 4: $\left(a^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta} \log_a p} = a^{\alpha \log_a p} = \left(a^{\log_a p}\right)^{\alpha} = p^{\alpha}$, звідки за означенням $\log_{a^{\beta}} p^{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \log_a p$.

Доведемо властивість 5. Нехай $\log_q p = t$, тоді $p = q^t$. Звідси маємо $\log_a p = \log_a q^t = t \log_a q$ (згідно з властивістю 3). Далі $t = \frac{\log_a p}{\log_a q} = \log_q p$, що й треба було довести.

Покажемо ще один спосіб доведення цієї важливої тотожності.

Перепишемо формулу (9.5): $\log_a p = \log_a q \cdot \log_q p$. Тепер маємо $a^{\log_a q \cdot \log_q p} = \left(a^{\log_a q}\right)^{\log_q p} = q^{\log_q p} = p$. (Ми двічі застосували основну логарифмічну тотожність.) Властивість 5 дає змогу переходити від логарифма з однією основою до логарифма з іншою основою.

Доведемо властивість 6. Нехай $a^{\log_b c} = M$, $c^{\log_b a} = p$. Далі $\log_b M = \log_b c \cdot \log_b a$; $\log_b p = \log_b a \cdot \log_b c$. Оскільки $\log_b M = \log_b p$, то $M = p$.

Із наведених властивостей логарифмів можна одержати численні наслідки.

Покладаючи в формулі (9.5) $a = p$, маємо

$$\log_q p = \frac{1}{\log_p q}. \tag{9.7}$$

Покладаючи в формулі (9.4) $\alpha = 1$, маємо

$$\log_{a^{\beta}} p = \frac{1}{\beta} \log_a p. \tag{9.8}$$

Покладаючи в формулі (9.4) $\beta = \alpha$, маємо

$$\log_{a^{\alpha}} p^{\alpha} = \log_a p. \tag{9.9}$$

2.2. Розглянемо декілька характерних прикладів.

Приклади

1. Обчислити $\log_{2\sqrt[3]{2}} 4$.

* $\log_{2\sqrt[3]{2}} 4 = \log_{2^{4/3}} 2^2 = \dfrac{2}{4/3} = \dfrac{3}{2}$. Ми скористалися властивістю 4. *

2. Обчислити $3^{\log_{27} 15}$.

* $3^{\log_{27} 15} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{27} 15} = \left(27^{\log_{27} 15}\right)^{\frac{1}{3}} = 15^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{15}$. *

3. Обчислити $\log_2 7 \cdot \log_{49} 16$.

* Згідно з формулою (9.4) маємо $\log_2 7 \cdot \log_{49} 16 = \log_2 7 \cdot \log_{7^2} 2^4 = \dfrac{4}{2}\log_2 7 \cdot \log_7 2$.

Оскільки за формулою (9.7) $\log_2 7 \cdot \log_7 2 = 1$, то $\log_2 7 \cdot \log_{49} 16 = 2$. *

4. Довести, що число $\log_2 5$ ірраціональне.

* Доведення проведемо від супротивного. Нехай число $\log_2 5$ раціональне. Тоді існують натуральні числа m, n такі, що $\log_2 5 = \dfrac{m}{n}$. Далі $5 = 2^{\frac{m}{n}}$ і $5^n = 2^m$. Ми прийшли до протиріччя, бо у лівій частині останньої рівності стоїть число, що закінчується цифрою 5, а число 2^m при будь-якому натуральному m не закінчується цифрою 5. *

5. Відомо, що числа $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ ($x > 0$, $x \neq 1$) утворюють арифметичну прогресію. Довести, що $n^2 = (nk)^{\log_k m}$.

* Оскільки дані числа утворюють арифметичну прогресію, $2\log_m x = \log_k x + \log_n x$. Звідси згідно з формулою (9.7) маємо

$$\frac{2}{\log_x m} = \frac{1}{\log_x k} + \frac{1}{\log_x n}. \qquad \frac{2}{\log_x m} = \frac{\log_x (kn)}{\log_x k \cdot \log_x n}.$$

$$2\log_x n = \frac{\log_x m}{\log_x k} \cdot \log_x (kn), \qquad \log_x n^2 = \log_k m \cdot \log_x (kn).$$

Згідно з формулою (9.3) $\log_x n^2 = \log_x (kn)^{\log_k m}$, звідки $n^2 = (kn)^{\log_k m}$, що й треба було довести. *

6. Довести тотожність

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

* Перетворимо праву частину, використовуючи формулу (9.7):

$$\frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N} = \frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{1}{\log_N b} \cdot \frac{1}{\log_N c}(\log_N a + \log_N b + \log_N c) = \frac{1}{\log_N b} \cdot \frac{1}{\log_N c} +$$

$$+ \frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{1}{\log_N c} + \frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{1}{\log_N b} = \log_b N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_c N + \log_a N \cdot \log_b N,$$

що й треба було довести. *

Зауважимо, що доведена тотожність виконується при $N > 0$, $N \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $abc \neq 1$.

7. Довести тотожність

$$2^{\sqrt[3]{\log_2 3 \cdot \log_2 5}} = 3^{\sqrt[3]{\log_3 2 \cdot \log_3 5}}$$

Дана тотожність рівносильна кожній з рівностей

$$\sqrt[3]{\log_2 3 \cdot \log_2 5} = \sqrt[3]{\log_3 2 \cdot \log_3 5} \cdot \log_2 3, \quad \sqrt[3]{\frac{\log_2 3 \cdot \log_2 5}{\log_3 2 \cdot \log_3 5}} = \log_2 3, \quad \sqrt[3]{\log_2^2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_3 5}} = \log_2 3.$$

Помітимо, що згідно з формулою (9.5) $\frac{\log_2 5}{\log_3 5} = \log_2 5 : \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \log_2 3$.

Отже, $\sqrt[3]{\log_2^2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_3 5}} = \sqrt[3]{\log_2^2 3 \cdot \log_2 3} = \log_2 3$, що завершує доведення. *

8. Дано $\log_2 6 = a$, $\log_3 7 = b$. Знайти $\log_{36} 21$.

$$* \log_{36} 21 = \frac{\log_2 21}{\log_2 36} = \frac{\log_2 3 + \log_2 7}{2\log_2 6} = \frac{\log_2 3 + \log_2 7}{2a}; \qquad (П9.1)$$

$\log_2 6 = a = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$, звідки $\log_2 3 = a - 1$;

$$b = \log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{\log_2 7}{a-1}, \text{ звідки } \log_2 7 = (a-1)b.$$

Тепер із рівності (П9.1) одержимо $\log_{36} 21 = \frac{a-1+(a-1)b}{2a} = \frac{(a-1)(b+1)}{2a}$.

Відповідь: $\frac{(a-1)(b+1)}{2a}$. *

9. Порівняти числа $A = \log_3 6$ та $B = \log_5 7$.

* $2A = 2\log_3 6 = \log_3 36 > \log_3 27 = 3$, а $2B = 2\log_5 7 = \log_5 49 < 3$. Отже, $2A > 2B$ і $A > B$. *

Вправи

1. Обчислити

а) $27^{\log_{\sqrt[3]{3}} 17}$; б) $2^{\log_8 \frac{1}{3}}$; в) $\sqrt{5}^{\log_{125} 2}$; г) $343^{\log_7 \sqrt{3}}$;

2. Обчислити

а) $\log_3 8 \cdot \log_2 243$; б) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$.

3. Довести, що числове значення виразу

$$M = \log_{a_1} M_1 \cdot \log_{a_2} M_2 \cdot \ldots \cdot \log_{a_k} M_k$$

не зміниться за будь-якої перестановки основ логарифмів $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

4. Довести, що число $\log_n(n+1)$ ірраціональне при $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$.

5. Довести тотожності

а) $\frac{\log_n m}{\log_{nk} m} = 1 + \log_n k$; б) $\log_{bn}(an) = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$;

в) $a^{\frac{\log_b(\log_b c)}{\log_b a}} = \log_b c$.

6. Дано: $\log_{12} 18 = \alpha$, $\log_{24} 54 = \beta$. Довести, що $\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1$.

7. Дано: $\log_3 6 = a$, $\log_2 7 = b$. Знайти $\log_6 42$.

8. Довести, що $\log_{11} 12 > \log_{12} 13$.

§ 3. Логарифмування та потенціювання

3.1. Знаходження логарифму деякого виразу за певною основою називається *логарифмуванням* цього виразу.

Приклади

1. $S=\sqrt{\dfrac{a^3b^3\sqrt{b}}{c\sqrt[3]{a}}}$. Знайти $\log_z S$.

* $S=\left(\dfrac{a^3b^{3\frac{1}{2}}}{ca^{1/3}}\right)^{1/2}=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{7}{4}}}{c^{1/2}}$.

Згідно з формулами (9.1) — (9.3) із § 2 маємо $\log_z S=\log_z\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{7}{4}}}{c^{1/2}}=\dfrac{4}{3}\log_z a+\dfrac{7}{4}\log_z b-$

$-\dfrac{1}{2}\log_z c$. *

2. $M=\dfrac{\pi\sqrt[4]{x\sqrt{y}}}{x^2y}$. Знайти $\log_z M$.

* $M=\dfrac{\pi\cdot x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{8}}}{x^2y}=\pi\cdot x^{-\frac{7}{4}}y^{-\frac{7}{8}}$.

Згідно з формулами (9.1) — (9.3) із § 2 маємо

$$\log_z M=\log_z\pi-\frac{7}{4}\log_z x-\frac{7}{8}\log_z y.$$

Знаходження виразу за даним логарифмом називається *потенціюванням*.

3. $\log_z S=\dfrac{1}{3}\log_z a-\dfrac{2}{5}\log_z b-\dfrac{1}{4}\log_z c$. Знайти S.

* $\log_z S=\log_z a^{\frac{1}{3}}-\log_z b^{\frac{2}{5}}-\log_z c^{\frac{1}{4}}$.

Ми використали формулу (9.3) з § 2. Тепер згідно з формулами (9.1) і (9.2) маємо $\log_z S=$

$=\log_z\dfrac{a^{1/3}}{b^{2/5}c^{1/4}}$, звідки $S=\dfrac{a^{1/3}}{b^{2/5}c^{1/4}}$.*

3.2. Логарифм за основою 10 називається *десятковим*. Позначення: $\log_{10}a=\lg a$.

Розглянемо стандартний вигляд додатного числа a : $a=a_1\cdot 10^n$, де $1\le a_1<10$, $n\in\mathbf{Z}$.

Нагадаємо, що число n називається *порядком числа* a. Далі, $\lg a=n+\lg a_1$, де $0\le\lg a_1<1$. Зрозуміло, що $n=[\lg a]$ — ціла частина числа $\lg a$, а $\lg a_1=\{\lg a\}$ — дробова частина числа $\lg a$. Число n називається *характеристикою*, а число $\lg a_1$ — *мантисою* числа $\lg a$.

Характеристика десяткового логарифма легко визначається без таблиць (і в цьому перевага десяткових логарифмів над логарифмами за іншими основами). Якщо число a більше одиниці, то характеристика числа $\lg a$ на 1 менше від кількості знаків до коми. Наприклад, [lg 1234,1] = 3, [lg 252,68] = 2 і т.д. Якщо число a менше від одиниці, то $a=\underbrace{0{,}00\ldots0}_{n}p$ і $[\lg a]=-n$. Наприклад, [lg 0,2] = –1, [lg 0,036] = –2, [lg 0,0042] = –3 і т.д.

Мантиси десяткових логарифмів визначаються за таблицями. Мантиса десяткового логарифма — це додатне число, яке не залежить від положення коми в даному

числі, бо числа $\lg a$ і $\lg(a \cdot 10^k)$, $k \in \mathbf{Z}$ мають однакові мантиси. Запис $\lg a = \bar{2},3502$ означає, що характеристика $\lg a$ дорівнює –2, а мантиса 0,3502.

Обчислимо за допомогою таблиць десяткових логарифмів:

$$x = \frac{\pi\sqrt{297}\ 1{,}26^7}{27{,}4^4 \cdot \sqrt[3]{0{,}0474}};$$

$$\lg x = \lg\pi + \frac{1}{2}\lg 297 + 7\lg 1{,}26 - 4\lg 274 - \frac{1}{3}\lg 0{,}0474 = 0{,}4971 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}4728 + 7\cdot 0{,}1004 -$$

$$- 4\cdot 2{,}4378 - \frac{1}{3}\bar{2},6758 = 0{,}4971 + 1{,}2364 + 0{,}7028 - 9{,}7512 - \bar{1},5586 = 0{,}4971 + 1{,}2364 +$$

$$+ 0{,}7028 + \overline{10},2488 + 0{,}4414 = \bar{7},1265; \quad x = 0{,}0000001339.$$

Вправи

1. Знайти логарифми виразів:

а) $M = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^7}{c^5}}$; б) $S = \sqrt[3]{\frac{x\sqrt{x}\cdot y^{10}}{x^2 \cdot z^5}}$.

2. Знайти S, якщо

а) $\log_z S = \frac{1}{2}\log_z a - \frac{8}{5}\log_z b + \frac{1}{3}\log_z c - \frac{1}{4}\log_z d$;

б) $\log_z S = \frac{2}{3}\log_z x + \frac{2}{5}\log_z y + 3$;

в) $\log_z S = \frac{1}{10}\log_z a + \frac{2}{3}\log_z b - 2 - \frac{1}{2}\log_z c$.

3. Відомо, що $\lg 2 = 0{,}301$. Скільки знаків має число 2^{100}?

4. Обчислити за допомогою таблиць:

а) $x = \frac{23{,}7^5 \cdot 1{,}37^4}{\sqrt[4]{143{,}2}}$; б) $x = \frac{0{,}481^3 \cdot 2{,}51^2}{\sqrt{342{,}6^3 \cdot 0{,}28^3}}$.

§ 4. Показникові та логарифмічні рівняння і системи рівнянь

4.1. Рівняння, що містить невідоме тільки в показнику степеня, називається *показниковим*.

Найпростішим показниковим рівнянням є рівняння $a^x = b$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$). Його розв'язком є число $x = \log_a b$. Можна виділити декілька типів показникових рівнянь, що зустрічаються найчастіше.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $2^{f(x)} = 1$, де $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

* Дане рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = 0$ або $x^2 - 4x + 3 = 0$, звідки $x = 1$ або $x = 3$. Відповідь: $x \in \{1; 3\}$. *

2. Розв'язати рівняння $4^{3x - 2x^2} = \sqrt[3]{2}$.

* Запишемо дане рівняння у вигляді $2^{6x-4x^2} = 2^{\frac{1}{3}}$. Далі $6x-4x^2 = \frac{1}{3}$, звідки $x = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{12}$.

Відповідь: $x = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{12}$. *

3. Розв'язати рівняння $2^{3x-4} = 3^{1-x}$.

* Логарифмуючи обидві частини рівняння за основою 10, маємо $(3x-4)\lg 2 = (1-x)\lg 3$, звідки $x = \frac{4\lg 2 + \lg 3}{3\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 48}{\lg 24} = \log_{24} 48$. Відповідь: $x = \log_{24} 48$. *

4. Розв'язати рівняння $3^x - 2^{x+2} = 3^{x-1} - 2^{x-1} - 2^{x-3}$.

* $3^x - 3^{x-1} = 2^{x+2} - 2^{x-1} - 2^{x-3}$, $3^{x-1} \cdot 2 = 2^{x-3}(2^5 - 2^2 - 1)$, $2 \cdot 3^{x-1} = 27 \cdot 2^{x-3}$, $3^{x-4} = 2^{x-4}$. Розділимо обидві частини одержаного рівняння на $2^{x-4} > 0$: $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} = 1$, звідки $x-4=0$ і $x=4$. Відповідь: $x=4$. *

5. Розв'язати рівняння $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{5}{3}$.

* $3 \cdot 2^x + \frac{3}{2^x} = 5 \cdot 2^x - \frac{5}{2^x}$, $\frac{8}{2^x} = 2 \cdot 2^x$, $4 = \left(2^x\right)^2 = 4^x$, $x = 1$. Відповідь: $x = 1$. *

6. Розв'язати рівняння $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0.2$.

* Нехай $5^{x-1} = y$. Тоді маємо систему

$$\begin{cases} 15y^2 - 2y - \frac{1}{5} = 0, \\ y > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{5}, \quad y_2 = -\frac{1}{15}, \\ y > 0. \end{cases}$$

$y = \frac{1}{5} = 5^{x-1}$ або $5^{-1} = 5^{x-1}$, звідки $x = 0$. Відповідь: $x = 0$. *

7. Розв'язати рівняння $4^x + 6^x = 9^x$.

* Розділимо обидві частини на 9^x: $\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 0$. Покладемо $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$.

Маємо систему

$$\begin{cases} y^2 + y - 1 = 0, \\ y > 0, \end{cases} \quad y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Далі $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Відповідь: $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. *

Розглянуте рівняння належить до так званих однорідних показникових рівнянь. Ці рівняння мають вигляд $ma^{2x} + na^x b^x = p \cdot b^{2x}$. Розділивши обидві частини на b^{2x} і зробивши підстановку $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y$, одержимо систему

$$\begin{cases} my^2 + ny = p, \\ y > 0 \end{cases}$$

і т.д.

8. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

* Помітимо, що $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$ і зробимо підстановку $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=y$. Одержимо рівняння $y+\frac{1}{y}=4$, $y^2-4y+1=0$, $y=2\pm\sqrt{3}$.

1) $y=2+\sqrt{3}=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$, $x=2$.

2) $y=2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$, $x=-2$.

Відповідь: $x=\pm 2$. *

9. Розв'язати рівняння $3^x+4^x=5^x$.

* Розділимо обидві частини рівняння на $5^x>0$. Маємо $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$. Функції $y_1=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ та $y_2=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ спадні, отже, функція $y=y_1+y_2=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ спадна. Тому рівняння $y=1$ не може мати більше одного кореня. Оскільки $x=2$ — корінь цього рівняння, маємо відповідь: $x=2$. *

10. Розв'язати рівняння $27^x+3^{x+4}=702$.

* Ліва частина даного рівняння — зростаюча функція. Отже, рівняння не може мати більше одного кореня. Проте знайти цей корінь так, як ми це робили в попередньому прикладі, не вдається. Зробимо підстановку $3^x=y$. Маємо рівняння $y^3+81y-702=0$, $(y-6)(y^2+6y+117)=0$, $y=6$, $3^x=6$, $x=\log_3 6$. Відповідь: $x=\log_3 6$. *

11. Розв'язати рівняння $2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992$.

* Запишемо рівняння у вигляді

$$2^{x^2-4}\left(2^{x+2}-1\right)=992. \qquad (П9.2)$$

При $x\ge 0$ функція $y=x^2-4$ зростає, отже, зростає і функція $y=2^{x^2-4}$. Ліва частина рівняння (П9.2) — зростаюча функція. На проміжку $[0;\infty)$ рівняння (П9.2) має єдиний розв'язок $x=3$. При $x\le -2$ ліва частина недодатна, отже на проміжку $(-\infty;-2]$ розв'язків немає. Лишається перевірити інтервал $(-2;0)$. При $x\in(-2;0)$ маємо $0<x^2<4$, $-4<x^2-4<0$, $2^{-4}<2^{x^2-4}<1$. Крім того, при $x\in(-2;0)$ $0<x+2<2$ і $0<2^{x+2}-1<3$. Отже, при $x\in(-2;0)$ ліва частина рівняння (П9.2) менше $1\cdot 3=3$, і розв'язків не має. Відповідь: $x=3$. *

4.2. Рівняння, що містять невідоме під знаком логарифма або в основі логарифма, називаються *логарифмічними*.

Найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a x=t$, де $a>0$, $a\ne 1$, має єдиний розв'язок $x=a^t$.

До найпростіших логарифмічних рівнянь належить також рівняння $\log_x a=b$.

Розглянемо всі можливі випадки.

1) $a=1$, $b=0$, тоді розв'язком рівняння є будь-яке додатне число, відмінне від одиниці.

2) $a=1$, $b\ne 0$. Розв'язків немає.

3) $a\ne 1$, $b=0$. Розв'язків немає.

4) $a\ne 1$, $b\ne 0$. Рівняння має єдиний розв'язок $x=a^{\frac{1}{b}}$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{x}\right)=3.$

* $\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{x}\right)=3 \Leftrightarrow -\frac{3}{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x=-24.$

Відповідь: $x=-24.$ *

2. Розв'язати рівняння $\log_4(3x-2)^2=0.$

* $\log_4(3x-2)^2=0 \Leftrightarrow (3x-2)^2=4^0=1 \Leftrightarrow |3x-2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-2=1,\\3x-2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\x=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$

Відповідь: $x\in\left\{\frac{1}{3};1\right\}.$ *

3. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2}\left(\log_4 2+\log_4 x-\frac{1}{2}\log_4 3\right)=2-\log_4 5.$

* Після перетворень маємо

$$\log_4 x=4-2\log_4 5-\log_4 2+\frac{1}{2}\log_4 3,$$

$$\log_4 x=\log_4 256-\log_4 25-\log_4 2+\log_4\sqrt{3}.$$

звідки після потенціювання одержимо: $x=\frac{256\sqrt{3}}{50}=\frac{128\sqrt{3}}{25}.$ Відповідь: $x=\frac{128\sqrt{3}}{25}.$ *

4. Розв'язати рівняння $\log_{x-1}5=2.$

* Це рівняння рівносильне рівнянню $x-1=5^{\frac{1}{2}}$, звідки $x=\sqrt{5}+1.$ Відповідь: $x=\sqrt{5}+1.$ *

5. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{5}}\log_{\frac{1}{3}}x=-1.$

* $\log_{\frac{1}{5}}\log_{\frac{1}{3}}x=-1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}x=5 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}.$

Відповідь: $x=\frac{1}{243}.$ *

6. Розв'язати рівняння $\frac{2}{4-3\lg x}+\frac{3}{1+2\lg x}=3.$

* Після підстановки $y=\lg x$ отримаємо рівняння

$$\frac{2}{4-3y}+\frac{3}{1+2y}=3, \quad \frac{14-5y}{(4-3y)(1+2y)}=3.$$

$$\begin{cases}14-5y=3(4-3y)(1+2y),\\ y\neq\frac{4}{3},\ y\neq-\frac{1}{2}.\end{cases} \quad \begin{cases}9y^2-10y+1=0,\\ y\neq\frac{4}{3},\ y\neq-\frac{1}{2}.\end{cases} \quad y=1 \text{ або } y=\frac{1}{9}.$$

1) $y=1=\lg x$, $x=10$; 2) $y=\frac{1}{9}=\lg x$, $x=10^{\frac{1}{9}}=\sqrt[9]{10}.$ Відповідь: $x\in\left\{10;\sqrt[9]{10}\right\}.$ *

Часто при розв'язуванні логарифмічних рівнянь зручно перейти до системи.
Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне кожній із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад

7. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt{3}} \frac{3-x}{5} = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{x+2}$.

* Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \frac{3-x}{5} = \frac{1}{x+2}, \\ \frac{1}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Відповідь: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Рівняння виду $\log_{f(x)} a = \log_{g(x)} a$, де $a > 0$, рівносильне кожній із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Приклад

8. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{3x-1}{x}} 5 = \log_{\frac{1-2x}{3}} 5$.

* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{x} = \frac{1-2x}{3}, \\ \frac{1-2x}{3} > 0, \\ \frac{1-2x}{3} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8x - 3 = 0, \\ x < \frac{1}{2}, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{22}}{2}.$$

Відповідь: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{22}}{2}$. *

Рівняння $\log_{f(x)} g(x) = t$ рівносильне системі

$$\begin{cases} g(x) = [f(x)]^t, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$$

Приклад

9. Розв'язати рівняння $\log_{2x-1}(x^2 - 2x + 3) = 2$.

* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-2x+3=(2x-1)^2, \\ 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x-2=0, \\ x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{7}}{3}.$$

Відповідь: $x=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$. *

Рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильне кожній із систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \\ \varphi(x)\neq 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \\ \varphi(x)\neq 1. \end{cases}$$

Приклад

10. Розв'язати рівняння

$$\log_{x^2-x}(x^3+1)=\log_{x^2-x}(4x^2-x-5).$$

* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^3+1=4x^2-x-5, \\ x^3+1>0, \\ x^2-x>0, \\ x^2-x\neq 1. \end{cases}$$

Кубічне рівняння $x^3 + 1 = 4x^2 - x - 5$ має три корені: –1, 2, 3. Із цих трьох чисел систему задовольняють лише числа 2 і 3. Відповідь: $x \in \{2; 3\}$. *

Рівняння $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$ рівносильне кожній із систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ \varphi(x)>0, \\ f(x)>0, \\ f(x)\neq 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x)=g(x), \\ \varphi(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1. \end{cases}$$

Приклад

11. Розв'язати рівняння $\log_{x^2-3}(3x-6)=\log_{5x-9}(3x-6)$.

* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-3=5x-9, \\ 3x-6>0, \\ 5x-9>0, \\ 5x-9\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\{2;3\}, \\ x>2, \\ x>1{,}8, \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Відповідь: $x = 3$. *

Покажемо ще ряд прикладів, де вигідно зробити перехід від рівняння до змішаної системи.

Приклади

12. Розв'язати рівняння $\log_{3x-2}\left(\log_{x^2-x}(2x^2-3x-2)\right)=0$.

$$* \log_{3x-2}\left(\log_{x^2-x}\left(2x^2-3x-2\right)\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{x^2-x}\left(2x^2-3x-2\right)=1,\\ 3x-2>0,\\ 3x-2\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x-2=x^2-x,\\ x^2-x>0,\\ x^2-x\neq 1\\ 3x-2>0,\\ 3x-2\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{3}.$

Відповідь: $x=1+\sqrt{3}$. *

13. Розв'язати рівняння $\lg 3x = 2\lg(20-3x)$.

$$* \lg 3x=2\lg(20-3x) \Leftrightarrow \begin{cases}\lg 3x=\lg(20-3x)^2,\\ 20-3x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=(20-3x)^2,\\ x<\dfrac{20}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{16}{3},\quad x_2=\dfrac{25}{3},\\ x<\dfrac{20}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{16}{3}.$$

Відповідь: $5\frac{1}{3}$. *

14. Розв'язати рівняння $\log_5(4x^2+3x+5)=3\log_5(x+1)$.

$$* \log_5\left(4x^2+3x+5\right)=3\log_5(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+3x+5=(x+1)^3,\\ x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3-x^2-4=0,\\ x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x^2+x+2)=0,\\ x>-1,\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Відповідь: $x=2$. *

15. Розв'язати рівняння $\log_4(2x-3)+\log_4(x-2)=\log_4 7$.

* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}2x-3>0,\\ x-2>0,\\ (2x-3)(x-2)=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>2,\\ 2x^2-7x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{57}}{4}.$$

Відповідь: $x=\dfrac{7+\sqrt{57}}{4}$. *

У випадках, коли рівняння містить логарифми за різними основами, слід привести всі логарифми до спільної основи.

Приклади

16. Розв'язати рівняння $\log_3 x+\log_9 x+\log_{81} x=7$.

* Враховуючи, що $\log_9 x=\frac{1}{2}\log_3 x$, а $\log_{81} x=\frac{1}{4}\log_3 x$, маємо рівняння $\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+$

$+\frac{1}{4}\log_3 x=7$, $\frac{7}{4}\log_3 x=7$, $\log_3 x=4$, $x=3^4=81$. Відповідь: $x=81$. *

17. Розв'язати рівняння $\log_3^2 x+\log_{3x}\frac{3}{x}=1$.

* Застосуємо формулу (9.5) § 2: $\log_3^2 x + \frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} = 1$, $\log_3^2 x + \frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x} = 1$. Поклавши $y = \log_3 x$, маємо $y^2 + \frac{1-y}{1+y} = 1$, $y^3 + y^2 - 2y = 0$, $y \in \{0; 1; -2\}$. *

Відповідно розглянемо три випадки:

1) $\log_3 x = 0$, $x = 1$; 2) $\log_3 x = 1$, $x = 3$; 3) $\log_3 x = -2$, $x = \frac{1}{9}$. Відповідь: $x \in \left\{\frac{1}{9}; 1; 3\right\}$. *

18. Розв'язати рівняння $3^{\lg x} + 2x^{\lg 3} = 81$.

* Згідно з формулою (9.6) § 2 $3^{\lg x} = x^{\lg 3}$, отже, дане рівняння рівносильне рівнянню $3^{\lg x} + 2 \cdot 3^{\lg x} = 81$, $3 \cdot 3^{\lg x} = 81$, $3^{\lg x} = 3^3$, $\lg x = 3$, $x = 10^3$. Відповідь: $x = 1000$. *

Розглянемо рівняння виду $\varphi(x)^{f(x)} = \varphi(x)^{g(x)}$.

Як правило, такі рівняння розв'язуються за допомогою логарифмування обох частин.

Приклади

19. Розв'язати рівняння

$$x^{\lg x - 5} = \frac{1}{10\,000}.$$

* Логарифмуючи обидві частини за основою 10, маємо $(\lg x - 5)\lg x = -4$, звідки $\lg x = 1$ або $\lg x = 4$. Відповідно $x = 10$ або $x = 10\,000$. Відповідь: $x \in \{10; 10\,000\}$. *

20. Розв'язати рівняння

$$x^{\frac{1}{4}(\lg x + 7)} = 10^{\lg x + 1}.$$

* Логарифмуючи обидві частини рівняння за основою 10, маємо $\frac{1}{4}(\lg x + 7)\lg x = \lg x + 1$.

Нехай $\lg x = y$, тоді $\frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y - 1 = 0$, $y = 1$ або $y = -4$. Відповідно $x = 10$ або $x = 10^{-4}$.

Відповідь: $x \in \{10; 0{,}0001\}$. *

Використання формул (9.1) — (9.6) § 2 може призвести до появи сторонніх коренів або втрати коренів.

Візьмемо формулу (9.1): $\log_a(pq) = \log_a p + \log_a q$. Права частина цієї рівності визначена при $p > 0$, $q > 0$, а ліва при таких p, q, що мають однакові знаки.

Отже, якщо вжити цю формулу «справа наліво», можна одержати сторонні корені, якщо вжити цю формулу «зліва направо», можна втратити корені. Тому на практиці використовують більш загальні формули:

$$\log_a(pq) = \log_a|p| + \log_a|q| \quad (pq > 0), \tag{9.1'}$$

$$\log_a \frac{p}{q} = \log_a|p| - \log_a|q| \quad (pq > 0), \tag{9.2'}$$

$$\log_a p^{2k} = 2k \log_a|p| \quad (p \neq 0,\ k \in \mathbf{Z}), \tag{9.3'}$$

$$\log_{x^{2k}} p = \frac{1}{2}\log_{|x|^k} p \quad (p > 0,\ k \neq 0,\ k \in \mathbf{Z},\ x \neq 0,\ |x| \neq 1). \tag{9.4'}$$

Слід зауважити, що й формули (9.1′), (9.2′) мають зазначену вище ваду. Ліві і праві їхні частини визначені при різних обмеженнях на p та q. Права частина рівності (9.1′) визначена при будь-яких p, q, не рівних нулю, а ліва частина — лише при таких p, q, що мають однакові знаки. Отже, вживання формули (9′.1) «зліва направо» може призвести до появи сторонніх коренів, і тому в даному разі необхідно зробити перевірку.

Приклади

21. Розв'язати рівняння

$$\lg(7x-9)^2+\lg(3x-4)^2=2.$$

* Згідно з формулою (9.3′) маємо рівняння $2\lg|7x-9|+2\lg|3x-4|=2$, рівносильне даному.

Далі $\lg|7x-9|+\lg|3x-4|=1 \Leftrightarrow \lg\left(|7x-9|\cdot|3x-4|\right)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left|(7x-9)(3x-4)\right|=10,\\ x\neq\dfrac{9}{7},\quad x\neq\dfrac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left|21x^2-55x+36\right|=10,\\ x\neq\dfrac{9}{7},\quad x\neq\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

Тепер маємо два випадки:

$$1)\ \begin{cases}21x^2-55x+36=10,\\ x\neq\dfrac{9}{7},\quad x\neq\dfrac{4}{3},\end{cases}\quad x\in\left\{\frac{13}{21};2\right\},\qquad 2)\ \begin{cases}21x^2-55x+36=-10,\\ x\neq\dfrac{9}{7},\quad x\neq\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

Розв'язків немає. Відповідь: $x\in\left\{\dfrac{13}{21};2\right\}$. *

22. Розв'язати рівняння

$$\log_{0.25}\left(x^2+2x-8\right)^2-\log_{0.5}\left(10+3x-x^2\right)=1.$$

* Дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_{0.5}\left|x^2+2x-8\right|=1+\log_{0.5}\left(10+3x-x^2\right) \Leftrightarrow \log_{05}\left|x^2+2x-8\right|=\log_{0.5}\frac{10+3x-x^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left|x^2+2x-8\right|=\dfrac{10+3x-x^2}{2},\\ 10+3x-x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\left|x^2+2x-8\right|=10+3x-x^2,\\ -2<x<5.\end{cases}$$

Оскільки квадратний тричлен x^2+2x-8 має корені $x=-4$ та $x=2$, розглянемо два випадки:

$$1)\ \begin{cases}-2<x\le 2,\\ 2\left(8-2x-x^2\right)=10+3x-x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<x\le 2,\\ x=\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{73}-7}{2};$$

$$2)\ \begin{cases}2<x<5,\\ 2\left(x^2+2x-8\right)=10+3x-x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2<x<5,\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{313}}{6}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{313}-1}{6}.$$

Відповідь: $x\in\left\{\dfrac{\sqrt{73}-7}{2};\dfrac{\sqrt{313}-1}{6}\right\}$. *

4.3. Покажемо на прикладах, як розв'язують системи показникових та логарифмічних рівнянь.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\log_4 x - \log_2 y = 0,\\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0.\end{cases}$$

* Із першого рівняння системи знаходимо: $\log_4 x = \log_2 y = \log_4 y^2$, звідки $x = y^2$. Підставимо це значення y^2 в друге рівняння даної системи: $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Відповідно $y = \pm 1$, $y = \pm 2$.

Перевіркою встановимо, що підходять пари (1; 1) та (4; 2). Відповідь: (1; 1), (4; 2). *

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}4^{(x-y)^2-1} = 1,\\ 5^{x+y} = 125.\end{cases}$$

* Запишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases}4^{(x-y)^2-1} = 4^0,\\ 5^{x+y} = 5^3.\end{cases} \text{ Далі } \begin{cases}(x-y)^2 - 1 = 0,\\ x+y = 3,\end{cases} \quad \begin{cases}|x-y| = 1,\\ x+y = 3.\end{cases}$$

Маємо два випадки:

1) $\begin{cases}x-y=1,\\ x+y=3,\end{cases}$ $x=2$, $y=1$; 2) $\begin{cases}x-y=-1,\\ x+y=3,\end{cases}$ $x=1$, $y=2$.

Відповідь: (2; 1), (1; 2). *

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}3^{\log_x 2} = y^{\log_5 y},\\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_7 x}.\end{cases}$$

* Логарифмуючи обидві частини рівнянь, одержимо

$$\begin{cases}\log_x 2 = \log_5 y \cdot \log_3 y,\\ \log_y 3 = \log_7 x \cdot \log_2 x.\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{1}{\log_2 x} = \dfrac{\log_3^2 y}{\log_3 5},\\ \dfrac{1}{\log_3 y} = \dfrac{\log_2^2 x}{\log_2 7}.\end{cases} \quad \begin{cases}\log_2 x \cdot \log_3^2 y = \log_3 5,\\ \log_3 y \cdot \log_2^2 x = \log_2 7.\end{cases}$$

Поклавши $u = \log_2 x$, $v = \log_3 y$, маємо систему

$$\begin{cases}uv^2 = \log_3 5,\\ u^2 v = \log_2 7.\end{cases}$$

Перемножимо рівняння системи: $u^3v^3 = \log_3 5 \cdot \log_2 7$, звідки $uv = \sqrt[3]{\log_3 5 \cdot \log_2 7}$.

Розділимо перше рівняння останньої системи на одержане рівняння: $v = \dfrac{\log_3 5}{\sqrt[3]{\log_3 5 \cdot \log_2 7}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{\log_3^2 5}{\log_2 7}}$.

Далі з другого рівняння останньої системи маємо $u = \sqrt[3]{\dfrac{\log_2^2 7}{\log_3 5}}$.

Тепер знаходимо x і y; $u = \log_2 x = \sqrt[3]{\frac{\log_2^2 7}{\log_3 5}}$, звідки $x = 2^{\sqrt[3]{\frac{\log_2^2 7}{\log_3 5}}}$; $v = \log_3 y = \sqrt[3]{\frac{\log_3^2 5}{\log_2 7}}$, звідки $y = 3^{\sqrt[3]{\frac{\log_3^2 5}{\log_2 7}}}$. Відповідь: $\left(2^{\sqrt[3]{\frac{\log_2^2 7}{\log_3 5}}}; 3^{\sqrt[3]{\frac{\log_3^2 5}{\log_2 7}}}\right)$.*

Вправи

1. Розв'язати рівняння $3^{f(x)} = 1$, де

а) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; б) $f(x) = \sin 3x - \sin x$;

в) $f(x) = \lg^2 x - 3\lg x + 2$; г) $f(x) = \sqrt{x-2} - 5\sqrt[4]{x-2} + 4$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $9^{4x-x^2} = \sqrt{3}$; б) $10^{3x^2-1} = \sqrt[3]{100}$.

3. Розв'язати рівняння:

а) $3^{6x-1} = 5^{3-2x}$; б) $10^{4-x} = 5^{x+1}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $4^{2x} - 3^{2x-\frac{1}{2}} = 3^{2x+\frac{1}{2}} - 2^{4x-1}$; б) $2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} + 2^{3x-3} = 120$;

в) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

5. Розв'язати рівняння

а) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$; б) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

6. Розв'язати рівняння:

а) $4 \cdot 4^x - 6^x = 18 \cdot 9^x$; б) $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$; в) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$.

7. Розв'язати рівняння:

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$; б) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{4}} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{4}} = 34$.

8. Розв'язати рівняння:

а) $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$; б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

9. Розв'язати рівняння:

а) $\log_{0,6}\left(-\frac{2}{x-1}\right) = 2$; б) $\log_2 \log_3 (x^2 - 2) = 0$; в) $2^{\log_3(3x-1)} = \log_2 16$.

10. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$; б) $\log_9 (x + 1) - \log_9 (1 - x) = \log_9 (2x + 3)$; в) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 3\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = \log_{\frac{1}{3}}(1-x^2) + 2$.

11. Розв'язати рівняння:

а) $\log_4 (x + 2) - \log_4 (x - 2) = 2 - \log_4 8$; б) $\log_9 (x + 1) - \log_9 (1 - x) = \log_9 (2x + 3)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 3\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = \log_{\frac{1}{3}}(1-x^2) + 2$.

12. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{2}{7-\lg x}+\frac{9}{11+\lg x}=\frac{13}{12}$; б) $\frac{1}{5-4\lg x}+\frac{4}{1+\lg x}=3$.

13. Розв'язати рівняння:

а) $\lg\sqrt{1-x}-\lg\sqrt{1-x^2}=2-3\lg\sqrt{1+x}$; б) $\frac{1}{2}(\lg x+\lg 2)+\lg\left(\sqrt{2x}+1\right)=\lg 6$.

14. Довести справедливість теорем.

Теорема 1. *Рівняння* $2k\log_a f(x)=\log_a g(x)$, *де* $a>0$, $a\neq 1$, $k\in\mathbf{N}$, *рівносильне системі*

$$\begin{cases} f^{2k}(x)=g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Рівняння* $(2k+1)\log_a f(x)=\log_a g(x)$, *де* $a>0$, $a\neq 1$, $k\in\mathbf{N}$, *рівносильне системі*

$$\begin{cases} f^{2k+1}(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Теорема 3. *Рівняння* $\frac{1}{2}\log_a f(x)=\log_a g(x)$, *де* $a>0$, $a\neq 1$, *рівносильне системі*

$$\begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Теорема 4. *Рівняння* $\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a \varphi(x)$, *де* $a>0$, $a\neq 1$, *рівносильне системі*

$$\begin{cases} f(x)\cdot g(x)=\varphi(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

15. Розв'язати рівняння:

а) $\log_{\frac{7-x}{3}} 2=\log_{\frac{1}{3+x}} 2$; б) $\log_{x^3+x}\left(x^2-4\right)=\log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right)$.

16. Розв'язати рівняння:

а) $\lg(2x-3)^2-\lg(3x-2)^2=2$; б) $\lg(x^2-2x+1)=2\lg(1-x)+\lg(1+x^2)$.

17. Розв'язати рівняння:

а) $\lg^2 x^3-10\lg x+1=0$; б) $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$; в) $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$.

18. Розв'язати рівняння:

а) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$; б) $\log_4 x+\log_2 x+\log_{16} x=7$;

в) $\log_{3x} 3=\log_3^2 3x$; г) $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}\cdot\log_5 x=1$.

19. Розв'язати рівняння:

а) $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$; б) $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$; в) $2^{\lg x}+x^{\lg 2}=8$.

20. Розв'язати рівняння:

а) $x^{\lg x-3}=10^{\lg\frac{10}{x}-1}$; б) $x^{1+\lg x}=(0{,}001)^{-\frac{2}{3}}$; в) $x^{\log_2 x+2}=256$.

21. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=24; \\ 3^x\cdot 2^y=54; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{\lg y}=100; \\ \log_y x=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^y=y^x, \\ x^3=y^5; \end{cases}$

г) $\begin{cases}\lg x+\lg y=3,\\ 3x^2-y^2=275;\end{cases}$ д) $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32,\\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y).\end{cases}$

§ 5. Показникові та логарифмічні нерівності

5.1. При розв'язуванні показникових нерівностей використовують такі теореми.

Теорема 1. $\begin{cases}a^{f(x)}>a^{g(x)},\\ 0<a<1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)<g(x).$

Теорема 2. $\begin{cases}a^{f(x)}>a^{g(x)},\\ a>1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)>g(x).$

Приклади

1. Розв'язати нерівність $2^{\frac{4x}{x-2}}>8.$

* $2^{\frac{4x}{x-2}}>8\Leftrightarrow 2^{\frac{4x}{x-2}}>2^3.$

Згідно з теоремою 2 маємо $\frac{4x}{x-2}>3\Leftrightarrow\frac{x+6}{x-2}>0\Leftrightarrow$ ($x<-6$ або $x>2$).

Відповідь: $x\in(-\infty;-6)\cup(2;\infty)$. *

2. Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3-x^2}<\left(\frac{1}{27}\right)^{1-x+x^2}.$$

* Дана нерівність рівносильна нерівності

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2\left(3-x^2\right)}<\left(\frac{1}{3}\right)^{3\left(1-x+x^2\right)}.$$

Згідно з теоремою 1 маємо $2(3-x^2)>3(1-x+x^2)$, $5x^2-3x-3<0$, $\frac{3-\sqrt{69}}{10}<x<\frac{3+\sqrt{69}}{10}$.

Відповідь: $x\in\left(\frac{3-\sqrt{69}}{10};\frac{3+\sqrt{69}}{10}\right)$.*

3. Розв'язати нерівність $2^{4x-2}+1\le 5\cdot 4^{x-1}$.

* Запишемо дану нерівність у вигляді $\frac{1}{4}\cdot 4^{2x}+1\le\frac{5}{4}\cdot 4^x$ або $4^{2x}-5\cdot 4^x+4\le 0$. Покладемо $4^x=y>0$ і одержимо систему нерівностей

$$\begin{cases}y^2-5y+4\le 0,\\ y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\le y\le 4,\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le y\le 4.$$

Далі $1\le 4^x\le 4\Leftrightarrow 0\le x\le 1$. Відповідь: $x\in[0;1]$. *

4. Розв'язати нерівність $\frac{1}{3^x+2}>\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

* Нехай $3^x = y > 0$. Маємо систему

$$\begin{cases}\frac{1}{y+2} > \frac{1}{3y-1},\\ y>0,\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{2y-3}{(y+2)(3y-1)} > 0,\\ y>0,\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{2y-3}{3y-1} > 0,\\ y>0,\end{cases} \quad \begin{cases}y < \frac{1}{3} \text{ або } y > \frac{3}{2},\\ y>0.\end{cases}$$

$\left(0 < y < \frac{1}{3} \text{ або } y > \frac{3}{2}\right)$.

Далі $0 < 3^x < \frac{1}{3}$ або $3^x > \frac{3}{2}$, $x < -1$ або $x > \log_3 \frac{3}{2}$. Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\log_3 \frac{3}{2}; \infty\right)$. *

Розглянемо нерівності виду $[f(x)]^{g(x)} < [f(x)]^{\varphi(x)}$. Функція $y = [f(x)]^{g(x)}$ називається *показниково-степеневою*. За означенням така функція існує лише при $f(x) > 0$.

Можливі три випадки:

1) $0 < f(x) < 1$. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}0 < f(x) < 1,\\ g(x) > \varphi(x);\end{cases}$$

2) $f(x) = 1$. Розв'язків немає;

3) $f(x) > 1$. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}f(x) > 1,\\ g(x) < \varphi(x).\end{cases}$$

Приклад

5. Розв'язати нерівність $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$.

* Запишемо дану нерівність у вигляді $(x-2)^{x^2-6x+8} > (x-2)^0$. Розглянемо два випадки:

1) $\begin{cases}0 < x-2 < 1,\\ x^2-6x+8 < 0,\end{cases} \quad \begin{cases}2 < x < 3,\\ 2 < x < 4,\end{cases} \quad 2 < x < 3;$

2) $\begin{cases}x-2 > 1,\\ x^2-6x+8 > 0,\end{cases} \quad \begin{cases}x > 3,\\ 2 < x \text{ або } x > 4,\end{cases} \quad x > 4.$

Відповідь: $x \in (2; 3) \cup (4; \infty)$. *

Зауважимо, що нерівності розглянутого виду можна також розв'язувати шляхом логарифмування обох частин.

Приклад

6. Розв'язати нерівність $x^{6-x} < x^{x^2}$.

* Область визначення $(0; \infty)$. На цій множині обидві частини нерівності додатні. Маємо рівносильну нерівність $(6-x)\lg x < x^2 \lg x$ або $0 < (x^2+x-6)\lg x$. Тепер розглянемо дві системи нерівностей:

1) $\begin{cases}x^2+x-6 > 0,\\ \lg x > 0,\end{cases} \quad \begin{cases}x < -3, \text{ або } x > 2,\\ x > 1,\end{cases} \quad x > 2.$

2) $\begin{cases}x^2+x-6 < 0,\\ \lg x < 0,\end{cases} \quad \begin{cases}-3 < x < 2,\\ 0 < x < 1,\end{cases} \quad 0 < x < 1.$

Відповідь: $x \in (0; 1) \cup (2; \infty)$. *

5.2. При розв'язуванні логарифмічних нерівностей використовують такі теореми:

Теорема 1. $\begin{cases}\log_a f(x) < \log_a g(x), \\ a > 1\end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$

Теорема 2. $\begin{cases}\log_a f(x) < \log_a g(x), \\ 0 < a < 1\end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$

Приклади

1. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(3x + 1) < \log_{0,5}(1 - 4x)$.

* Згідно з теоремою 2 маємо $\log_{0,5}(3x + 1) < \log_{0,5}(1 - 4x) \Leftrightarrow 3x + 1 > 1 - 4x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+1>1-4x, \\ 1-4x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0, \\ x<\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{4}.$ Відповідь: $x \in \left(0;\frac{1}{4}\right).$ *

2. Розв'язати нерівність $\log_{0,3}\log_2(1 - 7x) < 0$.

* Використовуючи послідовно теореми 2 і 1, маємо $\log_{0,3}\log_2(1-7x)<0 \Leftrightarrow \log_2(1-7x)>1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-7x>2 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{7}.$ Відповідь: $x<-\frac{1}{7}.$ *

3. Розв'язати нерівність $\log_3\log_{0,1}\log_{0,4}(4x - 2) < 0$.

* Використовуючи теореми 1 і 2, маємо $\log_3\log_{0,1}\log_{0,4}(4x-2)<0 \Leftrightarrow 0<\log_{0,1}\log_{0,4}(4x-2)<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1>\log_{0,4}(4x-2)>0,1 \Leftrightarrow 0,4<4x-2<0,4^{0,1} \Leftrightarrow 0,6<x<0,5+\frac{1}{4}\cdot 0,4^{0,1}.$

Відповідь: $x \in \left(0,6;\quad 0,5+\frac{1}{4}\cdot 0,4^{0,1}\right).$ *

4. Розв'язати нерівність $\frac{2\lg^2 x-\lg x-1}{\lg x-3}>0.$

* Поклавши $y = \lg x$, одержимо нерівність

$$\frac{2y^2-y-1}{y-3}>0, \quad \frac{(y-1)(2y+1)}{y-3}>0,$$

$-\frac{1}{2}<y<1$ або $3<y$. Маємо два випадки:

1) $-\frac{1}{2}<\lg x<1,$ звідки $10^{-\frac{1}{2}}<x<10;$

2) $3<\lg x,$ звідки $1000<x.$

Відповідь: $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{10}};10\right)\cup(1000;\infty).$ *

У випадках, коли основа логарифма містить невідоме, можна з успіхом застосувати загальний метод розв'язування нерівностей.

Приклади

5. Розв'язати нерівність $\log_{x-1}\frac{4x+1}{x-2}<0.$

* 1-й спосіб. Розглянемо два випадки залежно від значень основи логарифма:

$$1)\ \begin{cases} 0<x-1<1, \\ \dfrac{4x+1}{x-2}>1. \end{cases} \quad \begin{cases} 1<x<2, \\ \dfrac{3x+3}{x-2}>0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1<x<2, \\ x<-1 \text{ або } x>2. \end{cases}$$

Розв'язків немає.

$$2)\ \begin{cases} x-1>1, \\ 0<\dfrac{4x+1}{x-2}<1, \end{cases} \quad \begin{cases} x>2, \\ 0<\dfrac{4x+1}{x-2} \\ \dfrac{3x+3}{x-2}<0, \end{cases} \quad \begin{cases} x>2, \\ x<-\dfrac{1}{4} \text{ або } x>2, \\ -1<x<2. \end{cases}$$

Розв'язків немає. Відповідь: розв'язків немає. *

2-й спосіб (загальний метод).

$$f(x)=\log_{x-1}\frac{4x+1}{x-2}.$$

Область визначення функції $f(x)$ знаходиться із системи

$$\begin{cases} \dfrac{4x+1}{x-2}>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x<-\dfrac{1}{4} \text{ або } x>2, \\ x>1, \\ x\neq 2, \end{cases} \quad x>2.$$

Отже, $D(f(x))=(2;\ \infty)$. Нулі функції знайдемо із рівняння $f(x)=0$, $\log_{x-1}\dfrac{4x+1}{x-2}=0$, $\dfrac{4x+1}{x-2}=1$, $x=-1$. Оскільки число -1 не входить до області визначення даної функції, вона не має нулів.

Функція $f(x)$ на всій області визначення неперервна і не має коренів, отже, зберігає знак. $f(3)=\log_2 13>0$. Це означає, що $f(x)>0$ на всій області визначення, і нерівність $f(x)<0$ не має розв'язків.

6. Розв'язати нерівність $\log_{x-3}(x^2+x)\le 1$.

* 1-й спосіб. Розглянемо два випадки:

$$1)\ \begin{cases} 0<x-3<1, \\ x^2+x\ge x-3, \end{cases} \quad \begin{cases} 3<x<4, \\ x^2\ge -3, \end{cases} \quad 3<x<4;$$

$$2)\ \begin{cases} x-3>1, \\ 0<x^2+x\le x-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x>4, \\ 0<x^2+x, \\ x^2<-3. \end{cases}$$

Розв'язків немає. Відповідь: $3<x<4$. *

2-й спосіб (загальний метод).

$$f(x)=\log_{x-3}(x^2+x)-1.$$

Область визначення функції знайдемо із системи

$$\begin{cases} x^2+x>0, \\ x-3>0, \\ x-3\neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x<-1, \text{ або } x>0, \\ x>3, \\ x\neq 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x>3, \\ x\neq 4. \end{cases}$$

Отже, $D(f(x))=(3;\ 4)\cup(4;\ \infty)$.

Нулі функції знаходимо із рівняння $\log_{x-3}(x^2+x)=1$, $x^2+x=x-3$, $x^2=-3$. Функція не має нулів. На кожному із проміжків (3; 4), (4; ∞) функція неперервна і не має нулів, отже, зберігає знак.

1) $x \in (3; 4)$. $f(3.5) = \log_{0.5} 15.75 - 1 < 0$. Отже, при $x \in (3; 4)$ $f(x) < 0$.

2) $x \in (4; \infty)$. $f(5) = \log_2 30 - 1 > 0$. Отже, при $x \in (4; \infty)$ $f(x) > 0$.

Відповідь: $x \in (3; 4)$. *

Вправи

Розв'язати нерівності:

1. а) $81^x \le \frac{1}{3} \cdot 27^{x+1}$; б) $16^x \ge 0{,}5 \cdot 8^{2x-3}$; в) $0{,}2^{\sqrt{x-3}} \le 0{,}04$; г) $0{,}3^{\sqrt{x+2}} \ge 0{,}09$.

2. а) $2^x - 2^{1-x} - 1 \le 0$; б) $3^x - 3^{1-x} - 2 \le 0$; в) $9^{x-1} + 1 \ge 10 \cdot 3^{x-2}$; г) $5 - 16^x > 4^{x+1}$.

3. а) $\frac{1}{2^x-4} > \frac{1}{2^x-1}$; б) $\frac{4-7\cdot 5^x}{5^{2x+1}-12\cdot 5^x+4} \le \frac{2}{3}$; в) $\frac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-15} \le 3$.

4. а) $x^{2x-1} < x^{x^2}$; б) $x^{6+x} < x^{x^2-2}$; в) $x^{2x-3} > x$.

5. а) $(x-4)^{x^2-1} > 1$; б) $(x-3)^{x^2-5x+6} < 1$.

6. а) $\frac{x^2-x+6}{\log_6(x^2-x-6)-1} \le 0$; б) $\frac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)} < 0$; в) $\frac{\sqrt{20-x-x^2}}{\log_{14}(x^2-x-6)-1} \le 0$;

г) $\frac{\log_2(x^2-x)-1}{\sqrt{3+5x-2x^2}} \le 0$.

7. а) $\log_3 \log_4(3x-2) \ge 0$; б) $\log_{0.1} \log_{0.5}(3-4x) \le 0$; в) $\log_{0.2} \lg(1-5x) > 0$; г) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(5x+1) < 0$.

8. а) $3\log_8(3x+2) < 2$; б) $4\log_{16}(4x+3) < 3$; в) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x-1}{x+2} > 1$; г) $\log_{0.5} \frac{3x-2}{x+1} > 1$.

9. а) $\frac{\lg^2 x - \lg x - 4}{\lg x - 1} < 1$; б) $\frac{\lg^2 x + \lg x - 3}{2\lg x - 1} < 1$; в) $\frac{\log_2(x+1)(x-3)}{\log_2(x-3)} < 1$; г) $\frac{\lg(x^2-6x+8)}{\lg(x-8)} < 1$.

10. а) $\log_{x+3} \frac{x-1}{x+2} \le \log_{x+3} 2$; б) $\log_x(x+2) > 2$; в) $\log_{4-x}(x^2-x-2) \le \log_{4-x}(x+6)$;

г) $\log_{x^2+2x}(x+2) \le 1$; д) $\log_{4x}(x^2-x-6) \le 1$; е) $\log_x(x^2-5x+5) < 1$; є) $\log_{x^2+1} \frac{|x+1|}{3} < 0$;

ж) $2\log_5 \sqrt{x} - 2 \ge \log_x \frac{1}{5}$; з) $\log_{\sqrt{x}} 7 - \log_{\sqrt{7}} x + 3 > 0$.

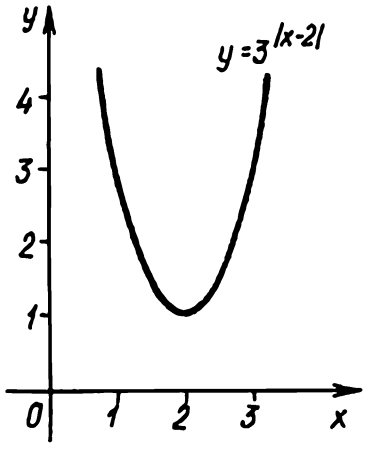


Рис. 9.9

Відповіді до вправ

§ 1. 1. а) $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$; б) $(-1; 1)$; в) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$. **2.** а) (рис. 9.9). $D(y) = \mathbf{R}$. Функція несиметрична, неперіодична, додатна на всій області визначення. Функція зростає на проміжку $(2; \infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 2)$. В точці $x = 2$ має локальний і глобальний мінімум; б) (рис. 9.10). $D(y) = \mathbf{R}$. Функція несиметрична, неперіодична, додатна на всій області визначення. Функція зростає на всій області визначення; в) (рис. 9.11). $D(y) = \mathbf{R}$. Функція парна, неперіодична. Функція додатна на всій області визначення. В точці $x = 0$ має локальний і глобальний максимум.

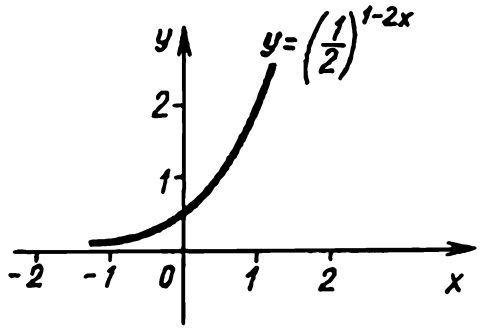


Рис. 9.10

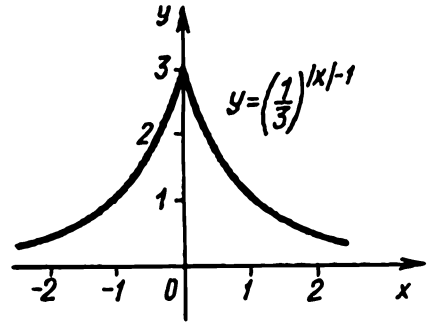


Рис. 9.11

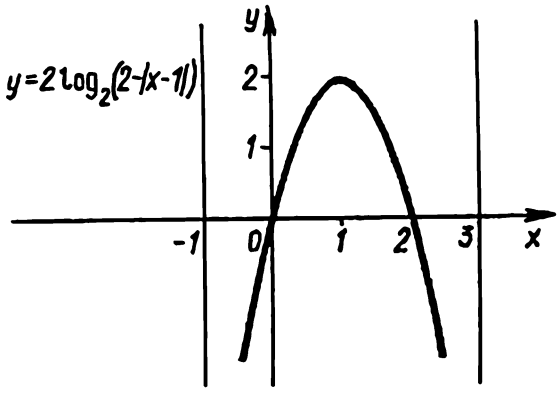


Рис. 9.12

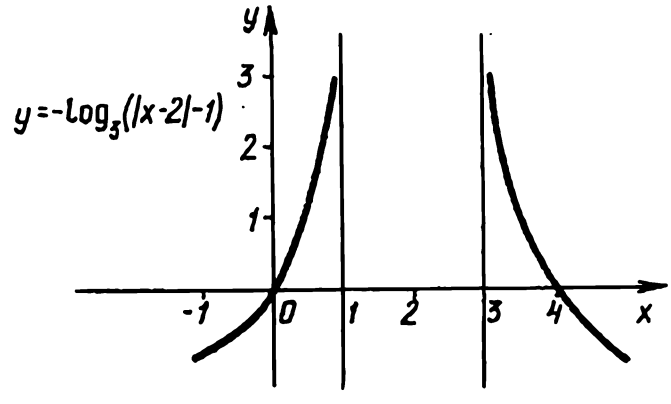


Рис. 9.13

Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; \infty)$; г) (рис. 9.12). $D(y) = (-1; 3)$. Функція несиметрична, неперіодична. $y > 0$ при $x \in (0; 2)$, $y = 0$ при $x \in \{0; 2\}$, $y < 0$ при $x \in (-1; 0) \cup (2; 3)$. Функція зростає при $x \in (-1; 1)$, спадає при $x \in (1; 3)$. Має локальний і глобальний максимум у точці $x = 1$. Графік має дві вертикальні асимптоти: $x = -1$ та $x = 3$; д) (рис. 9.13). $D(y) = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$. Функція несиметрична, неперіодична. $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$, $y = 0$ при $x \in \{0; 4\}$, $y > 0$ при $x \in (0; 1) \cup (3; 4)$. Функція зростає при $x \in (-\infty; 1)$, спадає при $x \in (3; \infty)$. Графік має дві вертикальні асимптоти: $x = 1$ і $x = 3$.

§ 2. 1. а) 17^9. б) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; в) $\sqrt[6]{2}$; г) $3\sqrt{3}$. **2.** а) 15; б) 3. **7.** $\frac{a-b+ab}{a}$.

§ 3. 1. а) $\lg M = \frac{3}{4}\lg a + \frac{7}{4}\lg b - \frac{5}{4}\lg c$; б) $\lg S = -\frac{1}{6}\lg x + \frac{10}{3}\lg y - \frac{5}{3}\lg z$. **2.** а) $S = \frac{a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}}{b^{1\frac{3}{5}}d^{\frac{1}{4}}}$;

б) $S = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{5}}z^3$; в) $S = \frac{a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{7}}z^2}$. **3.** 31. **4.** а) 7 750 000; б) 0, 0007433.

§ 4. 1. а) $x \in \{2; 3\}$; б) $x = \pi k$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $k, n \in \mathbf{Z}$; в) $x \in \{10; 100\}$; г) $x \in \{3; 258\}$.

2. а) $x = \frac{4 \pm \sqrt{15}}{2}$; б) $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. **3.** а) $x = \frac{3\lg 5 + \lg 3}{2\lg 5 + 6\lg 3}$; б) $x = \frac{4 - \lg 5}{1 + \lg 5}$. **4.** а) $x = \frac{3}{4}$; б) $x = 2$; в) $x = \pm\sqrt{3}$.

5. а) $x \in \left\{2; \log_3 \frac{2}{3}\right\}$; б) $x \in \left\{-1; -\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}\right\}$. **6.** а) $x = -2$; б) $x \in \left\{\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}; \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{4}\right\}$; в) $x \in \{-1; 0\}$.

7. а) $x \in \{-2;\ 2\}$; б) $x \in \{-8;\ 8\}$. **8.** а) $x = 2$; б) $x = 2$. **9.** а) $x = -\frac{41}{9}$; б) $x = \pm\sqrt{5}$; в) $x = 8\frac{2}{3}$.

10. а) $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = \frac{2}{3}$. **11.** а) $x = 6$; б) $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; в) розв'язків немає.

12. а) $x \in \left\{10; 10^{\frac{19}{13}}\right\}$; б) $x \in \left\{10; \sqrt{10}\right\}$. **13.** а) розв'язків немає; б) $x = 2$. **15.** а) $x = 2 \pm \sqrt{22}$;

б) $x = 3$. **16.** а) $x \in \left\{\frac{17}{28}; \frac{23}{32}\right\}$; б) розв'язків немає. **17.** а) $x \in \left\{10; \sqrt[8]{10}\right\}$; б) $x = -1000$; в) $x \in \{1{,}1;\ 11\}$.

18. а) $x = 27$; б) $x = 1$; в) $x = 5$. **19.** а) $x \in \left\{\frac{1}{6}; 6\right\}$; б) $x \in \left\{\frac{1}{7}; 7\right\}$; в) $x = 100$. **20.** а) $x \in \{1;\ 100\}$;

б) $x \in \{0{,}01;\ 10\}$; в) $x \in \left\{\frac{1}{16}; 4\right\}$. **21.** а) (3; 1); б) (0,01; 0,1), (100; 10); в) (1; 1), $\left(\frac{25}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}; \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$;

г) (25; 40); д) (2; 1).

§ 5. 1. а) $x \le 2$; б) $x \le 5$; в) $x \ge 7$; г) $-2 \le x \le 2$. **2.** а) $x \le 1$; б) $x \le 1$; в) $x \in (-\infty;\ 0] \cup [2;\ \infty)$; г) $x > 0$.

3. а) $x \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ \infty)$; б) $x \in \left(\log_5 \frac{2}{5}; \log_5 \frac{4}{5}\right] \cup \left(\log_5 2; \infty\right)$; в) $x \in \left(-\infty; \log_2 \frac{5}{2}\right) \cup \left[\log_2 \frac{7}{2}; \infty\right)$.

4. а) $x > 1$; б) $x \in \left(0; 1\right) \cup \left(\frac{\sqrt{33}+1}{2}; \infty\right)$; в) $x \in (0;\ 1) \cup (2;\ \infty)$. **5.** а) $x > 5$; б) $x \in (3;\ 4)$. **6.** а) $x \in (-3;\ -2) \cup$

$\cup (3;\ 4)$; б) $x \in (1;\ 2)$; в) $x \in \{-5\} \cup [-4;\ 4]$; г) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(1; 2\right]$. **7.** а) $x \ge 2$; б) $x \in \left[\frac{5}{8}; \frac{3}{4}\right)$;

в) $x \in (-1{,}8;\ 8;\ 0)$; г) $x \in \left(-\frac{2}{15}; 0\right)$. **8.** а) $x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; б) $x \in \left(-\frac{3}{4}; 1\frac{1}{4}\right)$; в) $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$; г) $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

9. а) $x \in (0;\ 0{,}1) \cup (10;\ 1000)$; б) $x \in \left(0; 0{,}1\right) \cup \left(\sqrt{10}; 100\right)$; в) $x \in (3;\ 4)$; г) $x \in (8;\ 9)$. **10.** а) $x \in (-3;$

$-2) \cup (1;\ \infty)$; б) $x \in (1;\ 2)$; в) $x \in [-2;\ -1) \cup (2;\ 3]$; г) $x \in \left(0; \sqrt{2}-1\right)$; д) $x \in (3;\ 6]$; е) $x \in \left(0; 1\right) \cup$

$\cup \left(1; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; 5\right)$; є) $x \in (-4;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 2)$; ж) $x > 1$; з) $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup \left(1; 49\right)$.

Тема 10. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

§ 1. Визначення тригонометричних функцій

1.1. Нехай у прямокутному трикутнику ABC кут A має величину α (рис. 10.1). $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. За означенням $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} = \frac{b}{a}$. За теоремою Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$, звідки $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ або $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

1.2. Візьмемо коло з центром в початку координат й радіусом 1 (рис. 10.2). Це коло має рівняння $x^2 + y^2 = 1$. За початок відліку оберемо точку A_0 (1; 0). Рух по колу проти годинникової стрілки вважаємо додатним, за годинниковою стрілкою — від'ємним. Нехай точка A_0, рухаючись в додатному напрямку по даному колу, зупинилась у точці A_α. Тоді $\angle A_0OA_\alpha = \alpha$ і дуга A_0A_α має довжину α (кут α може вимірюватись у градусах або в радіанах). Один радіан — це величина центрального кута, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола. Звідси $360° = 2\pi$рад і $1 \text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57°17'$.

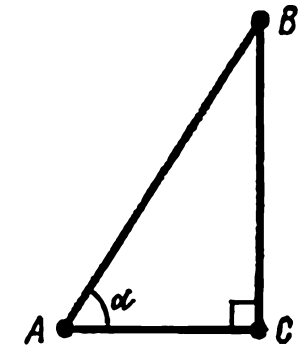


Рис. 10.1

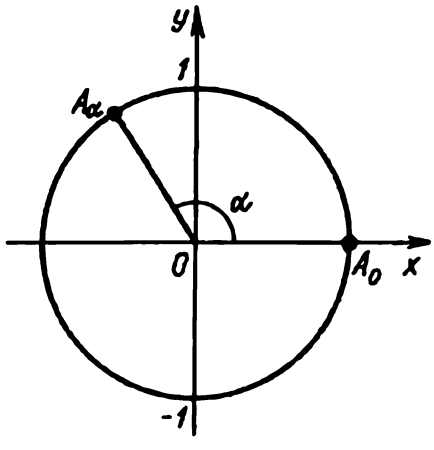


Рис. 10.2

Точка A_α є результатом обертання точки A_0 на кут α відносно початку координат O. Зрозуміло, що кожному дійсному числу α відповідає єдина точка A_α на даному колі. Якщо двом різним числам α і β відповідає одна й та сама точка кола, то $\beta = \alpha + 2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$. Дане коло називають *числовим колом*. Кожна точка числового кола відповідає безлічі чисел, що відрізняються на $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклади

1. Зобразити на числовому колі множину точок, що задаються формулою

$$\alpha_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

* Покладаємо послідовно $n = 0$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, $n = 1$, $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$, $n = 2$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$, $n = 3$, $\alpha_3 = \frac{7\pi}{4}$. Ми одержали чотири точки на числовому колі (рис. 10.3). Йдучи далі, ми не одержимо нових точок, бо $\alpha_4 = \alpha_0 + 2\pi$, $\alpha_5 = \alpha_1 + 2\pi$, і т.д. *

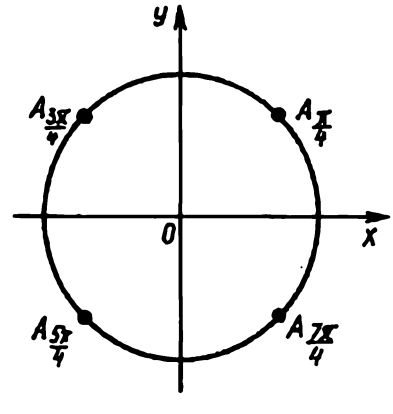


Рис. 10.3

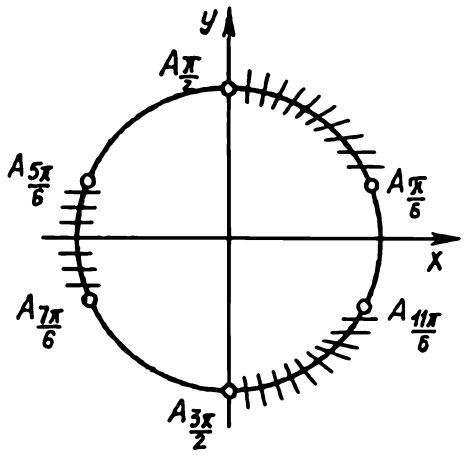


Рис. 10.4

2. Зобразити на числовому колі множину точок, що задається нерівністю

$$\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n<\alpha<\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

* Покладаємо послідовно $n=0$, $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $n=1$, $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{7\pi}{6}$, $n=2$. $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{11\pi}{6}$. Ми одержали три дуги (рис. 10.4). Йдучи далі, ми не одержимо нових точок. Зрозуміло, що кінці дуг не належать даній множині. *

У подальшому викладі будемо ототожнювати числа з точками на числовому колі. Замість виразу «точка, що відповідає числу $\frac{\pi}{4}$», будемо казати «точка $\frac{\pi}{4}$».

1.3. Візьмемо на числовому колі точку A_α ($\angle A_0OA_\alpha=\alpha$) (рис. 10.5). Точка A_α має дві координати $(x;\ y)$. Абсциса точки A_α називається *косинусом числа* α, ордината точки A_α називається *синусом числа* α. Отже, $A_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$. Оскільки кожному числу α відповідає єдина точка на числовому колі, то синус і косинус числа α однозначно визначені. Функції $y=\sin x$ та $y=\cos x$ називаються *тригонометричними функціями.* Визначимо ще дві тригонометричні функції — тангенс і котангенс: $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Крім того, розглядають ще дві тригонометричні функції — секанс і косеканс: $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}$.

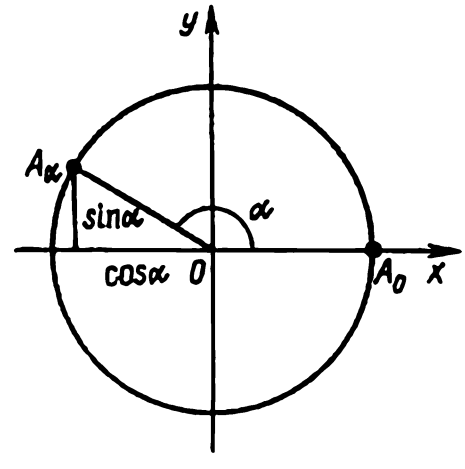


Рис. 10.5

Підкреслимо, що функції $\sin x$ та $\cos x$ визначені для будь-якого x, в той час, як функції $\operatorname{tg}x$ і $\operatorname{ctg}x$ існують не для всякого числа x. Функція $y=\operatorname{tg}x$ визначена при $\cos x\neq 0$, тобто при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Функція $y=\operatorname{ctg}x$ визначена при $\sin x\neq 0$, тобто при $x\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Введене означення тригонометричних функцій для довільного кута (числа) узгоджується з даним раніше означенням тригонометричних функцій гострого кута. Дійсно, якщо $0°<\alpha<90°$ і $A_\alpha(x,y)$, то $\frac{x}{R}=x=\cos\alpha$, $\frac{y}{R}=y=\sin\alpha$, бо $R=1$ (R — радіус числового кола).

Координатні осі поділяють числове коло на чотири чверті (квадранти).

I чверть задається умовою $360°k<\alpha<90°+360°k$;

II чверть задається умовою $90°+360°k<\alpha<180°+360°k$;

III чверть задається умовою $180°+360°k<\alpha<270°+360°k$;

IV чверть задається умовою $270° + 360°k < \alpha < 360° + 360°k$, де $k \in \mathbf{Z}$. Точки виду $\alpha = \frac{\pi k}{2}$ не належать жодній чверті. На рис. 10.6,*а*,*б*,*в* відповідно показані знаки функцій $\sin x$, $\cos x$ та $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ в різних чвертях. (Зрозуміло, що $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ мають однакові знаки.) В табл. 10.1 подані значення тригонометричних функцій деяких кутів.

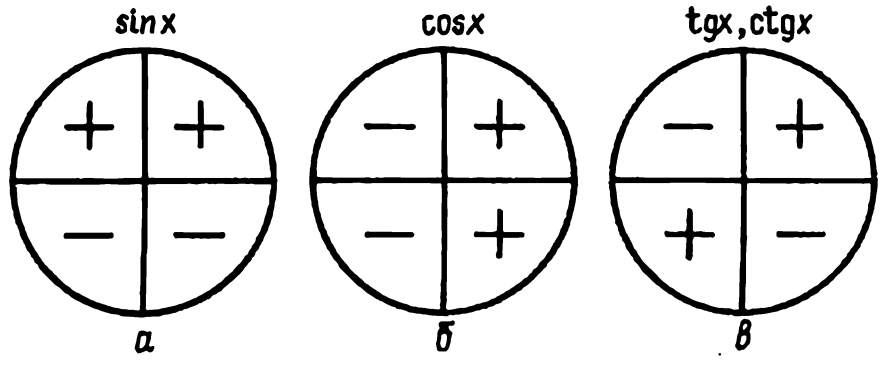


Рис. 10.6

Якщо точка A_α має координати $(x; y)$, то точка $A_{-\alpha}$ має координати $(x; -y)$. Звідси випливає, що $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Далі $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Отже, функції $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — непарні, а функція $\cos x$ парна.

Таблиця 10.1

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$

Вправи

1. α — гострий кут. Довести, що

а) $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$; б) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha < 1$.

2. Гіпотенуза гострого кута трикутника має довжину 1, а гострий кут — α. Довести, що

а) $S = \frac{1}{4}\sin 2\alpha$; б) $r = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{2}$, де S — площа трикутника, r — радіус вписаного кола.

3. В якій чверті лежать точки:

1) 170°. 2) –200°. 3) 1500°. 4) –25 000°. 5) $\frac{2\pi}{5}$. 6) $-\frac{6\pi}{5}$. 7) 5. 8) –4?

4. Зобразити на числовому колі множину точок, що задаються рівністю

а) $\alpha_n = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; б) $\alpha_n = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$;

в) $\alpha_n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Зобразити на числовому колі множину точок, що задаються нерівністю

а) $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$; б) $2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Який знак має число:

1) $\sin 1000°$; 2) $\cos 888°$; 3) $\operatorname{tg} 2$; 4) $\operatorname{tg}(-870°)$; 5) $\operatorname{ctg} 3$; 6) $\operatorname{ctg} 10\,000°$; 7) $\sin 4 \cdot \sin 5$; 8) $\cos 2 \cdot \cos 3$.

7. Обчислити:

а) $\sin 30° \cdot \sin 45° \cdot \sin 60° \cdot \sin 90°$;

б) $\sin(-45°) \cdot \sin(-90°) \cdot \cos 45° \cdot \cos 135°$;

в) $\operatorname{tg} 135° \cdot \cos 120° \cdot \sin 60° \cdot \operatorname{ctg} 150°$;

г) $\sin 30° \cdot \cos 30° + \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 30°$;

д) $\sec 60° \cdot \operatorname{tg} 30° - \operatorname{cosec} 60° \cdot \operatorname{ctg} 30°$.

8. $f(\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha$. Знайти $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

9. Якого найбільшого і найменшого значення набувають функції

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = 3 - 4\sin x$;

г) $y = 2\cos 3x - 2$; д) $y = 2 - 3|\sin x|$; е) $y = 2|\cos x| - 4$.

§ 2. Основні тригонометричні формули

2.1. Точка A_α, що лежить на числовому колі, має координати $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$. Оскільки числове коло має рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ для будь-якого числа α. Одержана рівність називається *основною тригонометричною тотожністю.*

Ліву частину цієї тотожності називають *тригонометричною одиницею.*

2.2. За допомогою означень тригонометричних функцій та основної тригонометричної тотожності виведено ряд тотожностей, що пов'язують між собою тригонометричні функції одного й того самого аргументу:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right), \tag{10.1}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right). \tag{10.2}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha \quad \left(\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right). \tag{10.3}$$

Знаючи значення однієї з шести тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, можна знайти значення інших п'яти.

Ось група формул, що виражають тригонометричні функції через $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.\ \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}},\ \operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \sec\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}. \tag{10.4}$$

Далі наводимо групу формул, що виражають тригонометричні функції через cos α:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}},$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}. \qquad (10.5)$$

У випадках, коли формула містить два знаки (±), вибирають знак залежно від того, в якій чверті лежить число α.

Тепер наводимо групу формул, що виражають тригонометричні функції через tg α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\ \sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\sec\alpha = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (10.6)$$

Нарешті наведемо групу формул, що виражають тригонометричні функції через ctg α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},\ \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\ \cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},\ \sec\alpha = \pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (10.7)$$

Приклади

1. $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $90° < \alpha < 180°$. Знайти sin α, tg α, ctg α, sec α і cosec α.

* Згідно з формулами (10.5) і враховуючи, що число α лежить у другій чверті, маємо

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}:\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2},\ \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sec\alpha = -\frac{3}{2},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$ *

2. tg α = 4, $180° < \alpha < 270°$. Знайти sin α + cos α.

* Користуючись формулами (10.6), одержимо

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+4^2}} = -\frac{1}{\sqrt{17}},\ \sin\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Отже, $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{17}}$. Відповідь: $-\frac{5}{\sqrt{17}}$. *

2.3. За допомогою наведених формул спрощують тригонометричні вирази, доводять тригонометричні тотожності тощо.

Приклади

1. Спростити вираз $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

* $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 2$. Відповідь: 2. *

2. Спростити вираз $\dfrac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}$.

* Перетворимо окремо чисельник і знаменник:

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-1=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-$

$-1=\ =(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1=-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1=-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

Отже, даний дріб дорівнює $\dfrac{-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{3}{2}$.

Проведені перетворення мають силу при $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\neq 0$ або $\sin\alpha\cos\alpha\neq 0$, тобто при $\alpha\neq\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. Відповідь: $\dfrac{3}{2}$ при $\alpha\neq\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. *

3. Довести тотожність

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$*\ \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

що й потрібно було довести. Доведена тотожність виконується при $\cos\alpha\neq 0$, тобто при $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. *

4. Відомо, що $1{,}5\pi<\alpha<2\pi$. Довести, що

$$\left(\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}}\right)\cdot\sin2\alpha+2=0.$$

* Позначимо ліву частину через M:

$$M=\left(\sqrt{\frac{(1-\cos2\alpha)^2}{1-\cos^2 2\alpha}}+\sqrt{\frac{(1+\cos2\alpha)^2}{1-\cos^2 2\alpha}}\right)\cdot\sin2\alpha+2=\left(\frac{|1-\cos2\alpha|}{|\sin2\alpha|}+\frac{|1+\cos2\alpha|}{|\sin2\alpha|}\right)\cdot\sin2\alpha+2=$$

$$=\left(\frac{1-\cos2\alpha}{|\sin2\alpha|}+\frac{1+\cos2\alpha}{|\sin2\alpha|}\right)\cdot\sin2\alpha+2=\frac{2}{|\sin2\alpha|}\cdot\sin2\alpha+2.$$

Оскільки $1.5\pi<\alpha<2\pi$, то $3\pi<2\alpha<4\pi$ і $\sin2\alpha<0$. Отже, $M=\dfrac{2}{-\sin2\alpha}\cdot\sin2\alpha+2=0$, що потрібно було довести. *

5. Відомо, що $\operatorname{ctg}\alpha=3$. Знайти значення виразу $M=\dfrac{3\sin\alpha-4\cos\alpha}{\sin\alpha+7\cos\alpha}$.

* 1-й спосіб: $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=3$, звідки $\cos\alpha=3\sin\alpha$. Отже, $M=\dfrac{3\sin\alpha-4\cdot3\sin\alpha}{\sin\alpha+7\cdot3\sin\alpha}=-\dfrac{9}{22}$.

2-й спосіб:

$$M=\frac{3-4\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1+7\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{3-12}{1+21}=-\frac{9}{22}.$$

Відповідь: $-\dfrac{9}{22}$. *

6. Вилучити γ із системи

$$\begin{cases}\sin\gamma+\cos\gamma=a,\\ \sin\gamma-\cos\gamma=b.\end{cases}$$

* Піднесемо до квадрату обидві частини рівнянь системи

$$\begin{cases}(\sin\gamma+\cos\gamma)^2=a^2,\\ (\sin\gamma-\cos\gamma)^2=b^2.\end{cases}$$

Додавши рівняння останньої системи, маємо $2\sin^2\gamma+2\cos^2\gamma=a^2+b^2$ і $a^2+b^2=2$.
Відповідь: $a^2+b^2=2$. *

Зауваження. Одержана умова є необхідною умовою для того, щоб дана система мала розв'язки відносно γ.

Вправи

1. Знайти значення тригонометричних функцій, якщо дано

а) $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha=-2$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

2. Спростити вираз:

а) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; б) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}+\cos^2\alpha$;

в) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha$; г) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha$;

д) $\left(\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}}\right)\cdot\operatorname{tg}2\alpha+2$, де $90°<\alpha<180°$;

е) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, де $1{,}5\pi<\alpha<2\pi$.

3. Довести тотожність:

а) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=-2\operatorname{ctg}\alpha$ при $1{,}5\pi<\alpha<2\pi$;

б) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=4$; в) $\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$;

г) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\operatorname{tg}\alpha$, де $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

д) $\frac{2-\sec^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\alpha=-1$; е) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

4. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=-5$. Обчислити

$$\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin\alpha+3\cos\alpha}.$$

5. Відомо, що $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Знайти $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

6. Вилучити α із системи

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=a,\\ \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=b.\end{cases}$$

§ 3. Формули додавання

3.1. Для довільних значень α і β виконуються рівності

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{10.8}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \tag{10.9}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{10.10}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{10.11}$$

Для всіх значень α і β, при яких існують $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{10.12}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{10.13}$$

Для всіх значень α і β, при яких існують $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, виконуються рівності

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \tag{10.14}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}. \tag{10.15}$$

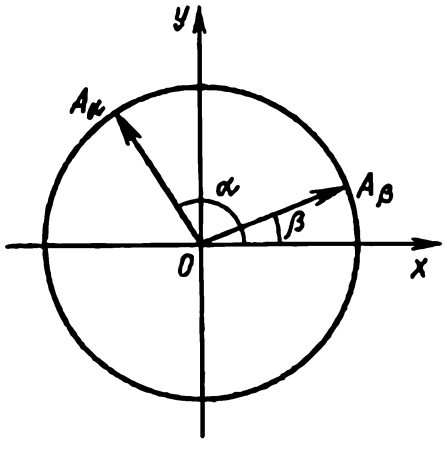


Рис. 10.7

Візьмемо на числовому колі точки A_α і A_β (рис. 10.7) $|\overline{OA_\alpha}|=|\overline{OA_\beta}|=1$. Кут між векторами OA_α і OA_β дорівнює $|\alpha-\beta|$; $\overline{OA_\alpha}$ $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $\overline{OA_\beta}$ $(\cos\beta;\ \sin\beta)$. Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{OA_\alpha}$ і $\overline{OA_\beta}$ у два способи. За означенням $\overline{OA_\alpha}\cdot\overline{OA_\beta}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. З іншого боку $\overline{OA_\alpha}\cdot\overline{OA_\beta}=|\overline{OA_\alpha}|\cdot|\overline{OA_\beta}|\cos|\alpha-\beta|=\cos(\alpha-\beta)$. Із двох останніх рівнянь випливає, що $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Ми довели справедливість рівності (10.9) для будь-яких чисел α, β. Покладаючи в рівності (10.9) $-\beta$ замість β, одержимо рівність (10.8). Покладемо в рівності (10.9) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ і одержимо

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta. \tag{10.16}$$

Тепер в рівності (10.16) покладемо $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ і одержимо

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (10.17)$$

Використовуючи рівності (10.9). (10.16), (10,17), одержимо

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Ми довели справедливість рівності (10.10) для будь-яких чисел α, β. Покладаючи в рівності (10.10) $-\beta$ замість β, одержимо рівність (10.11). Доведемо рівність (10.12):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник одержаного дробу на $\cos\alpha\cos\beta$: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, що й треба було довести. Рівності (10.13) — (10.15) доводяться аналогічно.

Приклади

1. Обчислити $\sin 75°$.

* $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$. Згідно з рівністю (10.10) маємо $\sin 75° = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. *

2. Обчислити $\operatorname{tg} 15°$.

* $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°)$. Згідно з рівністю (10.13) маємо

$$\operatorname{tg}15° = \frac{\operatorname{tg}45° - \operatorname{tg}30°}{1 + \operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$$

Відповідь: $2 - \sqrt{3}$. *

3. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $90° < \alpha < 180°$. Знайти $\sin(60° - \alpha)$.

* Згідно з рівністю (10.11), $\sin(60° - \alpha) = \sin 60° \cos\alpha - \cos 60° \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$.

Далі, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+(-2)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = -2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Остаточно одержимо

$$\sin\left(60^\circ-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $-\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{5}}$. *

4. Спростити вираз

$$\frac{\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)}{\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)}.$$

* Використовуючи рівності (10.8) — (10.11), одержимо

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\beta}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{ctg}\alpha$. *

5. Довести тотожність $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

* $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin((\alpha+\beta)+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\times\cos\gamma+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, що й потрібно було довести. *

3.2. Тригонометричні функції кутів виду $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ можуть бути виражені через функції кута α за допомогою формул зведення (табл. 10.2).

Таблиця 10.2

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Доведемо, наприклад, що $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

За рівностями (10.10) і (10.8) маємо

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\dfrac{3\pi}{2}\cos\alpha+\cos\dfrac{3\pi}{2}\sin\alpha}{\cos\dfrac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\dfrac{3\pi}{2}\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогічно доводяться й інші формули зведення. Кут α вважається гострим, отже всі значення аргументів в табл. 10.2 є допустимими. Аналіз табл. 10.2 дає змогу сформулювати ***правило***:

1) для кутів $\pi \pm \alpha$ та $2\pi \pm \alpha$ назва даної функції зберігається, для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, та $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ назва даної функції змінюється;

2) знак одержаної функції залежить від того, в якій чверті лежить число $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ (нагадаємо, що α — гострий кут).

Наприклад, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, бо назва функції не змінюється, а в третій чверті $(\pi + \alpha)$ синус від'ємний.

За допомогою формул зведення знаходження значень тригонометричних функцій будь-якого кута можна звести до знаходження значень тригонометричних функцій гострого кута.

Приклади

1. Звести до знаходження значень тригонометричних функцій гострого кута:

а) $\sin 500°$; б) $\cos(-230°)$; в) $\operatorname{tg} 2$; г) $\operatorname{ctg}(-3)$.

* а) $\sin 500° = \sin(360° + 140°) = \sin 140° = \sin(180° - 40°) = \sin 40°$;

б) $\cos(-230°) = \cos 230° = \cos(270° - 40°) = -\sin 40°$;

в) $\operatorname{tg} 2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\operatorname{ctg}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$.

Зауважимо, що кут $\alpha = 2 - \frac{\pi}{2}$ гострий, бо $0 < 2 - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, що справедливо.

г) $\operatorname{ctg}(-3) = -\operatorname{ctg} 3 = -\operatorname{ctg}(\pi - (\pi - 3)) = \operatorname{ctg}(\pi - 3)$. *

2. Обчислити:

а) $\cos 300°$; б) $\sin\frac{7}{6}\pi$; в) $\operatorname{tg}(-240°)$; г) $\operatorname{ctg}\frac{11}{4}\pi$.

* а) $\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$;

б) $\sin\frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(-240°) = -\operatorname{tg} 240° = -\operatorname{tg}(270° - 30°) = -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{11}{4}\pi = \operatorname{ctg}\left(2\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi = \operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$. *

3. Довести тотожність

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

* Перетворимо ліву частину рівності згідно з формулами зведення:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{-\cos\alpha}\cdot\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.\ *$$

4. Спростити вираз $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^2\left(\pi+x\right)$.

* Згідно з формулами зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, а $\cos(\pi+x)=-\cos x$. Отже, даний вираз дорівнює $\sin^2 x+(-\cos x)^2=1$. Відповідь: 1. *

3.3. Виведемо формули кратних кутів.

Поклавши в рівності (10.10) $\alpha=\beta$, одержимо

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{10.18}$$

Поклавши в рівності (10.8) $\alpha=\beta$, одержимо

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{10.19}$$

Поклавши в рівності (10.12) $\alpha=\beta$, одержимо

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{10.20}$$

Поклавши в рівності (10.14) $\alpha=\beta$, одержимо

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{10.21}$$

Ми вивели формули подвійного кута. Аналогічно виводяться й формули потрійного кута:

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\times$$

$$\times\sin\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^2\alpha.$$

Отже,

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha; \tag{10.22}$$

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cos\alpha-$$

$$-2\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Отже,

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha; \tag{10.23}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (10.24)$$

Доведіть самостійно, що

$$\operatorname{ctg}3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (10.25)$$

Приклади

1. Довести тотожність $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha = 4\operatorname{ctg}4\alpha$.

* $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - 2\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha} -$

$$- \frac{2\sin2\alpha}{\cos2\alpha} = \frac{2\left(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha\right)}{\sin2\alpha\cos2\alpha} = \frac{4\cos4\alpha}{\sin4\alpha} = 4\operatorname{ctg}4\alpha. \ *$$

2. Спростити вираз

$$A = \frac{3 - 4\cos2\alpha + \cos4\alpha}{3 + 4\cos2\alpha + \cos4\alpha}.$$

* Згідно з рівністю (10.19) $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$. Звідси випливає, що $\cos4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$.

Тепер маємо $A = \frac{3 - 4\cos2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1}{3 + 4\cos2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - 1} = \frac{2\left(1 - \cos2\alpha\right)^2}{2\left(1 + \cos2\alpha\right)^2} = \frac{\left(2\sin^2\alpha\right)^2}{\left(2\cos^2\alpha\right)^2} = \operatorname{tg}^4\alpha.$

Відповідь: $\operatorname{tg}^4\alpha$. *

3. Довести, що число $\operatorname{tg}10^\circ$ — ірраціональне.

* Доведення проведемо від супротивного.

Нехай $\operatorname{tg}10^\circ$ — раціональне число. Тоді й $\operatorname{tg}30^\circ$ — раціональне число, бо $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{3\operatorname{tg}10^\circ - \operatorname{tg}^3 10^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^\circ}$ (див. рівність (10.24)). Але ж $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — число ірраціональне і ми дістали протиріччя. *

4. Обчислити $A = \cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ$.

* $8A\sin20^\circ = 4 \cdot 2\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ = 4\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ = 2\sin80^\circ\cos80^\circ = \sin160^\circ$ (Ми скористалися рівністю (10.18).) Далі помітимо, що $\sin160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin20^\circ$.

Отже, $8A\sin20^\circ = \sin20^\circ$ і $A = \frac{1}{8}$.

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

5. Спростити вираз $A = \sin3\alpha\sin^3\alpha + \cos3\alpha\cos^3\alpha$.

* Використовуючи рівності (10.22) і (10.23), маємо $A = (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\sin^3\alpha + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\cos^3\alpha = 4(\cos^6\alpha - \sin^6\alpha) - 3(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha) = 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha) - 3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 4\cos2\alpha((\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - \cos^2\alpha\sin^2\alpha) - 3\cos2\alpha = \cos2\alpha(4(1 - \cos^2\alpha\sin^2\alpha) - 3) = \cos2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha) = \cos^3 2\alpha.$

Відповідь: $\cos^3 2\alpha$. *

3.4. В багатьох випадках є корисними формули зниження степеня:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha). \tag{10.26}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha), \tag{10.27}$$

$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos3\alpha), \tag{10.28}$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin3\alpha). \tag{10.29}$$

Ці формули легко виводяться із формул (10.19), (10.23) та (10.22).

Приклади

1. Довести тотожність

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\alpha}}=-\cos\frac{\alpha}{2},\ \text{де}\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi.$$

* Згідно з формулою (10.26) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|\cos\alpha|}=$

$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}$, бо при $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ $\cos\alpha>0$. Далі $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}=\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Оскільки $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, то $\cos\frac{\alpha}{2}<0$, і $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|<-\cos\frac{\alpha}{2}$, що завершує доведення. *

2. Довести тотожність

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\frac{1}{8}(5+3\cos4\alpha).$$

* Згідно з формулами (10.27), (10.26) маємо

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3=\frac{1}{8}(1-\cos2\alpha)^3+\frac{1}{8}(1+\cos2\alpha)^3=$$

$$=\frac{1}{8}\left(2+6\cos^2 2\alpha\right)=\frac{1}{8}\left(2+3\left(1+\cos4\alpha\right)\right)=\frac{1}{8}(5+3\cos4\alpha).$$ *

3. Обчислити суму

$$S=\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}.$$

* Послідовно знаходимо:

$$\cos^4\frac{\pi}{8}=\left(\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2=\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}=\frac{3+2\sqrt{2}}{8};$$

$$\cos^4\frac{3\pi}{8}=\left(\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2=\left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2=\frac{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}=\frac{3-2\sqrt{2}}{8};$$

$$\cos^4\frac{5\pi}{8}=\cos^4\left(\pi-\frac{5\pi}{8}\right)=\cos^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3-2\sqrt{2}}{8};$$

$$\cos^4\frac{7\pi}{8}=\cos^4\frac{\pi}{8}=\frac{3+2\sqrt{2}}{8}.$$

Тепер знаходимо: $S=2\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{8}+2\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{8}=\frac{3}{2}.$

Відповідь: 1,5. *

3.5. Тригонометричні функції $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ раціонально виражаються через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{10.30}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{10.31}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{10.32}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{10.33}$$

Формули (10.32) і (10.33) зустрічалися раніше. Доведемо справедливість формул (10.30) і (10.31):

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Розділимо праву частину останньої нерівності на тригонометричну одиницю:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Тепер розділимо чисельник і знаменник одержаного дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1},$$

що й потрібно було довести. Зрозуміло, що формула (10.30) справедлива при $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Аналогічно маємо

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формули (10.30) — (10.33) називають *універсальними підстановками.*

Приклади

1. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$. Обчислити суму

$$S = \sin 2\alpha - \cos 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha.$$

* Згідно з формулами (10.30) — (10.32) маємо

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 2{,}5}{1+2{,}5^2} = \frac{5}{7{,}25} = \frac{20}{29},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-2{,}5^2}{1+2{,}5^2} = -\frac{5{,}25}{7{,}25} = -\frac{21}{29},$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot 2{,}5}{1-2{,}5^2} = \frac{5}{-5{,}25} = -\frac{20}{21}.$$

Далі $S = \frac{20}{29} + \frac{21}{29} - \frac{20}{21} = \frac{281}{609}$.

Відповідь: $\frac{281}{609}$. *

2. Довести, що $\operatorname{tg} 5^\circ$ — ірраціональне число.

* Раніше ми довели (приклад 3 п.3.3), що $\operatorname{tg} 10^\circ$ — ірраціональне число. Звідси в силу рівності $\operatorname{tg}10^\circ = \frac{2\operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ}$ випливає, що $\operatorname{tg} 5^\circ$ — число ірраціональне. *

3.6. Виведемо формули половинного аргументу.

Із формул зниження (10.26) і (10.27) випливають формули

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (10.34)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (10.35)$$

Знак перед коренем береться залежно від величини кута $\frac{\alpha}{2}$. Далі

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \tag{10.36}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \tag{10.37}$$

Мають місце формули

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \tag{10.38}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{10.39}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{10.40}$$

Доведемо, наприклад, формулу (10.39):

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогічно доводяться й інші наведені формули.

Приклади

1. Обчислити $\cos\frac{\pi}{16}$.

* Згідно з формулою (10.34) $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Знову ж таки за формулою (10.34) $\cos\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. *

2. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\pi<\alpha<1{,}5\pi$. Знайти $\sin\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\alpha}{2},\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

* $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$.

За формулою (10.35) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$.

За формулою (10.34) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}}=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

Далі $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}=-\sqrt{\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)^2}{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}}=-\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. *

3. Нехай φ — гострий кут. Довести, що $1+\operatorname{ctg}\varphi<\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

* Використовуючи одну з формул (10.40), маємо

$1+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}<\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $\sin\varphi+\cos\varphi<1+\cos\varphi$, $\sin\varphi<1$,

що справедливо. *

3.7. Виведемо формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму. Мають місце тотожності

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right), \tag{10.41}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right), \tag{10.42}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right). \tag{10.43}$$

Доведемо тотожність (10.42). Згідно з формулами додавання $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\right.$

$\left.-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\left(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right)\right)=\sin\alpha\sin\beta$.

Тотожності (10.41) і (10.43) доводяться аналогічно.

Приклади

1. Довести тотожність $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)$.

* Згідно з формулою (10.41) маємо $4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=2\cos\alpha(\cos 120^\circ+\cos 2\alpha)=$ $=-\cos\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha=-\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos\alpha=\cos 3\alpha$, що й потрібно було довести. *

2. Довести тотожність $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

* Нехай $A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

$$A\cdot\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Згідно з формулою (10.43) маємо

$$A\cdot\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

звідки $A=-\frac{1}{2}$, що й потрібно було довести. *

3.8. Нехай $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$. Тоді $\alpha=\frac{x+y}{2}$, $\beta=\frac{x-y}{2}$.

Із формули (10.41) маємо $\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}(\cos x+\cos y)$, звідки

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \tag{10.44}$$

Із формули (10.42) одержуємо

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \tag{10.45}$$

Із формули (10.43) одержуємо

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \tag{10.46}$$

Поклавши у формулі (10.46) $-y$ замість y, маємо

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \tag{10.47}$$

Далі, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Отже,

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \tag{10.48}$$

Аналогічно доводяться формули

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{10.49}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \tag{10.50}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{10.51}$$

Формули (10.44) — (10.51) називаються *формулами перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.*

Приклади

1. Перетворити в добуток суму

а) $\frac{1}{2}+\sin\alpha$; б) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$; в) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha$; г) $1-\operatorname{ctg}\alpha$.

* а) $\frac{1}{2}+\sin\alpha=\sin 30^\circ+\sin\alpha=2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ (згідно з формулою (10.46)):

б) $\sqrt{3}+2\cos\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha\right)=2\left(\cos 30^\circ+\cos\alpha\right)=4\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ (згідно з формулою (10.44));

в) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\cos 60^\circ\cos\alpha}=\frac{2\sin\left(60^\circ+\alpha\right)}{\cos\alpha}$ (згідно з формулою (10.48));

г) $1-\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}45^\circ-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\left(\alpha-45^\circ\right)}{\sin 45^\circ\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-45^\circ\right)}{\sin\alpha}$ (згідно з формулою (10.51)).*

2. Довести тотожність $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, де $A+B+C=\pi$.

* Згідно з формулою (10.46) $S=\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(\pi-\left(A+B\right)\right)=$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(A+B\right)$. Далі, згідно з формулою (10.18) $S=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+$

$+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$. Згідно з формулою (10.44) $S=$

$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$.

Помітимо, що $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\cos\frac{C}{2}$. Отже, $S=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, що й потрібно було довести. *

3.9. Розглянемо вираз $A=a\sin\varphi+b\cos\varphi$,

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\varphi\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, існує кут γ такий, що $\cos\gamma=$

$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $A=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\varphi\cos\gamma+\cos\varphi\sin\gamma\right)=$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\varphi+\gamma\right)$.

Ми довели тотожність

$$a\sin\varphi+b\cos\varphi=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\varphi+\gamma\right). \qquad (10.52)$$

де $\cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Приклади

1. Довести нерівність $|a\sin\varphi + b\cos\varphi| \le \sqrt{a^2 + b^2}$.

* Із формули (10.52) маємо $|a\sin\varphi + b\cos\varphi| = \sqrt{a^2 + b^2}\,|\sin(\varphi + \gamma)| \le \sqrt{a^2 + b^2}$. Бо $|\sin(\varphi + \gamma)| \le 1$.

Зауваження. Із доведеної нерівності випливає, що область значень функції $y = a\cos x + b\sin x$ $E(y) = \left[-\sqrt{a^2 + b^2}\,;\sqrt{a^2 + b^2}\right]$.

2. Довести тотожність

а) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

б) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

* а) Згідно з формулою (10.52) $\cos\alpha + \sin\alpha = 1\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \gamma)$, де $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Зрозуміло, що $\gamma = \frac{\pi}{4}$ і $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Той самий результат дістанемо іншим шляхом: $\cos\alpha + \sin\alpha = \cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$. (Ми застосували формулу (10.45).)

б) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1\cdot\sin\alpha + (-1)\cos\alpha = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\cdot\sin(\alpha + \gamma)$, де $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Зрозуміло, що $\gamma = -\frac{\pi}{4}$ і $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. *

Вправи

1. Обчислити:

а) sin 105°; б) cos 165°; в) tg 75°; г) ctg 15°.

2. Відомо, що ctg α = 3, π < α < 1,5π. Знайти

а) sin (60° + α); б) cos (30° – α); в) tg (45° – α); г) ctg (45° + α).

3. Довести, що $\sin 15° + \operatorname{tg} 30°\cos 15° = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. Відомо, що tg α = 3, tg (α + β) = $-\frac{3}{7}$. Знайти tg β.

5. Спростити вираз:

а) (tg α – tg β) ctg (α – β) – tg α tg β;

б) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$.

6. Відомо, що $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Довести, що $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ при всіх допустимих значеннях α, β, γ.

7. Звести до знаходження значень тригонометричних функцій гострого кута:

а) $\sin(-400°)$; б) $\cos 1000°$; в) $\operatorname{tg} 888°$; г) $\operatorname{ctg} 550°$;

д) $\sin 6$; е) $\cos 11$; є) $\operatorname{tg}(-4)$; ж) $\operatorname{ctg} 7$.

8. Обчислити:

а) $\sin 150° + \sin 210° + \sin 330°$;

б) $\cos 120° + \cos 240° + \cos 300°$;

в) $\operatorname{tg} 135° + \operatorname{ctg} 225° + \operatorname{tg} 315°$.

9. Спростити вираз:

а) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right)^2+\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\pi-\alpha)\right)^2$;

б) $\frac{\cos^2(270°+\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-360°)}+\frac{\cos^2(180°-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-270°)}$.

10. Відомо, що $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Знайти

а) $\sin 2\alpha$; б) $\operatorname{tg} 2\alpha$; в) $\operatorname{ctg}(60° + 2\alpha)$; г) $\cos(30° - 2\alpha)$.

11. Довести, що $\operatorname{tg} 20°$ — число ірраціональне.

12. Довести тотожність:

а) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}=2\operatorname{cosec} 2\alpha$; б) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$;

в) $\frac{\cos 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^2\alpha$; г) $\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin 2\alpha$.

13. Чи можлива рівність $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}51$?

14. Відомо, що $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Обчислити $\cos 2\alpha \operatorname{tg} 4\alpha$.

15. Відомо, що $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Знайти $\operatorname{tg} 3\alpha$.

16. Відомо, що $\cos\alpha=-\frac{2}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Знайти $\sin 3\alpha$.

17. Знайти $\sin^2 2\alpha$, якщо $\operatorname{cosec}^2\alpha + \sec^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 7$.

18. Довести, що вираз $\sqrt{4\cos^4 x-6\cos 2x+3}+\sqrt{4\sin^4 x+6\cos 2x+3}$ не залежить від x, і знайти його числове значення.

19. Довести тотожність:

а) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta$;

б) $1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi) = 4\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

г) $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin 4\alpha}$;

д) $\dfrac{(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\cos 2\alpha)}=\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

е) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos^2\alpha}{2(\cos\alpha-1)}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

20. Довести тотожність:

а) $\dfrac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3)=\cos^4\alpha$;

б) $\dfrac{3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+3}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}-5\sin\alpha=3$:

в) $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}-\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta=1$.

21. Довести подвійну нерівність:

а) $\dfrac{1}{2}\le\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\le 1$; б) $\dfrac{1}{4}\le\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\le 1$.

22. Відомо, що $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{3}$. Знайти суму $S=\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha$.

23. Довести, що якщо $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a}{b}$, то вираз $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ не залежить від a.

24. Обчислити $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

25. Відомо, що $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=3\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Довести, що $\operatorname{tg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$.

26. Довести тотожність:

а) $\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)$;

б) $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)$.

27. Довести тотожність

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{2}.$$

28. Перетворити суму в добуток:

а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $1-\sin\alpha+\cos\alpha$;

в) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$; г) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha$.

29. Відомо, що $\alpha+\beta=\gamma$. Довести, що

а) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

б) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

30. Довести тотожність

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta).$$

31. Відомо, що A, B, C — кути будь-якого трикутника. Довести тотожність:

$$\text{а) } \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}:$$

$$\text{б) } \operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

32. Відомо, що $y = a\cos^2 x + b\sin x \cos x + c\sin^2 x$. Довести, що

$$\frac{1}{2}\left(a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right) \le y \le \frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right).$$

§ 4. Властивості та графіки тригонометричних функцій

4.1. Функція $y = \cos x$ має такі властивості:

1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) парна, бо $\cos(-x) = \cos x$; 3) періодична з періодом 2π; 4) $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $y > 0$ при $2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < 2\pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; $y < 0$ при $2\pi n + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 5) зростає при $2\pi n - \pi < x < 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; спадає при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $\min\limits_{x\in\mathbf{R}} y = y(\pi + 2\pi n) = -1$, $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} y = y(2\pi n) = 1$; 6) $E(y) = [-1; 1]$. Графік функції зображено на рис. 10.8.

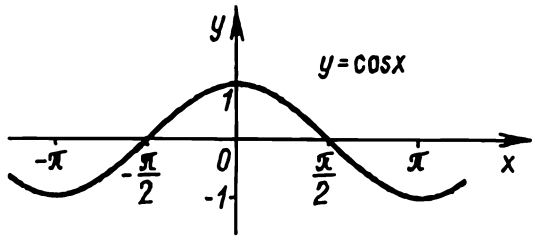


Рис. 10.8

Використовуючи тотожність $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, можна одержати графік функції $y = \sin x$ із графіка функції $y = \cos x$ за допомогою паралельного зсуву на $\frac{\pi}{2}$ праворуч вздовж осі Ox (рис. 10.9).

Функція $y = \sin x$ має такі властивості: 1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) непарна, бо $\sin(-x) = -\sin x$; 3) періодична з періодом 2π; 4) $y = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $y > 0$ при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $y < 0$ при $2\pi n - \pi < x < 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 5) зростає при $2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < 2\pi n + \frac{\pi}{2}$, спадає при $2\pi n + \frac{\pi}{2} < x < 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; $\min\limits_{x\in\mathbf{R}} y = y\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} y = y\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$; 6) $E(y) = [-1; 1]$.

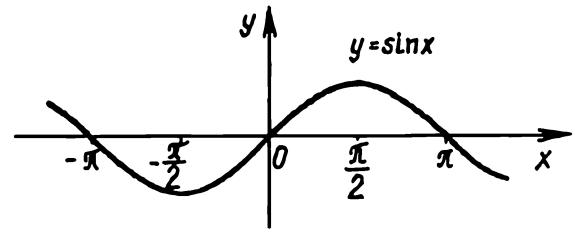


Рис. 10.9

Функція $y = \operatorname{tg} x$ має такі властивості: 1) $D(y) = \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n + \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. Графік має вертикальні асимптоти $x = \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) функція непарна, бо $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; 3) функція періодична з періодом π; дійсно, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$;

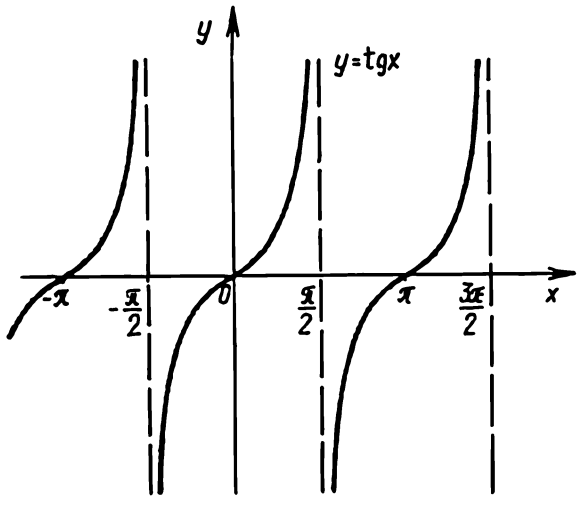


Рис. 10.10

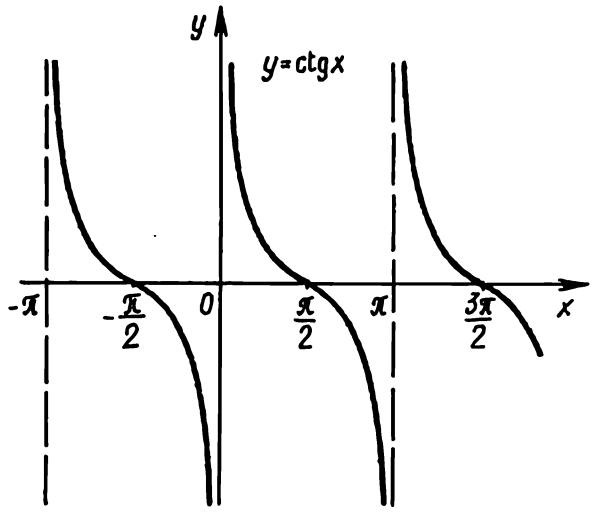


Рис. 10.11

4) $y = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $y > 0$ при $\pi n < x < \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; $y < 0$ при $\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 5) зростає на кожному з інтервалів $\left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n + \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ показано на рис. 10.10.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ має такі властивості: 1) $D(y) = (\pi n; \pi(n + 1))$, $n \in \mathbf{Z}$; графік має вертикальні асимптоти $x = \pi n$, 2) функція непарна, бо $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$; 3) функція періодична з періодом π; 4) $y = 0$ при $x = \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; $y > 0$ при $\left(\pi n < x < \pi n + \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; $y < 0$ при $\left(\pi n + \frac{\pi}{2} < x < \pi(n+1)\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 5) спадає на кожному з інтервалів $(\pi n; \pi(n + 1))$, $n \in \mathbf{Z}$. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ зображено на рис. 10.11.

4.2. Функція $f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення $f(x)$ числа $x + T$ та $x - T$ також належать цій області і $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

Зрозуміло, що якщо T — період функції, то й число kT — період цієї функції ($k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$).

Іноді найменший додатний період називають *основним періодом* функції. Так, функції $\sin x$, $\cos x$ мають основний період 2π, а функції $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — π. Якщо встановлено, що функція періодична з основним періодом T, то з'ясовують її властивості на проміжку довжиною T, а потім встановлюють ці властивості на всій області визначення.

Наприклад, функція $y = \operatorname{tg} x$ має основний період $T = \pi$. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція має єдиний нуль: $x = 0$. Отже, $y = 0$ при $x = 0 + \pi n = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Графік періодичної функції також будують на проміжку довжиною T, а потім його періодично повторюють.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x)$ періодична і має основний період T, то функція $A \cdot f(kx + b) + c$ також періодична і має основний період $T_1 = \dfrac{T}{|k|}$ (A, k, b і c — сталі, причому $k \neq 0$).*

Приклади

1. Довести, що функції

а) $y = 3\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y = -2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{8} - 3x\right)$

періодичні і знайти основний період кожної з них.

* а) Згідно з теоремою 1 функція має основний період $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

б) Згідно з теоремою 1 функція має основний період $T = \dfrac{\pi}{|-3|} = \dfrac{\pi}{3}$. *

2. Чи є періодичною функція:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^2$, в) $y = \sin x^2$,

г) $y = \sin^2 x$; д) $y = \cos x + \cos\sqrt{2}x$; е) $y = \sin^3 x$.

* а) Нехай функція $y = \sqrt{x}$ періодична з основним періодом T. За означенням, якщо число $1 \in D(y)$, то й число $1 - T \in D(y)$. Далі $1 - 2T \in D(y)$ і взагалі $1 - nT \in D(y)$ при будь-якому натуральному n. З іншого боку ясно, що при досить великому n число $1 - nT$ від'ємне і $1 - nT \notin D(y)$. Ми дійшли протиріччя. Якщо функція y періодична, то множина $D(y)$ не обмежена ані зліва, ані справа.

б) Функція $y = x^2$ має єдиний нуль $x = 0$, отже не є періодичною.

в) Знайдемо нулі даної функції із рівняння $\sin x^2 = 0$; $x^2 = \pi k$, $x = \pm\sqrt{\pi k}$, $k \in \{0; 1; 2; \ldots\}$. Позначимо через d відстань між двома сусідніми нулями:

$$d = \sqrt{\pi(n-1)} - \sqrt{\pi n} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi(n+1)} + \sqrt{\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Отже, відстань між сусідніми нулями зменшується і може стати як завгодно малою. Це означає, що при досить великих x на двох сусідніх інтервалах довжиною T (яке б не було стале T) кількість нулів буде різна. Отже, дана функція неперіодична.

г) $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. Згідно з теоремою 1 функція періодична з основним періодом $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

д) Нехай функція $y = \cos x + \cos\sqrt{2}x$ періодична і T — її основний період. Тоді для будь-якого дійсного x виконується рівність $\cos x + \cos\sqrt{2}x = \cos(x + T) + \cos\sqrt{2}(x + T)$. Зокрема, при $x = 0$ маємо $2 = \cos T + \cos\sqrt{2}T$. Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos\sqrt{2}T = 1. \end{cases} \begin{cases} T = 2\pi k, \\ \sqrt{2}T = 2\pi n, \end{cases} \begin{cases} T = 2\pi k, \\ T = \sqrt{2}\pi n, \end{cases} n, k \in \mathbf{Z},$$

звідки $2\pi k = \sqrt{2}\pi n$ і $\sqrt{2} = \frac{n}{k}$. Ми дістали протиріччя, бо права частина останньої рівності — число раціональне, а ліва частина — число ірраціональне.

е) $y = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. (Див. формулу (10.29)). Функція $\frac{1}{4}\sin 3x$ має основний період $\frac{2\pi}{3}$. Зрозумілю, що й число 2π є її періодом, а це означає, що дана функція має період 2π. *

Теорема 2. *Якщо функція* $\varphi(x)$ *періодична і* $E(\varphi(x)) \subset D(f(x))$, то функція $f(\varphi(x))$ *також періодична.*

Наприклад, періодичними є функції

$$y = 3^{\cos x};\ y = \lg \sin x, x \in (2\pi n; 2\pi n + \pi);\ y = |\operatorname{tg} x|;\ y = \cos^n x, n \in \mathbf{N}.$$

Теорема 3. *Якщо декілька функцій періодичні і мають однаковий основний період, то періодичною є функція, що є* а) *їх алгебраїчною сумою*, б) *добутком цих функцій.*

Зауваження. У алгебраїчної суми функцій основний період може бути меншим за основний період кожної з даних функцій.

Так, кожна з функцій $y_1 = |\sin x|$, $y_2 = |\cos x|$ має основний період $T = \pi$, але їх сума — функція $y = |\sin x| + |\cos x|$ має основний період $\frac{\pi}{2}$.

Теорема 4. *Функція* $y = a_1 \sin\frac{p_1}{q_1}x + a_2 \sin\frac{p_2}{q_2}x + \ldots + a_k \sin\frac{p_k}{q_k}x + b_1 \cos\frac{m_1}{n_1}x + b_2 \cos\frac{m_2}{n_2}x + \ldots + b_r \cos\frac{m_r}{n_r}x$ *періодична і має основний період*

$$T = 2\pi\frac{k(q_1, q_2, \ldots, q_k, n_1, n_2, \ldots, n_r)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_k, m_1, m_2, \ldots, m_r)}$$

($a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, q_i, n_i, p_i, m_i — *натуральні числа*).

Теорема 5. *Функція* $y = a_1 \operatorname{tg}\frac{p_1}{q_1}x + a_2 \operatorname{tg}\frac{p_2}{q_2}x + \ldots + a_k \operatorname{tg}\frac{p_k}{q_k}x + b_1 \operatorname{ctg}\frac{m_1}{n_1}x + b_2 \operatorname{ctg}\frac{m_2}{n_2}x + \ldots + b_r \operatorname{ctg}\frac{m_r}{n_r}x$ *періодична і має основний період*

$$T = \pi\frac{k(q_1, q_2, \ldots, q_k, n_1, n_2, \ldots, n_r)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_k, m_1, m_2, \ldots, m_r)}$$

(Нагадаємо, що k — найменше спільне кратне, а D — найбільший спільний дільник.).

Приклад

3. З'ясувати, чи є періодичною функція: а) $y = \cos\frac{2}{5}x - 3\sin\frac{2}{3}x + 4\cos\frac{3}{7}x$;

б) $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3} - 4\operatorname{ctg}\frac{3}{4}x$; в) $y = 3\cos\frac{2}{5}x - 2\sin\frac{2}{3}x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ і знайти її основний період.

* а) Згідно з теоремою 4 функція періодична і має основний період $T = 2\pi\dfrac{k(5,3,7)}{D(2,2,3)} = 210\pi$.

б) Згідно з теоремою 5 функція періодична і має основний період $T = \pi\dfrac{k(3,4)}{D(1,3)} = 12\pi$.

в) Функція $y_1 = 3\cos\dfrac{2}{5}x - 2\sin\dfrac{2}{3}x$ періодична і має основний період $T = 2\pi\dfrac{k(5,3)}{D(2,2)} = 15\pi$.

Функція $y_2 = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ має період 2π.

Отже, дана функція періодична з основним періодом 30π. *

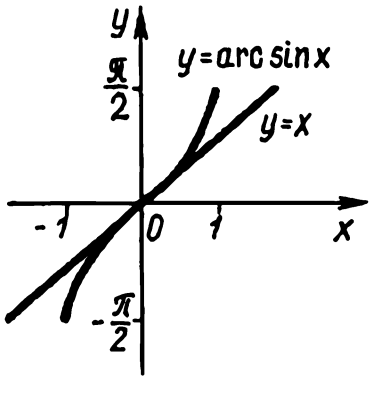


Рис. 10.12

4.3. Функція $y = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ зростає, отже має обернену. Ця функція $y = \arcsin x$ («арксинус x»). Графік цієї функції можна одержати, відобразивши графік функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ симетрично відносно прямої $y = x$ (рис. 10.12).

Основні властивості функції $y = \arcsin x$ такі:

1) $D(y) = [-1; 1]$; 2) функція непарна $\arcsin(-x) = -\arcsin x$; 3) $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $0 < x \le 1$, $y < 0$ при $-1 \le x < 0$; 4) функція зростає на всій області визначення $E(y) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Число α називається *арксинусом числа* a, якщо виконуються дві умови: 1) $\sin\alpha = a$, 2) $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Отже, $\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = a, \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

Для $x \in [-1; 1]$ $\sin(\arcsin x) = x$.

Наведемо деякі значення функції $y = \arcsin x$: $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

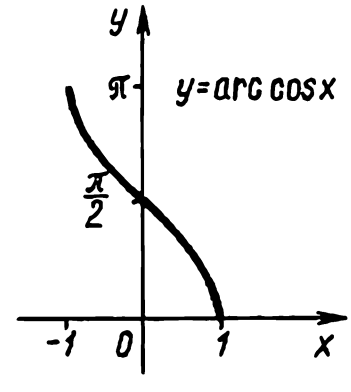


Рис. 10.13

4.4. Функція $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ спадає, отже, має обернену. Ця функція $y = \arccos x$ («арккосинус x»). Відобразивши симетрично відносно прямої $y = x$ графік функції $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, одержимо графік функції $y = \arccos x$ (рис. 10.13).

Перелічимо основні властивості функції $y = \arccos x$:

1) $D(y) = [-1; 1]$; 2) функція не є ані парною, ані непарною; 3) $y = 0$ при $x = 1$, $y > 0$ при $x \in [-1; 1)$; 4) функція спадає на всій області визначення.

Число α називається *арккосинусом числа a*, якщо: 1) $\cos\alpha = a$, 2) $0 \le \alpha \le \pi$.

Отже, $\arccos a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a, \\ \alpha \in [0;\pi]. \end{cases}$

Для $x \in [-1; 1]$ $\cos(\arccos x) = x$.

Ось деякі значення функції $y = \arccos x$:

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2};\ \arccos 1 = 0;\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3},\ \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Теорема 1. *Для* $x \in [-1; 1]$ *виконуються рівності*:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; б) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

* а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

Нехай $\arcsin x = \alpha_1$, $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \alpha_2$. Оскільки $x \in [-1; 1]$, то $\sin\alpha_1 = x$, $\sin\alpha_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$. Крім того, помітимо, що $-\frac{\pi}{2} \le \alpha_1 \le \frac{\pi}{2}$; $-\pi \le -\arccos x \le 0$ і $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2}$. Отже $-\frac{\pi}{2} \le \alpha_2 \le \frac{\pi}{2}$; Оскільки $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$ і числа α_1, α_2 належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\alpha_1 = \alpha_2$, що й потрібно було довести.

б) Нехай $\arccos(-x) = \alpha_1$, $\pi - \arccos x = \alpha_2$. Оскільки $-1 \le x \le 1$, то і $-1 \le -x \le 1$. Отже, $\cos\alpha_1 = -x$, $\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$, $-\pi \le -\arccos x \le 0$ і $0 \le \pi - \arccos x \le \pi$.

Оскільки $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ і числа α_1, α_2 належать проміжку $[0; \pi]$, то $\alpha_1 = \alpha_2$. *

4.5. Функція $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ зростає, отже, має обернену. Ця функція $y = \operatorname{arctg} x$ («арктангенс x»). Відобразивши графік функції $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ симетрично відносно прямої $y = x$, одержимо графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 10.14). Її основні властивості такі:

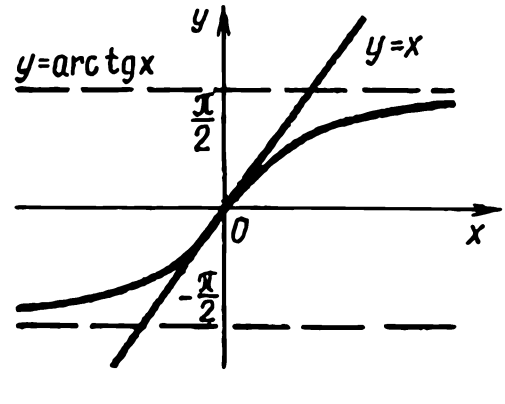


Рис. 10.14

1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) функція непарна. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; 3) $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$; 4) функція зростає на всій числовій прямій.

Число α називається *арктангенсом числа a*, якщо 1) $\operatorname{tg}\alpha = a$; 2) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

тобто $\alpha = \operatorname{arctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = a, \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ Наведемо деякі значення функції $y = \operatorname{arctg} x$;

$$\operatorname{arctg} 0 = 0;\ \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};\ \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3},\ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

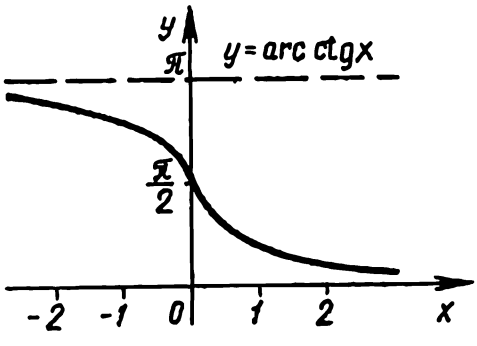


Рис. 10.15

4.6. Функція $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$ спадає, отже, має обернену. Ця функція $y = \operatorname{arcctg} x$ («арккотангенс x»). Її графік показано на рис. 10.15. Основні властивості функції такі:

1) $D(y) = \mathbf{R}$; 2) функція не є ані парною, ані непарною; 3) $y > 0$ при $x \in \mathbf{R}$; 4) функція спадає на всій числовій прямій.

Число α називається *арккотангенсом числа a*, якщо 1) $\operatorname{ctg}\alpha = a$, 2) $0 < \alpha < \pi$, тобто

$$\alpha = \operatorname{arcctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha = a, \\ 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

Ось деякі значення функції $y = \operatorname{arcctg} x$:

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2};\ \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4};\ \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4},\ \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Теорема 2. *Для будь-якого дійсного x виконуються рівності*:

а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1.

4.7. Функції $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ називаються *оберненими тригонометричними функціями*.

Наведемо характерні приклади.

Приклади

1. Обчислити:

а) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; б) $\cos\left(\arcsin\frac{2}{5} - \arccos\frac{1}{4}\right)$;

в) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{5}\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{10}\right)$.

* а) 1-й спосіб. Нехай $\arccos\frac{1}{3} = \alpha$. тоді $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2-й спосіб. Розглянемо прямокутний трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $AB = 3$ (рис. 10.16). Зрозуміло, що $A = \arccos\frac{1}{3}$. Далі $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Відповідь: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. *

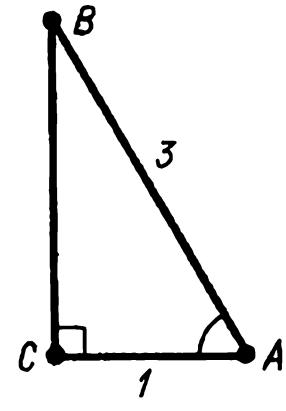


Рис. 10.16

* б) Покладемо $\alpha = \arcsin\frac{2}{5}$, $\beta = \arccos\frac{1}{4}$. Маємо $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Послідовно знаходимо $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\cos\beta = \frac{1}{4}$, $\sin\alpha = \frac{2}{5}$; $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Отже, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{21}+2\sqrt{15}}{20}$.

Відповідь: $\frac{1}{20}\left(\sqrt{21}+2\sqrt{15}\right)$. *

* в) Покладемо $\alpha = \arccos\frac{1}{5}$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Отже, $\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$. Відповідь: $\frac{4\sqrt{6}}{25}$. *

* г) Покладемо $\alpha = \arccos\frac{1}{10}$. Тепер маємо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\frac{1}{10}}{\sqrt{1-\frac{1}{100}}} = \frac{9}{10}:\frac{3\sqrt{11}}{10} = \frac{3}{\sqrt{11}}$.

Відповідь: $\frac{3}{\sqrt{11}}$. *

2. Знайти область визначення функції:

а) $y = 2\arcsin(1 - 4x)$; б) $y = 2 - 3\arccos(x^2 - 2)$.

* а) Область визначення даної функції знайдемо з системи

$$\begin{cases} -1 \le 1-4x, \\ 1-4x \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x \le \frac{1}{2}, \\ 0 \le x, \end{cases} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. *

* б) Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} -1 \le x^2 - 2, \\ x^2 - 2 \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \le x^2, \\ x^2 \le 3, \end{cases} \quad 1 \le x^2 \le 3, \quad 1 \le |x| \le \sqrt{3}.$$

$-\sqrt{3} \le x \le -1$ або $1 \le x \le \sqrt{3}$. Відповідь: $x \in \left[-\sqrt{3}; -1\right] \cup \left[1; \sqrt{3}\right]$. *

3. Побудувати графік функції:

а) $y = 2\arcsin(1 - 2x)$; б) $y = \arccos(2 - |x|)$; в) $y = \operatorname{arctg}(1 - 2|x|)$.

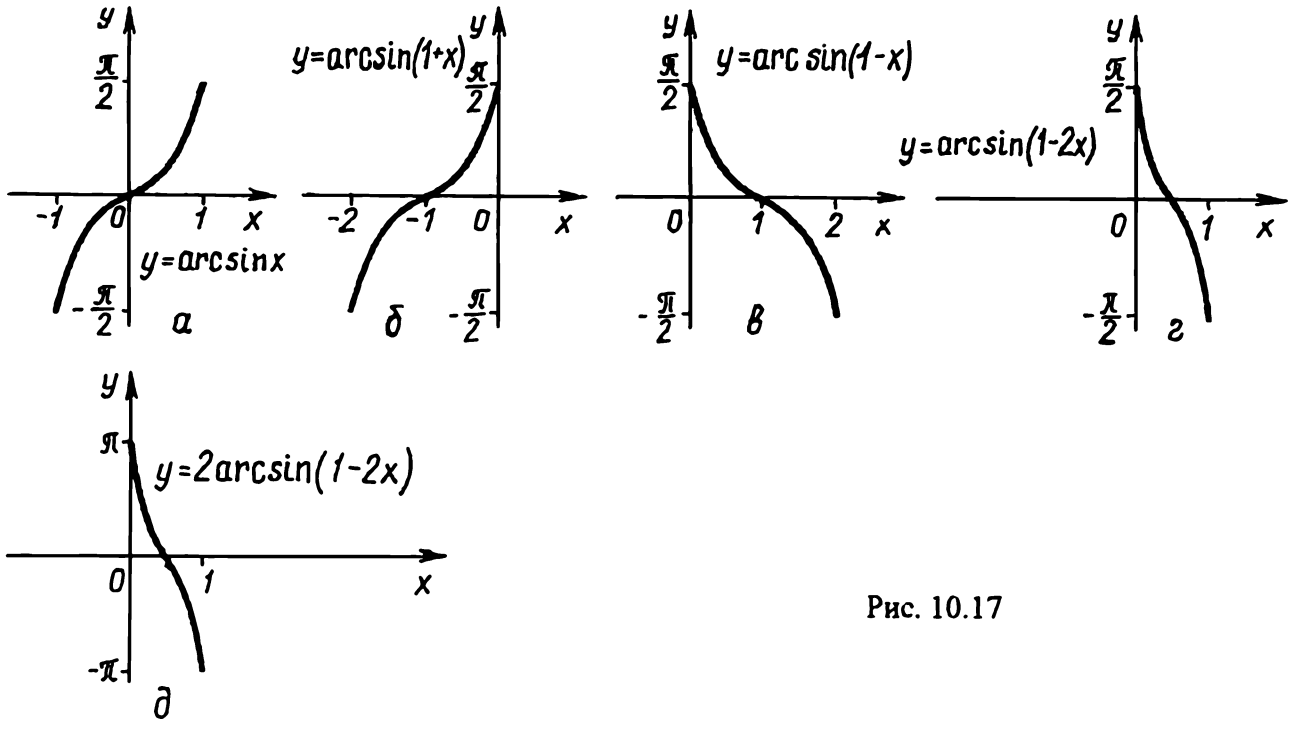


Рис. 10.17

* а) Побудову графіка здійснюємо за такими етапами:

1) $y = \arcsin x$, 2) $y = \arcsin(1 + x)$ (паралельний зсув на одиницю ліворуч вздовж осі Ox), 3) $y = \arcsin(1 - x)$ (симетрія відносно осі Oy), 4) $y = \arcsin(1 - 2x)$ (стискання у два рази до осі Oy), 5) $y = 2\arcsin(1 - 2x)$ (розтягання у два рази від осі Ox). На рис. 10.17,*а—д* показано поетапну побудову графіка. *

* б) Етапи побудови графіка такі: $y = \arccos x$, $y = \arccos(2 + x)$, $y = \arccos(2 - x)$, $y = \arccos(2 - |x|)$. Графік даної функції показано на рис. 10.18. *

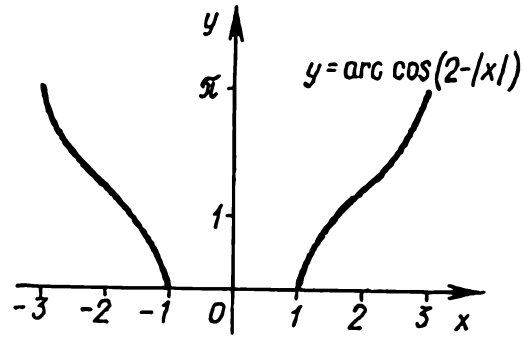


Рис. 10.18

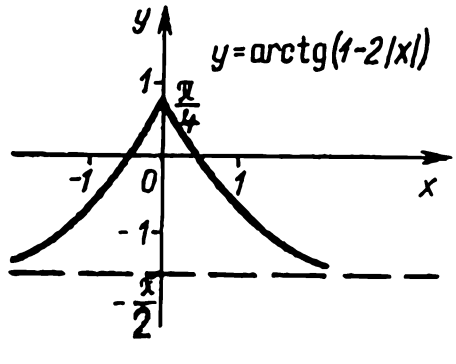


Рис. 10.19

* в) Етапи побудови графіка такі: $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctg}(x + 1)$, $y = \operatorname{arctg}(1 - x)$, $y = \operatorname{arctg}(1 - 2x)$, $y = \operatorname{arctg}(1 - 2|x|)$ Графік даної функції показано на рис. 10.19. *

Вправи

1. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \sin|x|$; б) $y = \cos|x|$; в) $y = \operatorname{tg}|x|$;

г) $y = \operatorname{ctg}|x|$; д) $y = |\sin x|$; е) $y = |\operatorname{tg} x|$.

2. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

3. Знайти основний період функції:

а) $y = 3 - 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)$; б) $y = 1 + 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$;

в) $y=4\operatorname{tg}\left(5x-\frac{\pi}{10}\right)-2$; г) $y=3-3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{7}-6x\right)$;

д) $y=2\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$;

е) $y=\cos\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)+2\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$.

4. Знайти основний період функції:

а) $y=\frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}x+4\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{4}{5}x$;

б) $y=\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{3}+3\operatorname{tg}\frac{x}{4}-4\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$.

5. Знайти основний період функції:

а) $y=\sin^4 x$; б) $y=\sin x\cos x$; в) $y=|\cos x|$; г) $y=\sin^6 x-\cos^6 x$.

6. Довести, що функція неперіодична:

а) $y=x^3-x^2$; б) $y=\sqrt{x^2+x}$; в) $y=\sin|x|$; г) $y=\sin x+\sin\sqrt{2}x$.

7. Знайти проміжки зростання функції:

а) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$;

в) $y=\operatorname{tg}\left(4x-\frac{\pi}{8}\right)$; г) $y=-\operatorname{ctg}\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$.

8. Знайти проміжки спадання функції:

а) $y=\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)$;

в) $y=-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}-2x\right)$; г) $y=5\operatorname{ctg}\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$.

9. Обчислити:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}1-\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arcctg}(-1)$.

10. Обчислити:

а) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{5}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

11. Обчислити:

а) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}-\operatorname{arctg}3\right)$; б) $\cos\left(\operatorname{arcctg}(-2)+\arcsin 0{,}1\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}-\arccos\frac{2}{5}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{4}-\operatorname{arctg}5\right)$.

12. Обчислити:

а) $\sin\left(3\arccos\frac{1}{3}\right)$; б) $\cos\left(2\operatorname{arcctg}(-2)\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$.

13. Обчислити:

а) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right)$; б) $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}4\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

14. Знайти область визначення функції:
а) $y = 1 - 3\arcsin(3x^2 - x - 1)$, б) $y = 4\arccos(1 - x - x^2) + 2$,
в) $y = \arcsin\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$.

15. Довести, що:

а) $\operatorname{arctg}1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{7}{11}$;

в) $\arcsin\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$; г) $\arccos\frac{2}{5} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{\sqrt{21}}$;

д) $\arccos\frac{1}{3} + 2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi$.

16. Побудувати графік функції:

а) $y = 1 - \arcsin(2x - 1)$, б) $y = \frac{1}{2}\arccos(1 - x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(1 - 2x)$, г) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}|x - 1|$.

§ 5. Тригонометричні рівняння та системи рівнянь

У цьому параграфі літери m, n, k, p, l тощо позначають будь-яке ціле число.

5.1. Найпростіші тригонометричні рівняння.

1. $\sin x = a$; $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ при $|a| \le 1$, при $|a| > 1$ розв'язків немає.
2. $\cos x = a$; $x = \pm \arccos a + 2\pi k$ при $|a| \le 1$, при $|a| > 1$ розв'язків немає.
3. $\operatorname{tg} x = a$; $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ при $a \in \mathbf{R}$.
4. $\operatorname{ctg} x = a$; $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ при $a \in \mathbf{R}$.

У деяких частинних випадках відповідь спрощується: 1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$; 2) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, 5) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$; 6) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$.

* $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $3x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n$, $3x + \frac{\pi}{3} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{9} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\pi n$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{9} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3}\pi n$. *

2. Розв'язати рівняння $3\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \pi$.

* $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$. Розв'язків немає, оскільки $\frac{\pi}{3} > 1$.

Відповідь: розв'язків немає. *

3. Розв'язати рівняння $\cos\frac{\pi x}{2} = -\frac{1}{2}$.

* $\frac{\pi x}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{4}{3} + 4k$. Відповідь: $x = \pm\frac{4}{3} + 4k$. *

4. Розв'язати рівняння $3\operatorname{tg}(2x - 1) = 5$.

* $\operatorname{tg}(2x - 1) = \frac{5}{3}$, $2x - 1 = \operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\pi n$.

Відповідь: $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\pi n$. *

5. Розв'язати рівняння $\sin(\cos x) = 0$.

* $\cos x = \pi n$. Одержане рівняння має розв'язки лише при $n = 0$, бо лише при $n = 0$ $|\pi n| \le 1$. При $n = 0$ маємо $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. *

6. Розв'язати рівняння $\sin^2 x = \frac{3}{4}$.

* Застосовуючи формулу зниження степеня, одержимо $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4}$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{1}{3}\pi + \pi n$. Відповідь: $x = \pm\frac{1}{3}\pi + \pi n$. *

7. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}^2 x = 3$.

* $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$.

Відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$. *

5.2. У процесі розв'язання тригонометричного рівняння можуть з'явитися сторонні корені. Для їх вилучення робимо перевірку. Якщо тригонометричне рівняння можна звести до виду $f(x) = 0$, де $f(x)$ — деяка тригонометрична функція, то основний період T цієї функції будемо також називати і *періодом даного рівняння*. Перевірку розв'язків роблять на проміжку довжиною T.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\sin x + \cos x = 1$.

* Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння: $(\sin x + \cos x)^2 = 1$, $\sin 2x = 0$, $2x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{2}$. Оскільки при піднесенні обох частин рівняння до квадрату можуть з'явитися зайві корені, необхідно зробити перевірку.

Запишемо дане рівняння у вигляді $\sin x + \cos x - 1 = 0$. Функція $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ має основний період $T = 2\pi$. Отже, період даного рівняння 2π. Зробимо перевірку на проміжку $[0; 2\pi]$. На цьому проміжку лежать п'ять чисел $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ із множини $x = \frac{\pi k}{2}$. Числа π та $\frac{3\pi}{2}$ не підходять. Враховуючи періодичність рівняння, маємо відповідь: $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. *

Зауваження. Радимо читачеві зробити перевірку на числовому колі, там одержані корені зображаються у вигляді чотирьох точок, дві з яких зайві.

Перевірку треба зробити і у випадку, коли потрібно врахувати область визначення.

2. Розв'язати рівняння $\frac{\cos 2x - \cos 6x}{1 - \cos 4x} = 0$.

* Маємо систему

$$\begin{cases} \cos 2x - \cos 6x = 0, \\ \cos 4x \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin 4x \sin 2x = 0, \\ \cos 4x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \sin 2x = 0. \end{array}\right. \\ \cos 4x \neq 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{4}, \\ x = \frac{\pi k}{2}. \end{array}\right. \\ 4x \neq 2\pi m. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}. \\ x \neq \frac{\pi m}{2}. \end{cases}$$

Функція $f(x) = \frac{\cos 2x - \cos 6x}{1 - \cos 4x}$ має основний період $T = \pi$. Розглянемо проміжок $[0; \pi]$. На цьому проміжку лежать числа $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$, що належать множині $x = \frac{\pi n}{4}$. Умову $x \neq \frac{\pi m}{2}$ задовольняють числа $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$. Враховуючи періодичність, маємо відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ та $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$. На числовому колі одержимо чотири точки, які відповідають множині $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}$. *

Наведемо ще один спосіб розв'язання.

* Оскільки корені рівняння $\sin 2x = 0$ знаходяться серед коренів рівняння $\sin 4x = 0$, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\sin 4x = 0,\\ \cos 4x \neq 1,\end{cases} \begin{cases}\sin^2 4x = 0,\\ \cos 4x \neq 1,\end{cases} \begin{cases}1-\cos^2 4x = 0,\\ \cos 4x \neq 1,\end{cases} \begin{cases}\cos 4x = \pm 1,\\ \cos 4x \neq 1,\end{cases} \cos 4x = -1,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}$. *

Часто при розв'язанні тригонометричного рівняння воно розпадається на декілька рівнянь. Розв'язавши їх, одержимо декілька множин чисел. Відповідь подається у вигляді об'єднання цих множин. Виникає питання, чи не мають ці множини спільних елементів, і якщо мають, то як вилучити ці спільні елементи?

Приклади

3. Розв'язати рівняння $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

* $\sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 0$, $\sin 2x(1 + 2\cos x) = 0$,

$$\begin{bmatrix}\sin 2x = 0,\\ \cos x = -\frac{1}{2}.\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}x = \frac{\pi k}{2},\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.\end{bmatrix}$$

Ми одержали дві множини чисел. Чи не мають вони спільних елементів?

Функція $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ має основний період 2π. На проміжку $[0; 2\pi]$ лежать п'ять чисел першої множини: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ і два числа другої множини: $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$. Ми бачимо, що спільних елементів ці множини не мають. Відповідь: $x = \frac{\pi k}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. *

Існує інший спосіб перевірки. Розглянемо рівняння

$$\frac{\pi k}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ 3k = 4 + 12n.$$

Одержане рівняння називається *діофантовим рівнянням*. Його розв'язком називається *пара цілих чисел* $(k_0; n_0)$ *таких, що* $3k_0 = 4 + 12n_0$. Запишемо це рівняння так: $3(k - 4n) = 4$. Оскільки k і n — цілі числа, ліва частина останнього рівняння ділиться на 3, а права — ні. Отже, дане діофантове рівняння не має розв'язків.

Перевірте самостійно, що і рівняння $\frac{\pi k}{2} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ не має розв'язків.

Відповідь: $x = \frac{\pi k}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

4. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$.

$$* \ \operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x = 0,\ \frac{\sin 2x}{\cos 5x \cdot \cos 3x} = 0,\ \begin{cases}\sin 2x = 0,\\ \cos 5x \neq 0,\ \cos 3x \neq 0,\end{cases} \begin{cases}x = \frac{\pi k}{2},\\ \cos 5x \neq 0,\ \cos 3x \neq 0.\end{cases}$$

Функція $f(x) = \operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x$ має основний період $T = \pi$. На проміжку $[0; \pi]$ лежать числа $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ із множини $x = \frac{\pi k}{2}$. Число $\frac{\pi}{2}$ не витримує перевірки. Враховуючи періодичність, маємо відповідь: $x = \pi n$. *

Оскільки перевірка в тригонометричних рівняннях громіздка, бажано робити переходи до рівносильних рівнянь.

Приклади

5. Розв'язати рівняння $\dfrac{3+4\cos 2x}{\sqrt{\cos x}} = -2\sqrt{\cos x}$.

$$* \ \frac{3+4\cos 2x}{\sqrt{\cos x}} = -2\sqrt{\cos x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4\cos 2x = -2\cos x, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4\left(2\cos^2 x - 1\right) = -2\cos x, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \\ \cos > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k.$$

Відповідь: $x = \pm\arccos\dfrac{1}{4} + 2\pi k$. *

6. Розв'язати рівняння $\sin 7x + \cos 2x = -2$.

* Оскільки $\sin 7x \geq -1$ і $\cos 2x \geq -1$, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin 7x = -1, \\ \cos 2x = -1, \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2\pi n}{7}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $-\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2\pi n}{7} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $-1 + 4n = 7 + 14m$, $n = 2 + 3m + \dfrac{m}{2}$. Оскільки n і m — цілі, число $\dfrac{m}{2}$ — ціле.

Нехай $\dfrac{m}{2} = t$, тоді $n = 7t + 2$ і $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi t$. Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi t$. *

5.3. Розглянемо тригонометричні рівняння, що зводяться до алгебраїчних.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - \cos 2x - \sin x = 0$.

* Використаємо формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ і одержимо рівняння $2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) - \sin x = 0$, $4\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Одержали квадратне рівняння відносно $\sin x$. Розв'язавши його, одержимо $\sin x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$. Маємо два випадки:

1) $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8}$, $x = (-1)^k \arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\right) + \pi k$;

2) $\sin x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$, $x = (-1)^k \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right) + \pi k$.

Відповідь: $x = (-1)^k \arcsin\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}\right) + \pi k$. *

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{10\sin x+\cos 2x-1}=\sqrt{6}\cos x$.

* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}10\sin x+\cos 2x-1=6\cos^2 x,\\ \cos x\ge 0,\end{cases}\quad \begin{cases}10\sin x+1-2\sin^2 x-1=6-6\sin^2 x,\\ \cos x\ge 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sin^2 x+5\sin x-3=0,\\ \cos x\ge 0,\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \sin x=-3,\end{array}\right.\\ \cos x\ge 0,\end{cases}\quad \begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \cos x\ge 0.\end{cases}$$

На проміжку $[0;\ 2\pi]$ рівняння $\sin x=\dfrac{1}{2}$ має два розв'язки: $\dfrac{\pi}{6}$ і $\dfrac{5\pi}{6}$. Умову $\cos x\ge 0$ задовольняє лише число $\dfrac{\pi}{6}$. Враховуючи періодичність, маємо відповідь: $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$. *

3. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1=\sqrt{3}$.

* Враховуючи, що $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}$, маємо

$$\operatorname{ctg}x-\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}x}+1-\sqrt{3}=0,\quad \begin{cases}\operatorname{ctg}^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}=0,\\ \operatorname{ctg}x\ne 0,\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=-1,\\ \operatorname{ctg}x=\sqrt{3},\end{array}\right.\\ \operatorname{ctg}x\ne 0,\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg}x=-1,\\ \operatorname{ctg}x=\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Маємо два випадки:

1) $\operatorname{ctg}x=-1$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k$; 2) $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$, $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n$.

Відповідь: $x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k$; $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n$.

4. Розв'язати рівняння $3+2\sin 2x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

* Помітимо, що $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$ і запишемо дане рівняння у вигляді $3+2\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}$;

$$\begin{cases}2\sin^2 2x+3\sin 2x-2=0,\\ \sin 2x\ne 0,\end{cases}\quad \begin{cases}\sin 2x=-2,\\ \sin 2x=\dfrac{1}{2},\\ \sin 2x\ne 0,\end{cases}\quad \sin 2x=\frac{1}{2};$$

$$2x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}.$$

Відповідь: $x=(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}$. *

5.4. У багатьох випадках є можливість розв'язати тригонометричне рівняння за допомогою розкладання на множники.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

* $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$, $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$,

$$(1+\cos x)(2\sin x - 1) = 0, \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = -1,\\ \sin x = \frac{1}{2},\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2\pi k,\\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \pi + 2\pi k$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

2. Розв'язати рівняння $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

* Перетворимо ліву частину: $1 - \sin 2x = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x = (\cos x - \sin x)^2$. Маємо рівняння $(\cos x - \sin x)^2 = \cos x - \sin x$; $(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$.

1) $\cos x - \sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$;

2) $\cos x - \sin x - 1 = 0$, $1 - \cos x + \sin x = 0$, $2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$,

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

а) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $x = 2\pi n$; б) $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$. *

3. Розв'язати рівняння

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

* $(\sin x + \sin 2x) + 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$,
$(\sin x + 2\sin x \cos x) + (\cos x + 2\cos^2 x) = 0$,
$\sin x(1 + 2\cos x) + \cos x(1 + 2\cos x) = 0$,
$(1 + 2\cos x)(\sin x + \cos x) = 0$.
Маємо два випадки:

1) $1 + 2\cos x = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

2) $\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Відповідь: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. *

4. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}3x = 0$.

$$* \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x + \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x} = 0. \quad (\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x)\cdot\frac{2 - \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x}{1 - \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x} = 0.$$

$$1) \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x = 0,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x \neq 1,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} = 0,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x \neq 1,\end{array}\right. \quad x = \frac{\pi k}{3};$$

$$2) \left\{\begin{array}{l}2 - \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x = 0,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x \neq 1,\end{array}\right. \quad \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x = 2, \quad \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 2;$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi k}{3},\ x = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n.$ *

5.5. Рівняння $a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1} x\cos x + a_2\sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots + a_n\cos^n x = 0$ називається *однорідним тригонометричним рівнянням.*

Можливі два випадки:

а) $a_0 \neq 0$. Помітимо, що корені рівняння $\cos x = 0$ не є коренями даного рівняння, бо підставляючи в дане рівняння $\cos x = 0$, одержимо $\sin^n x = 0$ і $\sin x = 0$. Ми дійшли до протиріччя, бо рівності $\cos x = 0$, $\sin x = 0$ не можуть виконуватись одночасно. Розділимо обидві частини даного рівняння на $\cos^n x \neq 0$ і одержимо рівняння $a_0\operatorname{tg}^n x + a_1\operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0$, рівносильне даному.

б) $a_0 = 0$. Тоді $\cos x(a_1\sin^{n-1} x + a_2\sin^{n-2} x\cos x + \ldots + a_n\cos^{n-1} x) = 0$. Рівняння розпадається на два: $\cos x = 0$ і $a_1\sin^{n-1} x + a_2\sin^{n-2} x\cos x + \ldots + a_n\cos^{n-1} x = 0$. Друге з цих рівнянь розглянуто у першому випадку.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $4\sin^2 x - 3\sin 2x - \cos^2 x = 0$.

* Враховуючи, що $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, маємо $4\sin^2 x - 6\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Ми одержали однорідне рівняння. Ділимо обидві частини на $\cos^2 x \neq 0$: $4\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{4},\ x = \operatorname{arctg}\frac{3 \pm \sqrt{13}}{4} + \pi k.$$

Відповідь: $x = \operatorname{arctg}\frac{3 \pm \sqrt{13}}{4} + \pi k.$ *

2. Розв'язати рівняння $6\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x = 2.$

* Застосовуючи тригонометричну одиницю, маємо $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$, $4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Розділимо обидві частини на $\cos^2 x \neq 0$: $4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0$. $\operatorname{tg} x = -1$ або $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ або $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n$. Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n$. *

3. Розв'язати рівняння

$2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

* Розділимо обидві частини на $\cos^3 x \neq 0$: $2\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$. Покладаємо $\operatorname{tg} x = y$, $2y^3 - y^2 + 2y - 1 = 0$, $(2y - 1)(y^2 + 1) = 0$, $y = \frac{1}{2}$. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$. Відповідь: $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$. *

4. Розв'язати рівняння

$\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 2$.

* Застосуємо тригонометричну одиницю $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$, $\cos^2 x + 3\sin x\cos x = 0$, $\cos x(\cos x + 3\sin x) = 0$.

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; 2) $\cos x + 3\sin x = 0$,

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3},\ x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k.$$ Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi k - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. *

5.6. Розглянемо тригонометричні рівняння, які розв'язують за допомогою перетворення добутку функцій на суму та формул зниження степеня.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$

* Згідно з формулою $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$ маємо $\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 12x) = 0$, $\cos 2x - \cos 12x = 0$. Тепер згідно з формулою $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ одержуємо $2\sin 7x \sin 5x = 0$. Маємо два випадки:

1) $\sin 7x = 0$, $x = \frac{\pi k}{7}$; 2) $\sin 5x = 0$, $x = \frac{\pi n}{5}$.

Ми одержали дві множини розв'язків. З'ясуємо, чи є в цих множинах спільні елементи; $\frac{\pi k}{7} = \frac{\pi n}{5}$, $5k = 7n$. Зрозуміло, що ціле число n ділиться на 5, отже, $n = 5t$ і $k = 7t$.

Відповідь: $x = \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi n}{5}$, де $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 5t$, $t \in \mathbf{Z}$. *

Зауваження. Відповідь можна подати і в такій формі: $x = \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi n}{5}$, де $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 7t$, $t \in \mathbf{Z}$. *

2. Розв'язати рівняння

$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$

* Застосуємо формулу зниження степеня $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = 2,$$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$, $2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 0$,

$2\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0$, $4\cos x \cos 2x \cos 5x = 0$.

Маємо три випадки:

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; 2) $\cos 2x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; 3) $\cos 5x = 0$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$. Ми одержали три множини розв'язків.

а) $\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $2 + 4n = 1 + 2k$. Ліва частина останньої рівності — парне ціле число, а права — непарне. Розв'язків немає. Перша і друга множини розв'язків не мають спільних елементів.

б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$, $5 + 10k = 2 + 4m$. Знову немає розв'язків, бо ліва частина останньої рівності — непарне число, а права — парне. Отже, друга і третя множини не мають спільних елементів.

в) $\frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$, $5 + 10n = 1 + 2m$, $2 + 5n = m$. Перша множина є підмножиною третьої.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$. *

3. Розв'язати рівняння $\cos 3x \cos 2x - \sin x \sin 6x = \cos 7x$.

$* \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cos 5x - \cos 7x) = \cos 7x,$

$\cos x - \cos 7x = 0, 2\sin 4x \sin 3x = 0.$

Ми одержали дві множини розв'язків:

1) $\sin 4x = 0, x = \frac{\pi k}{4}$; 2) $\sin 3x = 0, x = \frac{\pi n}{3}$.

З'ясуємо, чи мають ці множини спільні елементи $\frac{\pi k}{4} = \frac{\pi n}{3}$, $3k = 4n$. Звідси маємо, що $n = 3t$, $k = 4t, t \in Z$. Відповідь: $x = \frac{\pi k}{4}$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $k, n \in Z, n \neq 3t, t \in Z$. *

4. Розв'язати рівняння $8\cos^6 x = 3\cos 4x + \cos 2x + 4$.

$* (2\cos^2 x)^3 = 3(2\cos^2 2x - 1) + \cos 2x + 4,$

$(1 + \cos 2x)^3 = 6\cos^2 2x + \cos 2x + 1,$

$1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x = 6\cos^2 2x + \cos 2x + 1,$

$\cos^3 2x - 3\cos^2 2x + 2\cos 2x = 0,$

$\cos 2x(\cos^2 2x - 3\cos 2x + 2) = 0,$

$\cos 2x(\cos 2x - 1)(\cos 2x - 2) = 0.$

Розглянемо три випадки:

1) $\cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; 2) $\cos 2x = 1, x = \pi n,$

3) $\cos 2x = 2$. Немає розв'язків. Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \pi n$. *

Доведіть самостійно, що одержані дві множини розв'язків не мають спільних елементів.

5.7. Розглянемо рівняння, які розв'язують за допомогою універсальних підстановок.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 - \cos x$.

$*$ Нехай $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$. Маємо $y = 1 - \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$, $y^3 - 2y^2 + y = 0$, $y(y - 1)^2 = 0$, $y = 0$ або $y = 1$.

Розглянемо два випадки:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0, x = 2\pi n$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Нагадаємо, що роблячи підстановку $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, треба перевірити, чи не є розв'язками рівняння числа виду $x = \pi + 2\pi m$. Відповідь: $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. *

2. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg} x - 2\sin 2x = 1$.

$*$ Нехай $\operatorname{tg} x = y$. Числа виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ не є розв'язками рівняння. Далі маємо

$\frac{1}{y} - \frac{4y}{1 + y^2} = 1, y^3 + 3y^2 + y - 1 = 0, (y + 1)(y^2 + 2y - 1) = 0.$

Маємо два випадки:

1) $y=-1$, $\operatorname{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi m$:

2) $y=-1\pm\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}x=-1\pm\sqrt{2}$, $x=\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+\pi n$.

Відповідь: $x=\pi m-\frac{\pi}{4}$, $x=\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{2}\right)+\pi n$. *

3. Розв'язати рівняння $\sin x + 5\cos x + 6\cos 2x + 1 = 0$.

* Нехай $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y$. Числа виду $x = \pi + 2\pi n$ не є розв'язками даного рівняння. Рівняння набуває вигляду

$$\frac{2y}{1+y^2}+5\frac{1-y^2}{1+y^2}+6\left(1-2\cdot\frac{4y^2}{\left(1+y^2\right)^2}\right)+1=0,\quad y^4+y^3-17y^2+y+6=0,$$

$(y^2 - 3y - 2)(y^2 + 4y - 3) = 0$.

Маємо два випадки:

1) $y^2-3y-2=0$, $y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, звідки $x=2\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}+2\pi k$;

2) $y^2+4y-3=0$, $y=-2\pm\sqrt{7}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, звідки $x=2\operatorname{arctg}\left(-2\pm\sqrt{7}\right)+2\pi n$.

Відповідь: $x=2\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}+2\pi k$, $x=2\operatorname{arctg}\left(-2\pm\sqrt{7}\right)+2\pi n$.

5.8. Розглянемо рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$.

Застосуємо формули подвійного аргументу і тригонометричну одиницю, прийдемо до однорідного рівняння

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння $3\sin x - 4\cos x = 5$.

$$* \quad 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=5\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right),$$

$$\sin^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+9\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-6\operatorname{tg}\frac{x}{2}+9=0,\quad\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right)^2=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3,\quad x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n.$$

Відповідь: $x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi n$. *

2. Розв'язати рівняння $4\sin x + \cos x = 4$.

* $8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=4\sin^2\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}$,

$5\sin^2\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\cos^2\frac{x}{2}=0.$

Розділимо обидві частини рівняння на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$:

$5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3=0,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$ або $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{5}$.

Маємо два випадки:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{5},\ x=2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+2\pi n$.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+2\pi n$. *

5.9. Розглянемо рівняння, які розв'язують за допомогою методу підстановки.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

* Покладемо $\sin x + \cos x = y$. Тоді $y^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ і $\sin x \cos x = \frac{y^2-1}{2}$. Рівняння набуває вигляду $y+\frac{y^2-1}{2}=1,\ y^2+2y-3=0,\ y=1$ або $y=-3$.

Розглянемо два випадки:

1) $\sin x + \cos x = 1,\ \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$;

2) $\sin x + \cos x = -3$. Розв'язків немає.

Відповідь: $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. *

Зауваження. За допомогою числового кола відповідь можна записати інакше: $x = 2\pi k$. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

2. Розв'язати рівняння $\sin x \cos x - 6(\sin x - \cos x) + 6 = 0$.

* Покладемо $\sin x - \cos x = y$. Тоді $y^2 = 1 - 2\sin x \cos x$, $\sin x \cos x = \frac{1-y^2}{2}$. Рівняння набуває вигляду $\frac{1-y^2}{2}-6y+6=0,\ y^2+12y-13=0, y=1$ або $y=-13$.

Маємо два випадки:

1) $\sin x - \cos x = 1,\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$;

2) $\sin x - \cos x = -13$. Розв'язків немає.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. *

5.10. Розглянемо ще декілька тригонометричних рівнянь.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\dfrac{\cos 3x}{\sin 3x - 2\sin x} = \operatorname{tg} x$.

* Помітимо, що $\sin 3x - 2\sin x = \sin 3x - \sin x - \sin x = 2\cos 2x \sin x - \sin x = \sin x(2\cos 2x - 1)$.

Запишемо дане рівняння так: $\dfrac{\cos 3x}{\sin x\left(2\cos 2x - 1\right)} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Маємо систему $\begin{cases} \cos 3x \cos x = \sin^2 x\left(2\cos 2x - 1\right), \\ \sin x \cos x\left(2\cos 2x - 1\right) \neq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 2x\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)\left(2\cos 2x - 1\right), \\ \sin x \cos x\left(2\cos 2x - 1\right) \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = \left(1 - \cos 2x\right)\left(2\cos 2x - 1\right), \\ \sin x \cos x\left(2\cos 2x - 1\right) \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(2\cos 2x - 1\right)\left(\cos 2x + 1\right) = \left(1 - \cos 2x\right)\left(2\cos 2x - 1\right), \\ \sin x \cos x\left(2\cos 2x - 1\right) \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x + 1 = 1 - \cos 2x, \\ \sin x \cos x\left(2\cos 2x - 1\right) \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin x \cos x\left(2\cos 2x - 1\right) \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \\ \sin x \cos x\left(2\cos 2x - 1\right) \neq 0, \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$. *

2. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x + 18\,|\operatorname{tg} x| = 0$.

* Покладемо $\operatorname{tg} x = y$ і одержимо рівняння $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1 - y^2}{2y} + 18|y| = 0$, $\dfrac{1 + y^2}{2y} + 18|y| = 0$. Тепер розглянемо два випадки:

1) $\begin{cases} y > 0, \\ \dfrac{1 + y^2}{2y} + 18y = 0, \end{cases}$

розв'язків немає;

2) $\begin{cases} y < 0, \\ \dfrac{1 + y^2}{2y} - 18y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y < 0, \\ 35y^2 = 1, \end{cases} \quad y = -\dfrac{1}{\sqrt{35}}$.

Маємо $\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{35}}$, $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{35}} + \pi k$. Відповідь: $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{35}} + \pi k$. *

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{\dfrac{5}{4} - \cos^2 x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{2} - \sin x$.

* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \frac{5}{4}-\cos^2 x+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)^2, \\ \sin x\le\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin x, \\ \sin x\le\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0, \\ \sin x\le\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{6}=0, \\ \sin x\le\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0. \\ \sin x\le\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pi n-\frac{\pi}{3}. \\ \sin x\le\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Основний період функції $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ дорівнює 2π. На проміжку $[0;\ 2\pi]$ рівняння $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ має два корені: $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$; $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}$, а $\sin\frac{5\pi}{3}<0<\frac{1}{2}$.

Відповідь: $x=\frac{5\pi}{3}+2\pi n$. *

4. Розв'язати рівняння $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x$.

* Подамо рівняння у вигляді

$$\sin^2 x-\sin^2 3x\sin x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=0.$$

Це квадратне рівняння відносно $\sin x$:

$$\sin x=\frac{1}{2}\sin^2 3x\pm\sqrt{\sin^4 3x-\sin^2 3x}. \qquad (П10.1)$$

Для того щоб рівняння мало дійсні розв'язки, необхідно, щоб підкореневий вираз був невід'ємний, тобто $\sin^4 3x-\sin^2 3x\ge 0$, $\sin^2 3x(\sin^2 3x-1)\ge 0$. Ця нерівність виконується лише в двох випадках: $\sin^2 3x=0$ або $\sin^2 3x=1$.

Маємо два випадки:

1) $\sin^2 3x=0$, тоді із (П10.1) $\sin x=0$. $x=k\pi$;

2) $\sin^2 3x=1$, тоді із (П10.1) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Відповідь: $x=k\pi$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. *

5. Знайти всі розв'язки рівняння $\cos 2x=\sin x$, що лежать на проміжку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

* $\cos 2x=\sin x\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=\sin x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1,\\ \sin x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

На проміжку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ лежить єдиний розв'язок рівняння $\sin x=-1$ (це число $\frac{3\pi}{2}$) і два розв'язки рівняння $\sin x=\frac{1}{2}$ (це числа $\frac{\pi}{6}$ та $\frac{5\pi}{6}$). Відповідь: $x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$. *

6. Розв'язати рівняння $\sin^4 x+\cos^4 x=a$.

* Перетворимо ліву частину рівняння: $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

Маємо рівняння $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x=a$. $\cos 4x=4a-3$. Якщо $-1\le 4a-3\le 1$, тобто $\frac{1}{2}\le a\le 1$. то $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi k}{2}$. Якщо $|4a-3|>1$, тобто $a>1$ або $a<\frac{1}{2}$, то розв'язків немає. Відповідь: при $a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi k}{2}$, при $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)$ розв'язків немає. *

5.11. Розглянемо рівняння, які містять обернені тригонометричні функції.

Найпростіші рівняння такого типу мають вид $f(x)=a$, де $f(x)$ — одна з обернених тригонометричних функцій.

1) $\arcsin x=a$. Рівняння має єдиний розв'язок $x=\sin a$ при $|a|\le\frac{\pi}{2}$ і не має розв'язків при $|a|>\frac{\pi}{2}$.

2) $\arccos x=a$. Рівняння має єдиний розв'язок $x=\cos a$ при $0\le a\le\pi$ і не має розв'язків при $a\in(-\infty;0)\cup(\pi;\infty)$.

3) $\operatorname{arctg} x=a$. Рівняння має єдиний розв'язок $x=\operatorname{tg} a$ при $|a|<\frac{\pi}{2}$ і не має розв'язків при $|a|\ge\frac{\pi}{2}$.

4) $\operatorname{arcctg} x=a$. Рівняння має єдиний розв'язок $x=\operatorname{ctg} a$ при $0<a<\pi$ і не має розв'язків при $a\in(-\infty;0]\cup[\pi;\infty)$.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\sin(3\operatorname{arctg} 2x)=1$.

* Маємо $3\operatorname{arctg} 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\operatorname{arctg} 2x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$. Рівняння має розв'язки лише за умови $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}<\frac{\pi}{2}$, тобто $-1<k<\frac{1}{2}$. Оскільки k — ціле число, то $k=0$. При цьому $\operatorname{arctg} 2x=\frac{\pi}{6}$, $2x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Відповідь: $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. *

2. Розв'язати рівняння $\cos(4\arcsin(3x-1)) = 1$.

* Маємо $4\arcsin(3x-1) = 2\pi n$, $\arcsin(3x-1) = \frac{\pi n}{2}$. Рівняння має розв'язки лише за умови $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi n}{2} \le \frac{\pi}{2}$, тобто $-1 \le n \le 1$. Оскільки n — ціле число, то $n \in \{-1; 0; 1\}$. Розглянемо три випадки:

1) $n = -1$, $\arcsin(3x-1) = -\frac{\pi}{2}$, $3x - 1 = -1$, $x = 0$;

2) $n = 0$, $\arcsin(3x-1) = 0$, $3x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{3}$;

3) $n = 1$, $\arcsin(3x-1) = \frac{\pi}{2}$, $3x - 1 = 1$, $x = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $x \in \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. *

У ряді випадків застосовують тотожності, що пов'язують між собою обернені тригонометричні функції.

Приклади

3. Розв'язати рівняння

$$\arcsin\left(x^2 - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arccos\left(x^2 - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

* Враховуючи, що $\arccos a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$, маємо $\arcsin\left(x^2 - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(x^2 - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, звідки $\arcsin\left(x^2 - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ і $x^2 - 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Далі маємо $x^2 - 2x = 0$, $x = 0$ або $x = 2$.

Відповідь: $x \in \{0; 2\}$. *

4. Розв'язати рівняння $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

* Область визначення задається подвійною нерівністю $-1 \le x \le 1$. Якщо $-1 \le x < 0$, то права частина рівняння від'ємна, а ліва — додатна, отже, $0 \le x \le 1$. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos(\arccos x) = \cos(\operatorname{arctg} x), \\ 0 \le x \le 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + x^2 - 1 = 0, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases} \quad x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Відповідь: $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. *

5. Розв'язати рівняння

$$\arcsin(x(x+y)) + \arcsin(y(x+y)) = \pi.$$

* Оскільки $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. дане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \arcsin\big(x(x+y)\big) = \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin\big(y(x+y)\big) = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+y) = 1, \\ y(x+y) = 1. \end{cases}$$

Розділивши перше рівняння останньої системи на друге, маємо $\frac{x}{y} = 1$, $x = y$. Тепер із першого рівняння одержимо $2x^2 = 1$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Система має два розв'язки $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ та $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Відповідь: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. *

5.12. Розглянемо на прикладах розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Приклади

1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

* З першого рівняння системи маємо: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$. Враховуючи друге рівняння, маємо $2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2} = 1$, $\cos\frac{x-y}{2} = 1$, $x - y = 4\pi k$. Тепер маємо систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ x - y = 4\pi k, \end{cases}$$

звідки $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{6} - 2\pi k$.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)$. *

2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

* Додавши рівняння системи, одержимо $\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Віднімаючи від другого рівняння перше, одержимо $\cos(x+y)=0$. Маємо систему

$$\begin{cases}\cos(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x-y=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n.\end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему, одержимо відповідь: $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k+2n);\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k-2n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k+2n);\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k-2n)\right)$. *

3. Розв'язати систему

$$\begin{cases}\sqrt{2-2\cos 2x}=2\cos 2y,\\ \cos x=\sin y.\end{cases}$$

* Відомо, що $\cos 2y = 1-2\sin^2 y$. Враховуючи друге рівняння системи, маємо $\cos 2y = 1-2\cos^2 x = 1-(1+\cos 2x) = -\cos 2x$. Запишемо перше рівняння системи так: $\sqrt{2-2\cos 2x} = -2\cos 2x$. Нехай $-2\cos 2x = t$, тоді

$$\begin{cases}\sqrt{2+t}=t,\\ t\ge 0,\end{cases}\quad\begin{cases}t^2-t-2=0,\\ t\ge 0,\end{cases}\quad t=2.$$

Далі $-2\cos 2x = 2$, $\cos 2x = -1$. Тепер із першого рівняння системи маємо: $\sqrt{2-2(-1)} = 2 = 2\cos 2y$, $\cos 2y = 1$. Ми одержали систему

$$\begin{cases}\cos 2x=-1,\\ \cos 2y=1.\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ y=\pi n.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi m\right)$. *

4. Розв'язати систему

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-\cos 2y=\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x),\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\operatorname{tg}^2 y.\end{cases}$$

* Перетворимо ліву частину першого рівняння: $\frac{1}{2}-\cos 2y=\frac{1}{2}-(1-2\sin^2 y)=-\frac{1}{2}+2\sin^2 y$. Запишемо систему так:

$$\begin{cases}2\sin^2 y-\frac{1}{2}=\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x),\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\operatorname{tg}^2 y,\end{cases}$$

$$\begin{cases}4\sin^2 y-1=(2\sin y-1)(1+2\sin 2x),\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\operatorname{tg}^2 y.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2\sin y-1)(2\sin y-2\sin 2x)=0,\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\operatorname{tg}^2 y.\end{cases}$$

Маємо дві системи

$$1)\ \begin{cases}2\sin y-1=0,\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\operatorname{tg}^2 y,\end{cases}\quad \begin{cases}\sin y=\dfrac{1}{2},\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\dfrac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=2.\end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2$:

$$\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=2.\ \operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x+1=0.\ \operatorname{tg}^2 x=1.\ \operatorname{tg} x=\pm 1.$$

Одержали систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x=\pm 1,\\ \sin y=\dfrac{1}{2},\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n.\end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases}\sin y=\sin 2x,\\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\operatorname{tg}^2 y.\end{cases}$$

Із другого рівняння останньої системи маємо

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{6\sin^2 y}{1-\sin^2 y},\quad \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{6\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x},$$

$$\frac{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x}{\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}=\frac{6\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}.$$

Поклавши $z=\sin^2 2x$, маємо систему

$$\begin{cases}\dfrac{1-\dfrac{1}{2}z}{\dfrac{1}{4}z}=\dfrac{6z}{1-z},\\ z>0,\end{cases}\quad \begin{cases}2z^2+3z-2=0,\\ z>0,\end{cases}\quad z=\frac{1}{2}.$$

Тепер маємо систему

$$\begin{cases}\sin^2 2x=\dfrac{1}{2},\\ \sin y=\sin 2x.\end{cases}$$

Звідси одержуємо дві системи:

$$\text{a)}\ \begin{cases}\sin 2x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}\quad x=(-1)^l\frac{\pi}{8}+\frac{\pi l}{2},\ y=(-1)^m\frac{\pi}{4}+\pi m;$$

б) $\begin{cases} \sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ $x = (-1)^{p+1}\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi p}{2}$, $y = (-1)^{s+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi s$.

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}; (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right), \left((-1)^l \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi l}{2}; (-1)^m \dfrac{\pi}{4} + \pi m\right),$

$\left((-1)^{p+1}\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi p}{2}; (-1)^{s+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi s\right)$. *

Вправи

1. Розв'язати рівняння:

а) $3\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) = 1$; б) $2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

в) $4\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) = 1$: г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 3$.

2. Довести, що рівняння не має розв'язків:

а) $3\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - 2x\right) = \pi$; б) $\sin x + \cos x = 2$; в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 1{,}5$.

Розв'язати рівняння:

3. а) $\cos(\cos x) = 1$; б) $\cos(\sin x) = 0$; в) $\operatorname{tg}(\cos x) = 1$; г) $\operatorname{ctg}(\sin x) = 1$.

4. а) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$; б) $\sin^2\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}^2 x = 1$.

5. а) $\dfrac{1+\cos 2x}{1-\sin x} = 0$; б) $\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x} = 0$; в) $\dfrac{\cos 4x}{1+\sin 4x} = 0$; г) $\dfrac{\sin 4x}{1-\cos 4x} = 0$.

6. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 5x$.

7. а) $\cos 3x + \sin 5x = 2$; б) $\sin 4x \sin 3x = 1$.

8. а) $\sqrt{2}\cos^2 3x - \cos 3x = 0$; б) $\cos 2x + 3\sin x = 2$;

в) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$; г) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$;

д) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$; е) $3\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = 4$.

9. а) $\cos 2x = \cos x - \sin x$; б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

в) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$; г) $\sin x \operatorname{tg} x + 1 = \sin x + \operatorname{tg} x$.

10. а) $3\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x = 2$; б) $2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1$;

в) $\sec x = 4\sin x + 6\cos x$; г) $3\sin^3 x - 4\sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = 0$.

11. а) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$. б) $4\cos x \cdot \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

в) $\sin x \sin 2x + \cos^2 x = \sin 4x \sin 5x + \cos^2 4x$; г) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

12. а) $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$. б) $\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3$; в) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$.

13. а) $3\sin x + 4\cos x = 2$; б) $\sqrt{3}\sin x - 2\cos x = 1$.

14. а) $\sin x - \cos x + \dfrac{5}{2}\sin 2x = 1$; б) $\sin x + \cos x = 2{,}5 + 2{,}5\sin 2x$.

15. а) $\dfrac{\sin 4x}{4\cos x+\cos 3x}=-\sin x$; б) $\sin 3x\cos 3x=\sin 2x$.

16. а) $|\operatorname{ctg} x|=\operatorname{ctg} x+\operatorname{cosec} x$; б) $\left|\operatorname{ctg}\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=\sec^2 2x-1$.

17. а) $4\sin 3x+3=\sqrt{2\sin 3x+2}$; б) $\sqrt{6-\sin x-7\cos^2 x}+\sin x=0$.

18. Знайти розв'язки рівняння:

а) $\cos 2x=\sin x$ на проміжку $[0;\,2\pi]$;

б) $\sin 2x=\cos x$ на проміжку $[0;\,2\pi]$;

в) $\operatorname{tg} x=\cos x$ на проміжку $[0;\,\pi]$;

г) $\operatorname{ctg} x=\sin x$ на проміжку $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язати рівняння

19. $\sin^6 x+\cos^6 x=a$.

20. а) $\operatorname{arctg}(x^2+x+1)=\dfrac{\pi}{4}$; б) $\arccos(1-2x)=\dfrac{\pi}{3}$;

в) $\arcsin(3-4x)=\dfrac{\pi}{6}$; г) $\operatorname{arcctg}(5x+2)=\dfrac{3\pi}{4}$.

21. а) $\cos(4\operatorname{arctg} 3x)=1$; б) $\operatorname{tg}(2\arcsin 3x)=1$.

22. а) $\arcsin\left(3x-x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(3x-x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(x^2-4x)=\operatorname{arcctg}(x^2-4x)$.

23. а) $(\arccos x)^2-6\arccos x+8=0$; б) $\arcsin x=\operatorname{arcctg} x$,

в) $\arccos(x^2+xy+y^2)+\arccos(x^3-y^3)=0$.

24. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3},\\ \operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\sqrt{3};\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=\dfrac{4\pi}{3},\\ \sin x\sin y=\dfrac{3}{4};\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sin x+\sin y=\dfrac{3}{2},\\ \cos x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$ г) $\begin{cases}\cos 2y+\dfrac{1}{2}=\left(\cos y-\dfrac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x),\\ \sin y\left(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x\right)=3\operatorname{ctg}y;\end{cases}$

д) $\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cos y=0,\\ \cos^2 x-\cos 2y=1\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

§ 6. Тригонометричні нерівності

6.1. Найпростіші тригонометричні нерівності — це нерівності виду $f(x)\lessgtr a$, де $f(x)$ — одна з чотирьох функцій: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. (У цьому параграфі n, k, m, p, l тощо означають будь-які цілі числа.)

Розглянемо всі можливі випадки.

1. $\sin x > a$. При $a \geq 1$ розв'язків немає. При $a < -1$ $x \in \mathbf{R}$. При $-1 \leq a < 1$ $2\pi n + \arcsin a < x < 2\pi n + \pi - \arcsin a$. Ці результати можна одержати на числовому колі або використовуючи графік функції $y = \sin x$.

2. $\sin x < a$. При $a > 1$ $x \in \mathbf{R}$. При $a \leq -1$ $x \in \varnothing$. При $-1 < a \leq 1$ $2\pi n + \pi - \arcsin a < x < 2\pi n + 2\pi + \arcsin a$.

3. $\cos x > a$. При $a \geq 1$ $x \in \varnothing$. При $a < -1$ $x \in \mathbf{R}$. При $-1 \leq a < 1$ $2\pi n - \arccos a < x < 2\pi n + \arccos a$.

4. $\cos x < a$. При $a > 1$ $x \in \mathbf{R}$. При $a \leq -1$ $x \in \varnothing$. При $-1 < a \leq 1$ $2\pi n + \arccos a < x < 2\pi n + 2\pi - \arccos a$.

5. $\operatorname{tg} x > a$; $\pi n + \operatorname{arctg} a < x < \pi n + \frac{\pi}{2}$ при $a \in \mathbf{R}$.

6. $\operatorname{tg} x < a$; $\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \pi n + \operatorname{arctg} a$ при $a \in \mathbf{R}$.

7. $\operatorname{ctg} x > a$; $\pi n < x < \pi n + \operatorname{arcctg} a$ при $a \in \mathbf{R}$.

8. $\operatorname{ctg} x < a$; $\pi n + \operatorname{arcctg} a < x < \pi n + \pi$ при $a \in \mathbf{R}$.

Приклади

1. Розв'язати нерівність $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 1$.

$* \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$. Згідно з результатом випадку 2 маємо $2\pi n + \pi - \frac{\pi}{6} < 3x - \frac{\pi}{3} < 2\pi n + 2\pi + \frac{\pi}{6}$.

$\frac{2\pi n}{3} + \frac{7\pi}{18} < x < \frac{2\pi n}{3} + \frac{5\pi}{6}$. *

2. Розв'язати нерівність $4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > 3$.

$* \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > \frac{3}{4}$. Згідно з результатом випадку 5 маємо $\pi n + \operatorname{arctg}\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} - 2x < \pi n + \frac{\pi}{2}$.

$\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. *

3. Розв'язати нерівність $2\cos \pi x > 1$.

$* \cos \pi x > \frac{1}{2}$. Згідно з результатом випадку 3 маємо $2\pi n - \frac{\pi}{3} < \pi x < 2\pi n + \frac{\pi}{3}$,

$2n - \frac{1}{3} < x < 2n + \frac{1}{3}$. *

У ряді випадків тригонометрична нерівність за допомогою підстановки зводиться до найпростішої.

Приклади

4. Розв'язати нерівність $\sin^2 x \geq \cos^2 2x$.

* Скориставшись формулою зниження степеня, одержимо $\frac{1-\cos 2x}{2} \geq \cos^2 2x$, $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 \leq 0$. Покладемо $\cos 2x = y$ і одержимо квадратну нерівність $2y^2 + y - 1 \leq 0$, звідки $-1 \leq y \leq \frac{1}{2}$. Отже, $-1 \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2}$. Ця подвійна нерівність рівносильна нерівності $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$, бо нерівність $-1 \leq \cos 2x$ виконується при $x \in R$. Згідно з результатом випадку 4 маємо

$$2\pi n + \frac{\pi}{3} \leq 2x \leq 2\pi n + 2\pi - \frac{\pi}{3}. \quad \pi n + \frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi n + \frac{5\pi}{6}.$$

Відповідь: $\pi n + \frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi n + \frac{5\pi}{6}$. *

5. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 < 0$.

* Покладемо $\operatorname{tg} x = y$ і одержимо нерівність $y^2 - 4y + 3 < 0$, звідки $1 < y < 3$. Отже, $1 < \operatorname{tg} x < 3$ і $\pi n + \frac{\pi}{4} < x < \pi n + \operatorname{arctg} 3$.

Відповідь: $\pi n + \frac{\pi}{4} < x < \pi n + \operatorname{arctg} 3$. *

6. Розв'язати нерівність $\sin(\cos x) < 0$.

* Покладемо $\cos x = y$ і одержимо нерівність $\sin y < 0$ $2\pi n + \pi < y < 2\pi n + 2\pi$ або $2\pi n + \pi < \cos x < 2\pi n + 2\pi$. Одержана подвійна нерівність має розв'язки лише при $n = -1$. Тоді маємо $-\pi < \cos x < 0$ або $\cos x < 0$;

$$2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < 2\pi k + \frac{3\pi}{2}.$$

Відповідь: $2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < 2\pi k + \frac{3\pi}{2}$. *

7. Розв'язати нерівність $4\sin^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2\sec^2 x > 0$.

* Помножимо обидві частини нерівності на $\cos^2 x$ і одержимо систему

$$\begin{cases} 4\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin x\cos x - 2 > 0. \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Нехай $\sin 2x = y$. тоді $\begin{cases} y^2 + \frac{3}{2}y - 2 > 0. \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} y < \frac{-3-\sqrt{41}}{4} \text{ або } y > \frac{\sqrt{41}-3}{4}, \\ \cos x \neq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin 2x < \frac{-3-\sqrt{41}}{4} \text{ або } \sin 2x > \frac{\sqrt{41}-3}{4}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Нерівність $\sin 2x < \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ не має розв'язків. Отже, маємо систему

$$\begin{cases} \sin 2x > \frac{\sqrt{41}-3}{4}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\pi n + \arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4} < 2x < 2\pi n + \pi - \arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\pi n + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4} < x < \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}$. *

6.2. В більш складних випадках застосовуємо загальний метод розв'язування нерівностей.

Приклади

1. Розв'язати нерівність $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

* Нехай $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$. $D(f(x)) = \mathbf{R}$. Функція парна, періодична з основним періодом 2π. Розв'яжемо дану нерівність при $x \in [0; \pi]$:

$f(x) = 2\cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x\,(2\cos x + 1)$.

На проміжку $[0; \pi]$ функція має три корені: $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{3\pi}{4}$. Складемо табл. 10.3.

Таблиця 10.3

x	$\left[0;\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$
$\cos 2x$	+	–	–	+
$1 + 2\cos x$	+	+	–	–
$f(x)$	+	–	+	–

Із нижнього рядка таблиці, враховуючи парність та періодичність функції $f(x)$, дістанемо відповідь: $x \in \left(2\pi n - \frac{3\pi}{4}; 2\pi n - \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(2\pi n - \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(2\pi n + \frac{2\pi}{3}; 2\pi n + \frac{3\pi}{4}\right)$. *

2. Розв'язати нерівність $\sin 3x < \cos x - \sin x$.

* Маємо $\sin 3x + \sin x - \cos x < 0$, $2\sin 2x \cos x - \cos x < 0$, $\cos x(2\sin 2x - 1) < 0$. Розглянемо функцію $f(x) = \cos x\,(2\sin 2x - 1)$; $D(f(x)) = \mathbf{R}$. Функція періодична з основним періодом 2π. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, що має довжину 2π.

Функція $f(x)$ на цьому проміжку має корені $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}$. Складемо табл. 10.4.

Таблиця 10.4

x	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{12}\right)$	$\left(\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\frac{13\pi}{12}\right)$	$\left(\frac{13\pi}{12};\frac{17\pi}{12}\right)$	$\left(\frac{17\pi}{12};\frac{3\pi}{2}\right)$
$\cos x$	+	+	+	–	–	–
$2\sin 2x - 1$	–	+	–	–	+	–
$f(x)$	–	+	–	+	–	+

Із нижнього рядка таблиці, враховуючи періодичність функції $f(x)$, дістаємо відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12} + 2\pi n; \frac{17\pi}{12} + 2\pi n\right)$. *

6.3. Розглянемо нерівності, що містять обернені тригонометричні функції.

Спочатку наведемо результати розв'язування найпростіших нерівностей такого типу (вони легко одержуються із графіків обернених тригонометричних функцій).

Маємо такі випадки.

1. $\arcsin x > a$. При $a < -\frac{\pi}{2}$ $x \in [-1; 1]$. При $a \geq \frac{\pi}{2}$ розв'язків немає. При $-\frac{\pi}{2} \leq a < \frac{\pi}{2}$ $x \in (\sin a; 1]$.

2. $\arcsin x < a$. При $a > \frac{\pi}{2}$ $x \in [-1; 1]$. При $a \leq -\frac{\pi}{2}$ розв'язків немає. При $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$ $x \in [-1; \sin a)$.

3. $\arccos x > a$. При $a \geq \pi$ розв'язків немає, при $a < 0$ $x \in [-1; 1]$, при $0 \leq a < \pi$, $x \in [-1; \cos a)$.

4. $\arccos x < a$. При $a \leq 0$ розв'язків немає, при $a > \pi$ $x \in [-1; 1]$, при $0 < a \leq \pi$ $x \in (\cos a; 1]$.

5. $\operatorname{arctg} x > a$. При $a \leq -\frac{\pi}{2}$ $x \in \mathbf{R}$; при $a \geq \frac{\pi}{2}$ розв'язків немає; при $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ $x \in (\operatorname{tg} a; \infty)$.

6. $\operatorname{arctg} x < a$. При $a \geq \frac{\pi}{2}$ $x \in \mathbf{R}$; при $a \leq -\frac{\pi}{2}$ розв'язків немає; при $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ $x \in (-\infty; \operatorname{tg} a)$.

7. $\operatorname{arcctg} x > a$. При $a \geq \pi$ розв'язків немає; при $a \leq 0$ $x \in \mathbf{R}$; при $0 < a < \pi$ $x \in (-\infty; \operatorname{ctg} a)$.

8. $\operatorname{arcctg} x < a$. При $a \leq 0$ розв'язків немає; при $a \geq \pi$ $x \in \mathbf{R}$; при $0 < a < \pi$ $x \in (\operatorname{ctg} a; \infty)$.

Приклади

1. Розв'язати нерівність $2\arcsin(3x + 2) > \frac{\pi}{3}$.

* $\arcsin(3x + 2) > \frac{\pi}{6}$. Згідно з випадком 1 маємо $\frac{1}{2} < 3x + 2 \leq 1$ і $-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{3}$. *

2. Розв'язати нерівність $3\operatorname{arctg}(2 - 4x) < \frac{\pi}{2}$.

* $\operatorname{arctg}(2 - 4x) < \frac{\pi}{6}$. Згідно з випадком 6 маємо $2 - 4x < \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, звідки $x > \frac{6 - \sqrt{3}}{12}$. *

3. Розв'язати нерівність $2\arccos x - \arcsin x < 0$.

* Враховуючи, що $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, маємо $2\arccos x - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) < 0$, $\arccos x < \frac{\pi}{6}$.

Далі, згідно з випадком 4 дістаємо $\cos\frac{\pi}{6} < x \leq 1$ або $\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq 1$. Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq 1$. *

4. Розв'язати нерівність $3\operatorname{arctg}(x - 2) - \operatorname{arcctg}(x - 2) > 0$.

* Враховуючи, що $\operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a$, маємо $3\operatorname{arctg}(x-2) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x-2)\right) > 0$,

$\operatorname{arctg}(x-2) > \frac{\pi}{8}$. Згідно з випадком 5 маємо $x - 2 > \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ і $x > 2 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. Відповідь: $x > 2 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. *

5. Розв'язати нерівність $\arcsin(1-x)-2\arcsin x<\frac{\pi}{2}$.

* Маємо $0<\frac{\pi}{2}-\arcsin(1-x)+2\arcsin x$ або

$$0<\arccos(1-x)+2\arcsin x. \qquad (П10.2)$$

Область визначення нерівності знайдемо із системи

$$\begin{cases}-1\le 1-x\le 1,\\ -1\le x\le 1,\end{cases}$$

$0\le x\le 1$. При $x\in(0;\,1]$ обидва доданки правої частини нерівності (П10.2) додатні, отже, нерівність виконується. Відповідь: $x\in(0;\,1]$.

У складніших випадках застосовують загальний метод розв'язування нерівностей.

Приклад

6. Розв'язати нерівність $2\arccos x>\arcsin 2x$.

* $f(x)=2\arccos x-\arcsin 2x>0$. Область визначення функції знайдемо із системи

$$\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ -1\le 2x\le 1,\end{cases}\quad -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2};\ D(f(x))=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right].$$

Із рівняння $2\arccos x=\arcsin 2x$ знайдемо нулі функції; $\cos(2\arccos x)=\cos(\arcsin 2x)$, $2x^2-1=\sqrt{1-4x^2}$, $4x^4-4x^2+1=1-4x^2$, $x=0$. Перевірка не підтверджує, що $x=0$ є коренем рівняння. Отже, дана функція не має нулів. Оскільки вона неперервна, то зберігає знак на всій області визначення; $f(0)=2\arccos 0-\arcsin 0=\pi>0$; $f(x)>0$ на всій області визначення.

Відповідь: $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. *

Вправи

Розв'язати нерівності.

1. а) $2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)>\sqrt{3}$; б) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)<\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>1$; г) $2\sin\left(\frac{\pi}{8}-3x\right)<1$.

2. а) $2\sin^2 x-\sin x-1>0$; б) $\operatorname{ctg}^2 x-5\operatorname{ctg}x+4<0$;
в) $3\cos^2 x-\cos x-2<0$; г) $2\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}x+2>0$.

3. а) $\sin x>\cos x$; б) $\operatorname{tg}x<\operatorname{ctg}x$;
в) $\sin x<\operatorname{tg}x$; г) $\cos x>\operatorname{ctg}x$.

4. а) $\sin(\cos x)<0$; б) $\sin(\sin x)>0$;
в) $\cos(\cos x)>0$; г) $\cos(\sin x)<0$.

5. а) $\sin^4 x+\cos^4 x<\frac{1}{2}$; б) $\sin^6 x+\cos^6 x<\frac{2}{3}$; в) $\sin^8 x+\cos^8 x<\frac{17}{32}$.

6. а) $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x<0$;
б) $\sin^2 x-\sin 2x-3\cos^2 x>0$.

7. а) $\sin x<\sin 3x$; б) $\cos x+\cos 3x>0$; в) $2\sin 2x<5(1+\cos x-\sin x)$.

8. а) $2\arccos(4x-1)<\frac{\pi}{3}$; б) $3\arcsin(2-3x)>\frac{\pi}{2}$;

в) $3\operatorname{arctg}(6x+1)<\frac{\pi}{2}$; г) $\operatorname{arcctg}(3-5x)>\frac{\pi}{2}$.

9. а) $\arccos x<\frac{\pi}{3}+2\arcsin x$; б) $\operatorname{arccgtx}<2\operatorname{arctgx}$.

10. а) $\arcsin(1+x)<\frac{\pi}{2}+2\arcsin x$; б) $\arcsin\sqrt{x-1}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\pi}{2}$.

Відповіді до вправ

§ 1. 3. 1) в другій; 2) в другій; 3) в першій; 4) в другій; 5) в першій; 6) в другій; 7) в четвертій; 8) в другій. **6.** 1) –; 2) –; 3) –; 4) +; 5) –; 6) –; 7) +; 8) +. **7.** а) $\frac{\sqrt{6}}{8}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $-\frac{3}{4}$; г) $\frac{\sqrt{3}+4}{4}$; д) $\frac{2\sqrt{3}}{3}-2$. **8.** $\sqrt{3}-1$. **9.** а) $M=1$, $m=-1$; б) $M=1$, $m=-1$; в) $M=7$, $m=-1$; г) $M=0$, $m=-4$; д) $M=2$, $m=-1$; е) $M=-2$, $m=-4$.

§ 2. 1. а) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sec\alpha=-\frac{4}{\sqrt{15}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{15}$, $\operatorname{cosec}\alpha=-4$; б) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sec\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cosec}\alpha=\sqrt{5}$. **2.** а) 1; б) $\sin^2\alpha$; в) 1; г) 1; д) 0; е) $2\operatorname{tg}\alpha$. **4.** 1. **5.** $\frac{1}{2}m(3-m^2)$. **6.** $a^2-b^2=4$.

§ 3. 1. а) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; в) $2+\sqrt{3}$; г) $2+\sqrt{3}$. **2.** а) $-\frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{10}}$; б) $-\frac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{10}}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; **4.** 12. **5.** а) 1; б) $\operatorname{tg}\beta$. **7.** а) $-\sin 40°$; б) $\sin 10°$; в) $-\operatorname{tg}12°$; г) $\operatorname{ctg}10°$; д) $\sin(2\pi-6)$; е) $\cos(4\pi-11)$; с) $-\operatorname{tg}(4-\pi)$; ж) $\operatorname{ctg}(7-2\pi)$. **8.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) –1. **9.** а) 2; б) 1. **10.** а) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$; б) $4\sqrt{5}$; в) $\frac{1-4\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$; г) $-\frac{\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{18}$. **13.** Ні. **14.** $-\frac{3}{2}$. **15.** $2\frac{29}{44}$. **16.** $-\frac{9\sqrt{21}}{125}$. **17.** $\frac{8}{9}$. **18.** 4. **22.** $-\frac{386}{289}$. **24.** $\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}$; $\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}$; $\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{5-\sqrt{21}}}$; $\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{5+\sqrt{21}}}$; **28.** а) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; б) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; в) $4\sin 2\alpha\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $4\cos\alpha\cos 2{,}5\alpha\cos 0{,}5\alpha$.

§ 4. 3. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) 2π; е) π. **4.** а) 60π; б) 60π. **5.** а) π; б) π; в) π; г) π. **7.** а) $\frac{2\pi k}{3}-\frac{\pi}{18}<x<\frac{2\pi k}{3}+\frac{5\pi}{18}$; б) $\frac{\pi}{8}+\pi k<x<\frac{5\pi}{8}+\pi k$; в) $\frac{\pi k}{4}-\frac{3\pi}{32}<x<\frac{\pi k}{4}+\frac{5\pi}{32}$; г) $\frac{\pi k}{5}+\frac{\pi}{20}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{5}$. **8.** а) $\frac{2\pi k}{5}+\frac{2\pi}{15}<x<\frac{2\pi k}{5}+\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi k}{3}+\frac{\pi}{21}<x<\frac{2\pi k}{3}+\frac{8\pi}{21}$;

в) $\frac{\pi k}{2}-\frac{3\pi}{20}<x<\frac{\pi k}{2}+\frac{7\pi}{20}$; г) $\frac{\pi k}{4}+\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi k}{4}+\frac{\pi}{3}$. **9.** а) $-\frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{7\pi}{12}$. **10.** а) $\frac{2}{\sqrt{21}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{8}}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **11.** а) $\frac{2\sqrt{2}-3}{3\sqrt{10}}$; б) $-\frac{3\sqrt{11}+2}{10\sqrt{5}}$; в) $\frac{2-\sqrt{315}}{2\sqrt{15}+\sqrt{21}}$; г) $\frac{1+5\sqrt{15}}{\sqrt{15}-5}$. **12.** а) $-\frac{10\sqrt{2}}{27}$; б) $-\frac{4}{\sqrt{5}}$; в) $-3\sqrt{7}$; г) $\frac{7}{24}$. **13.** а) $\sqrt{\frac{1}{6}}$; б) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$; в) $\frac{1}{4+\sqrt{17}}$; г) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **14.** а) $\left[-\frac{2}{3};0\right]\cup\left[\frac{1}{3};1\right]$; б) $[-2;-1]\cup[0;1]$; в) $[0;\infty)$.

§ 5. 1. а) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\cdot(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{2}$; б) $x=-\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$; в) $x=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\frac{k\pi}{3}$; г) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$. **3.** а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) розв'язків немає; в) $x=\pm\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi n$; г) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi n$. **4.** а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$; б) $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$; в) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$. **5.** а) $x=2\pi n-\frac{\pi}{2}$; б) $x=\pi+2\pi n$; в) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; г) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **6.** $x=\frac{1}{3}\pi n$. **7.** а) $x=\frac{2\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$; б) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7}$. **8.** а) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}$; б) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; в) $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$; г) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+m\pi$; д) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; е) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}3+\pi n$. **9.** а) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $x=2\pi n$; б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{2}{5}\pi m$; в) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$; г) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. **10.** а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}3+\pi k$; б) $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$; в) $x=\pi k-\frac{\pi}{4}$, $x=\operatorname{arctg}5+\pi m$; г) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$. **11.** а) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi l}{3}$, $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $l,n\in\mathbb{Z}$, $l\neq 3t+1$, $t\in\mathbb{Z}$; б) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$; в) $x=2\pi t$, $x=\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi m}{11}$, $m,n,t\in\mathbb{Z}$, $n\neq 6l-3$, $n\neq 6l$, $l\in\mathbb{Z}$; г) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **12.** а) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$; б) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$; в) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. **13.** а) $x=2\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}+2\pi k$; б) $x=2\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\pm\sqrt{6}\right)+2\pi k$. **14.** а) $x=\pi+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}\frac{-5\pm\sqrt{41}}{8}+2\pi m$; б) $x=\pi k-\frac{\pi}{4}$, $x=2\operatorname{arctg}\frac{5\pm\sqrt{46}}{7}+2\pi n$. **15.** а) $x=\frac{\pi n}{3}$; б) $x=\frac{\pi k}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **16.** а) $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; б) $x=\frac{\pi k}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **17.** а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$; б) $x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi k$. **18.** а) $x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$;

б) $x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$; в) $x\in\left\{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2};\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$; г) $x\in\left\{-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2};\right.$

$\left.\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$. **19.** При $a\in\left[\frac{1}{4};1\right]$ $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{\pi k}{2}$, при $a\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;\infty\right)$ розв'язків немає. **20.** а) $x\in\{-1;0\}$; б) $x=\frac{1}{4}$; в) $x=\frac{5}{8}$; г) $x=-\frac{3}{5}$. **21.** а) $x=0$; б) $x\in\left\{-\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{8};\right.$

$\left.\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{8}\right\}$. **22.** а) $x\in\{0;3\}$; б) $x=2\pm\sqrt{5}$. **23.** а) $x=\cos 2$; б) $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; в) (1;0), (0;-1).

24. а) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; б) $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{2}{3}\pi-\pi n\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\right.$

$\left.\frac{\pi}{3}\mp\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$; г) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$; д) $\left(\pi n;\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi k\right)$, $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.

§ 6. 1. а) $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{24}<x<\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{\pi k}{3}<x<\frac{\pi k}{3}+\frac{2\pi}{9}$; в) $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{10}<x<\frac{\pi k}{2}+\frac{9\pi}{40}$;

г) $\frac{2\pi n}{3}-\frac{49\pi}{72}<x<\frac{2\pi n}{3}-\frac{17\pi}{72}$. **2.** а) $2\pi k-\frac{5\pi}{6}<x<2\pi k-\frac{\pi}{6}$; б) $\pi k+\operatorname{arcctg}4<x<\pi k+\frac{\pi}{4}$;

в) $2\pi n<x<2\pi n+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k<x<2\pi k$; г) $\pi n-\frac{\pi}{2}<x<\pi n+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

$\pi n+\operatorname{arctg}2<x<\pi n+\frac{\pi}{2}$. **3.** а) $2\pi n+\frac{\pi}{4}<x<2\pi n+\frac{5\pi}{4}$; б) $x\in\left(\pi n-\frac{\pi}{2};\pi n-\frac{\pi}{4}\right)\cup$

$\cup\left(\pi n;\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\pi n<x<\pi n+\frac{\pi}{2}$; г) $\pi n+\frac{\pi}{2}<x<\pi n+\pi$. **4.** а) $2\pi n+\frac{\pi}{2}<x<2\pi n+\frac{3\pi}{2}$;

б) $2\pi n<x<\pi+2\pi n$; в) $x\in\mathbf{R}$; г) $x\in\varnothing$. **5.** а) $x\in\varnothing$. б) $\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}<x<\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{2}-$

$-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}$; в) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **6.** а) $\pi n+\frac{\pi}{4}<x<\pi n+\operatorname{arctg}2$; б) $\pi n-\frac{\pi}{2}\le x<\pi n-\frac{\pi}{4}$,

$\pi n+\operatorname{arctg}3<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$. **7.** а) $x\in\left(2\pi n;2\pi n+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(2\pi n+\frac{3\pi}{4};2\pi n+\pi\right)\cup\left(2\pi n+\frac{5\pi}{4};2\pi n+\right.$

$\left.+\frac{7\pi}{4}\right)$; б) $x\in\left(2\pi n-\frac{\pi}{4};2\pi n+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi n+\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(2\pi n+\frac{5\pi}{4};2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $2\pi n-$

$-\pi<x<2\pi n+\frac{\pi}{2}$. **8.** а) $\frac{2+\sqrt{3}}{8}<x\le\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{2}$; в) $x<\frac{1}{18}\left(\sqrt{3}-3\right)$; г) $x>\frac{3}{5}$.

9. а) $\sin\frac{\pi}{18}<x\le 1$; б) $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$. **10.** а) $-\frac{1}{2}<x<0$; б) $1<x\le 2$.

Тема 11. ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ГРАНИЦІ

§ 1. Метод математичної індукції. Числова послідовність, її границя

1.1. В основі методу математичної індукції лежить такий принцип. Деяке твердження справедливе при будь-якому натуральному n, якщо: 1) воно справедливе при $n=1$, 2) із справедливості цього твердження при $n = k$ випливає його справедливість при $n = k + 1$.

Приклади

Довести, що при будь-якому $n \in \mathbf{N}$ виконується рівність.

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

* 1) При $n=1$ маємо $1=\dfrac{1\cdot 2}{2}$, що справедливо. 2) Нехай $1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. тоді $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, що завершує доведення. *

2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

* 1) При $n=1$ маємо $1^2 = \dfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, що справедливо. 2) Нехай $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 =$

$= \dfrac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$, тоді $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 =$

$= \dfrac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) = \dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$,

що завершує доведення. *

3. Довести, що при $n \in \mathbf{N}$ та $a \geq -1$ виконується нерівність Бернуллі $(1+a)^n \geq 1 + na$.

* 1) При $n=1$ маємо $1 + a \geq 1 + a$, що справедливо. 2) Нехай $(1+a)^k \geq 1 + ka$. тоді $(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$, що завершує доведення. *

4. Довести нерівність Коші

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \; a_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

* Якщо хоч одне із чисел a_i дорівнює нулю, то права частина нерівності дорівнює нулю і нерівність виконується. Вважатимемо, що $a_i > 0$. Нехай $G_m = \sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_m}$. $G_1 = a_1$. Помітимо, що

$$a_{m+1} = G_{m+1}^{m+1} : G_m^m = G_m \left(\frac{G_{m+1}}{G_m}\right)^{m+1} = G_m \left(1 + \left(\frac{G_{m+1}}{G_m} - 1\right)\right)^{m+1}.$$

Згідно з нерівністю Бернуллі маємо

$$a_{m+1} \geq G_m\left(1+(m+1)\left(\frac{G_{m+1}}{G_m}-1\right)\right) = G_m + (m+1)G_{m+1} - (m+1)G_m = (m+1)G_{m+1} - mG_m. \quad (\text{П11.1})$$

1) Для $n = 1$ нерівність Коші має вигляд $a_1 = a_1$, що справедливо. 2) Нехай ця нерівність справедлива для $n = m: \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq G_m$, звідки $a_1 + a_2 + ... + a_m \geq m\,G_m$. Додавши почленно до цієї нерівності нерівність (П11.1), маємо $a_1 + a_2 + ... + a_m + a_{m+1} \geq (m+1)\,G_{m+1}$, або $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{m+1}}{m+1} \geq G_{m+1}$, що завершує індуктивне доведення. Рівність досягається лише при $a_1 = a_2 = ... = a_n$. *

5. Довести, що при $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|\sin nx| \leq n|\sin x|$.

* 1) При $n = 1$ маємо $|\sin x| \leq |\sin x|$, що справедливо.

2) Нехай $|\sin kx| \leq k|\sin x|$, тоді

$$|\sin(k+1)x| = |\sin kx\cos x + \cos kx \sin x| \leq |\sin kx \cos x| + |\cos kx \sin x| \leq |\sin kx| + |\sin x| \leq k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|,$$

що завершує доведення. *

1.2. *Нескінченна послідовність — це функція з областю визначення* **N**. Якщо ця функція числова, то послідовність називається *нескінченною числовою послідовністю.* Значення $f(n)$, відповідне натуральному числу n, називається n-м членом послідовності. Замість $f(n)$ іноді пишуть a_n, x_n тощо.

Приклади числових послідовностей: 1) $f(n) = \dfrac{2n+1}{3n+2}$, звідки $f(1) = \dfrac{3}{5}$, $f(2) = \dfrac{5}{8}$, ..., $f(100) = \dfrac{201}{302}$, ... 2) $a_n = 1 + (-1)^n$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, ..., взагалі $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = 2$.

Як функцію числову послідовність можна задати різними способами. Формула, яка задає числову послідовність, називається *формулою n-го (або загального) члена.* Саму числову послідовність позначатимемо так: (a_n).

Один із поширених способів задання числової послідовності — *рекурентний.* Він дає змогу виразити будь-який член, починаючи з деякого, через попередні. Наприклад: нехай $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$, тоді $a_2 = 3a_1 - 1 = 2$, $a_3 = 3a_2 - 1 = 5$, $a_4 = 3a_3 - 1 = 14$, ..., тобто всі члени послідовності, починаючи з другого, можна виразити через попередні (адже, щоб знайти будь-який член послідовності, треба знати всі попередні). Доведемо за допомогою методу математичної індукції, що цю послідовність можна задати такою формулою n-го члена: $a_n = \dfrac{1}{2}\left(3^{n-1} + 1\right)$.

1) При $n = 1$ маємо $a_1 = \dfrac{1}{2}\left(3^0 + 1\right) = 1$, що справедливо.

2) Нехай $a_m=\frac{1}{2}\left(3^{m-1}+1\right)$, тоді $a_{m+1}=3a_m-1=\frac{3}{2}\left(3^{m-1}+1\right)-1=\frac{1}{2}\left(3^m+1\right)$, що завершує доведення.

Наприклад, нехай $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$, тоді маємо $a_3=3a_2-a_1=3\cdot1-1=2$, $a_4=3a_3-a_2=5$, $a_5=3a_4-a_3=13$, ...

Якщо послідовність має скінченну кількість членів, вона називається *скінченною*. Наприклад, скінченною є послідовність двоцифрових чисел: 10, 11, 12, ... , 99. Вона складається із 90 елементів.

Числову послідовність можна зобразити *графічно*. Якщо на осі Ox відкладемо числа 1, 2, ... , n, ... , а на осі Oy — відповідні значення членів послідовності a_1, a_2, ... , a_n, ... , то послідовність зобразиться у вигляді множини точок $T(n, a_n)$ координатної площини. Наприклад, послідовності, задані формулами $a_n=\frac{n}{n+1}$, $a_n=(-1)^n n$, $a_n=1+(-1)^n$, показано відповідно на рис. 11.1, 11.2, 11.3.

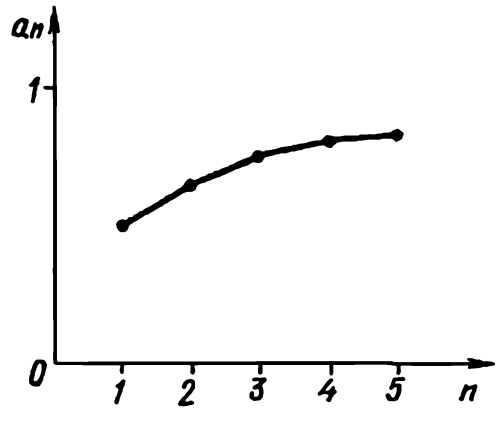


Рис. 11.1

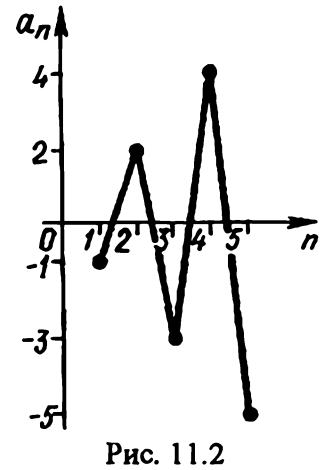


Рис. 11.2

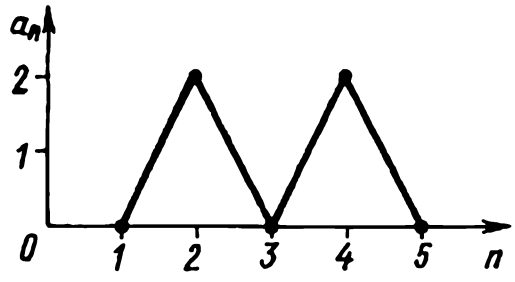


Рис. 11.3

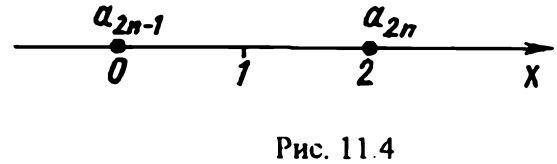


Рис. 11.4

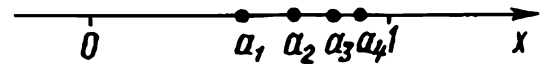


Рис. 11.5

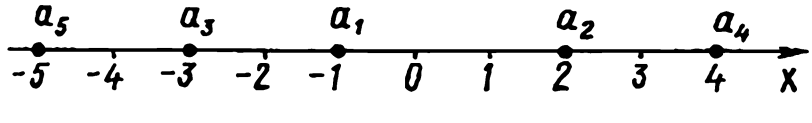


Рис. 11.6

Можна також зобразити числову послідовність *на числовій прямій*, для чого достатньо на ній відмітити точками значення $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Так, на рис. 11.4, 11.5, 11.6 показано на числовій прямій відповідно ті самі послідовності, що й на рис. 11.3, 11.1, 11.2.

Послідовність називається *зростаючою*, якщо для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$.

Послідовність називається *спадною*, якщо для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $a_n > a_{n+1}$.

Зростаючі і спадні послідовності називаються *монотонними*. Наприклад, послідовність, задана формулою $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, є монотонною, оскільки різниця $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$, тобто $a_n < a_{n+1}$ при будь-якому $n \in \mathbf{N}$. Отже, ця послідовність зростає.

Послідовність із загальним членом $a_n = 1 + (-1)^n$ не є монотонною, бо $a_1 < a_2$ і $a_2 > a_3$.

Послідовність називається *обмеженою зверху*, якщо існує число M таке, що $a_n \le M$ при $n \in \mathbf{N}$.

Послідовність називається *обмеженою знизу*, якщо існує число m таке, що $a_n \ge m$ при $n \in \mathbf{N}$. Наприклад, послідовність $a_n = n$ обмежена знизу, але не обмежена зверху; послідовність $a_n = (-1)^n \cdot n$ не обмежена ні зверху, ні знизу.

Послідовність називається *обмеженою*, якщо вона одночасно обмежена і зверху, і знизу, тобто існують числа m та M такі, що $m \le a_n \le M$ для $n \in \mathbf{N}$.

Приклади

1. Дослідити на монотонність послідовність, задану рекурентно:

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 2.$$

* За допомогою методу математичної індукції доведемо, що $a_n < 4$ при $n \in \mathbf{N}$:

1) $a_1 = 3 < 4$;

2) нехай $a_m < 4$, тоді $a_{m+1} = \dfrac{1}{2} a_m + 2 < \dfrac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 4$. що завершує доведення.

Оскільки $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} a_n + 2$. то $a_{n+1} - a_n = 2 - \dfrac{1}{2} a_n > 2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 0$. отже. $a_{n+1} > a_n$. $n \in \mathbf{N}$. Послідовність зростає і є обмеженою. *

2. Дослідити послідовність $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ на обмеженість.

* Оскільки $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$. то послідовність обмежена зверху. Вона також обмежена знизу. бо $a_n > 0$. Отже. $0 < a_n < 1$. тобто ця послідовність обмежена. *

3. Дослідити послідовність $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$ на обмеженість.

* Маємо $a_n = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{6n+4}\right) < \dfrac{2}{3}$. Отже, послідовність обмежена зверху. Ця послідовність обмежена, бо $0 < a_n < \dfrac{2}{3}$. *

1.3. Число a називається *границею послідовності* (a_n), якщо для будь-якого додатного числа ε існує натуральне число N таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$. Це записують так: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, або $a_n \to a$. Послідовність, що має границю, називається *збіжною*. Послідовність, що не має границі, називається *розбіжною*.

З'ясуємо *геометричний зміст поняття границі послідовності*. На рис. 11.7 показано ε-окіл числа a — це інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$.

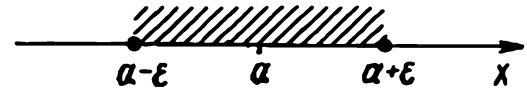


Рис. 11.7

Із нерівності $|a_n - a| < \varepsilon$ випливає подвійна нерівність $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Отже, якщо послідовність прямує до числа a, то яким би малим не був ε-окіл числа a, існує таке натуральне число N, що всі члени a_n з номерами, більшими за N, потрапляють в ε-окіл числа a. Розглянемо послідовність із загальним членом $a_n = \dfrac{1}{n}$ і покажемо, що $a_n \to 0$. Нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ у даному випадку має вигляд $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, або $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, звідки $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Нехай $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ (ціла частина $\dfrac{1}{\varepsilon}$). Якщо $n > N$, то $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, отже, $n \ge \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ і $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Наприклад, якщо $\varepsilon = 0{,}1$, то $N = 10$ і всі члени, починаючи з одинадцятого, потрапляють в ε-окіл нуля. Якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то $N = 100$ і т. д.

Теорема 1. *Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.*

* Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Виберемо $\varepsilon > 0$. За означенням границі послідовності існує число N таке, що при $n > N$ $|a_n - a| < \varepsilon$. Отже, при $n > N$ маємо $|a_n| = |a_n - a + a| \le$

$\le |a_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon$. Позначимо через C найбільше з чисел $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a| + \varepsilon$, тоді $|a_n| \le C$ при $n = 1, 2, \ldots, N$, і $|a_n| \le C$ при $n > N$, отже, $|a_n| \le C$ при $n \in \mathbf{N}$, тобто послідовність обмежена. *

Послідовність $a_n = n$ розбіжна, бо не обмежена. Але не слід думати, що кожна обмежена послідовність збіжна.

Послідовність $a_n = 1 + (-1)^n$ обмежена, бо $0 \le a_n \le 2$. Покажемо, що вона розбіжна. Нехай ця послідовність має границю a. Виберемо $\varepsilon = 0{,}1$. При довільному виборі числа a в ε – окіл цього числа не потрапить хоча б одне з чисел 0; 2. Отже, поза цим околом міститься безліч членів послідовності. Дійшли суперечності.

Теорема 2. *Якщо послідовність збіжна, то вона має лише одну границю.*

* Нехай збіжна послідовність (a_n) має дві границі: a та b. Виберемо $\varepsilon = \frac{1}{10}|a - b|$; ε – околи чисел a та b не мають спільних точок. Поза ε – околом числа a міститься безліч членів послідовності (a_n), які потрапляють в ε – окіл числа b. Ми дійшли суперечності. *

Теорема 3. *Будь-яка обмежена монотонна послідовність збіжна.*

Цю теорему наводимо без доведення.

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то послідовність (a_n) називається *нескінченно малою*. Прикладом нескінченно малої є послідовність $a_n = \frac{1}{n}$.

Теорема 4. *Якщо* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

* Візьмемо довільне додатне число $\frac{\varepsilon}{2}$. Існують натуральні числа N_1, N_2 такі, що $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$.

Нехай N_0 — більше з чисел N_1, N_2, тоді при $n > N_0$ виконуються одночасно ці обидві нерівності. Отже, $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$.

Відомо, що $|x| + |y| \ge |x + y|$, отже, $|a_n - a + b_n - b| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$, звідки $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

Це означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$. *

Наслідок. *Сума скінченного числа нескінченно малих — нескінченно мала.* Наприклад, послідовності $\frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ нескінченно малі.

Теорема 5. *Якщо* (α_n) *нескінченно мала, а* (a_n) *обмежена послідовності, то послідовність* $(\alpha_n a_n)$ *нескінченно мала.*

* Оскільки послідовність (a_n) обмежена, існує додатне число P таке, що $|a_n| \le P$ для $n \in \mathbf{N}$. Виберемо довільне додатне число ε / P, тоді існує натуральне N_0 таке, що при $n > N_0$ $|a_n| \le \varepsilon / P$. Отже, при $n > N_0$ маємо

$|\alpha_n a_n| \le (\varepsilon / P)\ P = \varepsilon$, тобто послідовність $(\alpha_n a_n)$ — нескінченно мала. *

Наслідок. *Добуток скінченного числа нескінченно малих — нескінченно малий.*

Наприклад, послідовність $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^m$, $m \in \mathbf{N}$, нескінченно мала, бо $a_n = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}}_{m}$;

послідовність $a_n = \frac{c}{n}$, $c \in \mathbf{R}$ нескінченно мала, бо стала послідовність (c) обмежена;

послідовність $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ нескінченно мала, бо є добутком обмеженої на нескінченно малу.

Лема (про нескінченно малі). *Для того щоб послідовність (a_n) мала границю a, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $a_n = a + \alpha_n$, де (α_n) — нескінченно мала.*

* Необхідність. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує натуральне N таке, що при $n > N$ $|a_n - a| < \varepsilon$ або $|(a_n - a) - 0| < \varepsilon$. Отже, послідовність $\alpha_n = a_n - a$ нескінченно мала і $a_n = a + \alpha_n$.

Достатність. Нехай $a_n = a + \alpha_n$, де (α_n) — нескінченно мала. Маємо $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} (a + \alpha_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a + \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = a + 0 = a$. *

Теорема 6. *Якщо* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n b_n) = ab$.

* Згідно з лемою $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, де α_n, β_n — нескінченно малі. Отже, $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$. Послідовності $(a\beta_n)$, $(b\alpha_n)$ та $(\alpha_n \beta_n)$ нескінченно малі, отже, послідовність $\alpha\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n = \gamma_n$ нескінченно мала, $a_n b_n = ab + \gamma_n$. Звідси, згідно з лемою, $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n b_n) = ab$. *

Наслідок. *Сталу можна виносити за знак границі.*

Дійсно, $\lim\limits_{n \to \infty} (ca_n) = c \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Маємо на увазі, що (a_n) — збіжна послідовність.

Зокрема, якщо $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = a - b$.

Дійсно, $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \lim\limits_{n \to \infty} (-b_n) = a - b$.

Теорема 7. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Теорема 8 (про три послідовності). *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ і $a_n \le c_n \le b_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

* Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Існує натуральне число m_1 таке, що при $n > m_1$ $a - \varepsilon < a_n$. Існує натуральне число m_2 таке, що при $n > m_2$ $b_n < a + \varepsilon$. Вибравши $m = \max\{m_1, m_2\}$, при $n > m$ маємо $a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$, отже, $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$; $|c_n - a| < \varepsilon$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. *

Наведемо ще *деякі властивості границь:*

1) нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > b$, тоді існує натуральне число m таке, що при $n > m$ $a_n > b$.

* Виберемо $\varepsilon = a - b > 0$. тоді за означенням границі існує натуральне m таке, що при $n > m$ $|a_n - a| < \varepsilon$. $b = a - \varepsilon < a_n$. * Зокрема, якщо $a > 0$, то всі члени послідовності, починаючи з деякого n, додатні;

2) нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < b$, тоді існує натуральне число m таке, що при $n > m$ $a_n < b$;

3) нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ і $a_n < b_n$ при $n \in \mathbf{N}$, тоді $a \le b$.

1.4. *Знаходження границь числових послідовностей* розглянемо на прикладах.

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{2n}$.

* 1-й спосіб. Поділивши чисельник і знаменник дробу на $n \neq 0$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4/n}{2} = \frac{1}{2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

2-й спосіб. Маємо $\frac{n+4}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$. Оскільки $\left(\frac{2}{n}\right)$ нескінченно мала, то згідно з лемою про нескінченно малі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{2n} = \frac{1}{2}$. Відповідь: $\frac{1}{2}$.*

2. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2-1}$.

* Маємо $\frac{n^3}{n^2-1} = \frac{n^3 - n + n}{n^2-1} = n + \frac{n}{n^2-1} > n$ при $n > 1$. Отже, послідовність $\frac{n^3}{n^2-1}$ не обмежена і розбіжна. Відповідь: границі немає. *

3. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$.

* Поділивши чисельник і знаменник дробу на n^2, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n+2}{3n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-1/n+2/n^2}{3+2/n+1/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-1/n+2/n^2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+2/n+1/n^2\right)}=\frac{4}{3}.$$ Відповідь: $\frac{4}{3}$. *

4. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+...+n}{n^2}\right)$.

* Оскільки $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+...+n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. *

5. Довести, що послідовність $\frac{1}{\sqrt{n}}$ нескінченно мала.

* Візьмемо для довільного $\varepsilon>0$ $m=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$, тоді при $n>m$ маємо $n\ge\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1>\frac{1}{\varepsilon^2}$. звідки $\sqrt{n}>\frac{1}{\varepsilon}$ і $\varepsilon>\frac{1}{\sqrt{n}}$. Отже, при $n>m$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. *

6. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

* Перетворимо даний вираз: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(кажуть. що даний вираз поділили і помножили на спряжений).

Отже. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Тепер врахуємо, що $0<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ (див. приклад 5), то за теоремою про три послідовності

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$. Відповідь: 0. *

7. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$ при $-1<q<1$.

* При $q=0$ $q^n=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. Нехай $0<q<1$, тоді послідовність $a_n=q^n$ спадна і обмежена. бо $q^{n+1}<q^n$ і $0<q^n\le q$. Отже. послідовність a_n збіжна. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=a$. Зазначимо. що $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}$. отже, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}q^{n+1}$ або $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=q\cdot\lim\limits_{n\to\infty}q^n$. звідки $a=qa$. $a(1-q)=0$. Оскільки $1-q\ne0$. то $a=0$. тобто $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ при $0<q<1$.

Нехай $-1<q<0$. тоді $0<|q|<1$ і $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$. Отже, для довільного $\varepsilon>0$ існує натуральне m таке, що при $n>m$ $\left||q|^n-0\right|<\varepsilon$ або $\left|q^n\right|<\varepsilon$. а це, в свою чергу, означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$. тобто $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ при $-1<q<1$. Відповідь: 0. *

8. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

* Ця границя відіграє важливу роль в математичному аналізі. Розглянемо послідовність $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$:

$$b_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{(n-1)n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Згідно з нерівністю Бернуллі маємо $b_{n-1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)$.

Легко помітити, що $\frac{n}{n^2-1}>\frac{1}{n}$. отже $b_{n-1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n$. Ми довели, що послідовність b_n спадає. Згідно з нерівністю Бернуллі $b_n>1+\frac{n+1}{n}>2$, тобто $4=b_1\geq b_n>2$. Послідовність b_n монотонна і обмежена, отже, збіжна. Лишається зауважити, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Отже, і послідовність $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ збіжна. *

Знайдену границю позначають буквою e. Отже, $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

Число e ірраціональне. Ось його приблизне значення: $\mathrm{e}\approx 2,71828\ldots$.

Логарифм з основою e називають натуральним логарифмом і позначають $\log_e a=\ln a$.

9. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

* Розглянемо n додатних чисел: $\sqrt{n}.\sqrt{n}.\underbrace{1.1,\ldots,1}_{n-2\text{ числа}}$. Згідно з нерівністю Коші маємо $\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}>\sqrt[n]{n}$. Оскільки $\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$. то $1<\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$. Як відомо, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$. отже, за теоремою про три послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Відповідь: 1. *

10. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$.

* Покажемо, що послідовність $a_n=\dfrac{n}{2^n}$ спадає: $\dfrac{n}{2^n}>\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$. $2n>n+1$. що справедливо при $n>1$. тобто $\dfrac{1}{2}=a_1>a_2>a_3>a_4>\ldots$. Послідовність a_n обмежена, бо $0<a_n\le\dfrac{1}{2}$. і спадна, отже, збігається. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$, або $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2^n}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$

Отже, $a=\dfrac{1}{2}a$ і $a=0$. Відповідь: 0. *

11. Довести. що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$. якщо $a_n\ge 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

* Згідно з лемою про нескінченно малі $a_n=a+\alpha_n$. де $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. отже. $\sqrt{a_n}=\sqrt{a+\alpha_n}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{1+\dfrac{\alpha_n}{a}}=\sqrt{a}\sqrt{1+\gamma_n}$, де $\gamma_n\to 0$. Впевнимось, що при $\gamma_n>-1$ має місце подвійна нерівність $1+\dfrac{\gamma_n}{2+\gamma_n}<\sqrt{1+\gamma_n}<1+\dfrac{1}{2}\gamma_n$. Тоді згідно з теоремою про три послідовності маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\gamma_n}=1$. отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\gamma_n}=\sqrt{a}$. *

12. Послідовність задано рекурентно: $a_1=\sqrt{2}$. $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. Довести. що послідовність a_n збігається. та знайти її границю.

* Покажемо, що $a_n<2$:

1) $a_1=\sqrt{2}<2$;

2) нехай $a_m<2$. тоді $a_{m+1}=\sqrt{2+a_m}<\sqrt{2+2}=2$. отже, $0<a_n<2$. тобто послідовність обмежена. Крім того, вона зростає: $a_{n+1}>a_n$; $\sqrt{2+a_n}>a_n$. $2+a_n>a_n^2$. $(a_n+1)(a_n-2)<0$. що справедливо при $0<a_n<2$. Послідовність a_n збіжна і має границю a. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. маємо

$$\begin{cases}a=\sqrt{a+2},\\ a>0\end{cases},\quad\begin{cases}a^2=a+2,\\ a>0\end{cases}.\qquad a=2.$$

Відповідь: 2. *

§ 2. Прогресії

2.1. *Арифметичною прогресією* називається числова послідовність, у якої різниця між кожним членом, починаючи з другого, і попереднім є сталою величиною.

Отже, арифметичну прогресію можна задати формулою

$$a_{n+1}-a_n=d,\ n\in\mathbf{N}. \tag{11.1}$$

Число d називається *різницею арифметичної прогресії.* Із формули (11.1) послідовно дістаємо: $a_2 - a_1 = d$; $a_3 - a_2 = d$; $a_4 - a_3 = d$; ...; $a_n - a_{n-1} = d$.

Додамо почленно всі ці рівності:

$$a_n - a_1 = d(n-1), \text{ або } a_n = a_1 + d(n-1). \qquad (11.2)$$

Формула (11.2) називається *формулою n-го члена арифметичної прогресії.*

Візьмемо три послідовних члени арифметичної прогресії: a_{m-1}, a_m, a_{m+1} $(m \geq 2)$. Оскільки $a_{m-1} = a_m - d$, $a_{m+1} = a_m + d$, то $a_{m-1} + a_{m+1} = 2a_m$, звідки

$$a_m = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}. \qquad (11.3)$$

Рівність (11.3) називається *характеристичною властивістю* арифметичної прогресії. Нехай деяка послідовність має властивість (11.3), тоді $2a_m = a_{m-1} + a_{m+1}$ і $a_m - a_{m-1} = a_{m+1} - a_m$, звідки при $m = 2, 3, \ldots$ дістаємо $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n$. Отже, дана послідовність за означенням є арифметичною прогресією. Нехай S_n — сума перших n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 + d + \ldots + a_1 + (n-1)d = na_1 + \left(1 + 2 + \ldots + (n-1)\right)d.$$

Із прикладу 1 (тема 11, § 1, п. 1.1) відомо, що $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$.

Тепер маємо

$$S_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n\left(2a_1 + (n-1)d\right)}{2}. \qquad (11.4)$$

Якщо врахувати формулу (11.2) n-го члена арифметичної прогресії, то

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \qquad (11.5)$$

За формулами (11.4), (11.5) підраховують суму перших n членів арифметичної прогресії.

Приклади

1. Розглянемо послідовність $a_n = 4n + 3$. Маємо $a_1 = 7$, $a_2 = 11$, $a_3 = 15$, ..., $a_{n-1} = 4(n+1) + 3 = 4n + 7$. Тепер знайдемо різницю $a_{n+1} - a_n = 4n + 7 - (4n + 3) = 4$. Отже, за означенням дана послідовність — це арифметична прогресія.

2. Дано арифметичну прогресію 2, 5, 8 ... . Знайти сотий член цієї прогресії.

* $a_1 = 2$, $a_2 = 5$. Отже, $d = 5 - 2 = 3$. За формулою (11.2) знайдемо n-й член прогресії:

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1.$$

Далі маємо $a_{100} = 3 \cdot 100 - 1 = 299$. Відповідь: 299. *

3. Відомо два члени арифметичної прогресії: $a_2 = 10$, $a_{11} = 46$. Знайти a_{1000}.

* Використовуючи формулу n-го члена, маємо $a_2 = a_1 + d = 10$; $a_{11} = a_1 + 10d = 46$. Отже, $a_{11} - a_2 = 9d = 46 - 10$, звідки $d = 4$. Далі знаходимо $a_1 = a_2 - d = 10 - 4 = 6$, $a_{1000} = a_1 + 999d = 6 + 999 \cdot 4 = 4002$. Відповідь: 4002. *

4. Відомо два члени арифметичної прогресії: $a_1 = 7$, $a_5 = 19$. Знайти S_{100}.

* Згідно з формулою n-го члена арифметичної прогресії $a_5 = a_1 + 4d$. Отже, $19 = 7 + 4d$, звідки $d = 3$. За формулою (11.4) знаходимо $S_{100} = \frac{100(2a_1 + 99d)}{2} = 50(2 \cdot 7 + 99 \cdot 3) = 15\,550$. Відповідь: 15 550. *

5. Знайти суму всіх тризначних чисел, які діляться на 7.

* Найменше тризначне число, яке ділиться на 7, дорівнює 105, а найбільше — 994. Всі тризначні числа, які діляться на 7, утворюють арифметичну прогресію 105, 112, 119, ..., 994, у якої $a_1 = 105$, $a_n = 994$, $d = 7$. Згідно з формулою n-го члена $994 = 105 + 7(n - 1)$, звідки $n = 128$. Тепер, використовуючи формулу (11.5), знаходимо $S_{128} = \frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70\,336$. Відповідь: 70 336. *

2.2. *Геометричною прогресією* називається числова послідовність відмінних від нуля чисел, у якій частка від ділення будь-якого члена, починаючи з другого, на попередній є сталою величиною.

Геометричну прогресію можна задати формулою

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ q \neq 0,\ n \in \mathbf{N}, \tag{11.6}$$

де q — *знаменник геометричної прогресії.*

Формула n-го члена геометричної прогресії:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{11.7}$$

характеристична властивість:

$$a_m^2 = a_{m-1}\, a_{m+1}. \tag{11.8}$$

Виведемо формулу суми перших n членів геометричної прогресії:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Домноживши обидві частини цієї рівності на $q \neq 0$, маємо $S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n$, звідки $S_n - S_n q = a_1 - a_1 q^n$, або $S_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n)$.

Якщо $q = 1$, то $a_n = a_1$ при $n \in \mathbf{N}$ і, отже, $S_n = n a_1$. Якщо $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}, \tag{11.9}$$

звідки

$$S_n = \frac{a_1 - q a_n}{1 - q}. \tag{11.10}$$

Приклади

1. Послідовність задано формулою $a_n = 3^n$. Маємо $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 27$, ..., $a_{n+1} = 3^{n+1}$. Знаходимо $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$. Отже, за означенням дана послідовність — це геометрична прогресія.

2. Між числами 1 і 81 знайдіть такі три числа, які б разом з даними утворювали геометричну прогресію.

* Нехай a_2, a_3 та a_4, — шукані числа. Маємо геометричну прогресію 1, a_2, a_3, a_4, 81. Згідно з формулою n-го члена $81 = 1 \cdot q^4$, звідки $q = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$. Тепер маємо два випадки: 1) $q = 3$, тоді $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$; 2) $q = -3$, тоді $a_2 = -3$, $a_3 = 9$, $a_4 = -27$. Відповідь: 3; 9; 27 або -3; 9; -27.*

3. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до двох перших чисел додати по 1, а до третього і четвертого — відповідно 4 і 13, то дістанемо арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

* Нехай шукані числа a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, тоді числа $a_1 + 1$, $a_1q + 1$, $a_1q^2 + 4$ та $a_1q^3 + 13$ утворюють арифметичну прогресію. Використовуючи характеристичну властивість арифметичної прогресії, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2(a_1q+1) = a_1 + 1 + a_1q^2 + 4, \\ 2(a_1q^2+4) = a_1q + 1 + a_1q^3 + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(q-1)^2 = -3, \\ a_1q(q-1)^2 = -6. \end{cases}$$

Оскільки $q \neq 1$, поділимо друге рівняння системи на перше і дістанемо $q = 2$. Далі знайдемо, що $a_1 = -3$. Отже, шукані числа –3, –6, –12 та –24. Якщо до перших двох чисел додати по 1, а до третього і четвертого — відповідно 4 і 13, то дістанемо арифметичну прогресію –2, –5, –8, –11. Відповідь: –3, –6, –12, –24.*

2.3. Нескінченна геометрична прогресія, у якої $0 < |q| < 1$, називається *нескінченно спадною геометричною прогресією*, наприклад:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots; -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots;$$

$$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}, \ldots; \sin 10^\circ, \sin^2 10^\circ, \sin^3 10^\circ, \ldots.$$

Внаслідок перетворення звичайного дробу $\frac{2}{9}$ в десятковий дістанемо нескінченний десятковий періодичний дріб 0,222... Розглянемо нескінченно спадну геометричну прогресію 0,2; 0,02; 0,002; ... (тут $a_1 = 0{,}2$, $q = 0{,}1$). Знайдемо суму перших n членів цієї прогресії

$$S_n = 0{,}2\frac{0{,}1^n - 1}{0{,}1 - 1} = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \cdot 0{,}1^n.$$

Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^n = 0$ (див. тему 11, § 1, п. 1.2, приклад 2). Отже, при необмеженому збільшенні n сума S_n стає як завгодно близькою до числа $\frac{2}{9}$. Цей факт відбивається у запису $0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 \ldots = \frac{2}{9}$. Зверніть увагу, що в лівій частині цієї рівності нескінченна кількість доданків. Число $\frac{2}{9}$ називається сумою нескінченно спадної геометричної прогресії.

Означення. *Сумою S нескінченно спадної геометричної прогресії* називається границя, до якої прямує послідовність сум перших n членів цієї прогресії при $n \to \infty$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Використовуючи формулу (11.9), маємо

$$S=\lim_{n\to\infty}a_1\frac{1-q^n}{1-q}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n=\frac{a_1}{1-q},$$

бо $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ при $0<|q|<1$ (див. тему 11, § 1, п. 1.4, приклад 7).

Остаточно дістанемо

$$S=\frac{a_1}{1-q}. \qquad (11.11)$$

Приклади

1. Перетворити нескінченний періодичний десятковий дріб 0,4 (13) у звичайний.

* Згідно з формулою (11.11) маємо 0,4 (13) = 0,41313... = 0,4 + 0,013 + 0,00013 + ... = 0,4 + $\frac{0{,}013}{1-0{,}01}=\frac{4}{10}+\frac{13}{990}=\frac{409}{990}$. Відповідь: $\frac{409}{990}$. *

2. Знайти третій член нескінченно спадної геометричної прогресії, сума якої дорівнює $\frac{8}{5}$, а другий член — $-\frac{1}{2}$.

* Згідно з умовою складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{8}{5},\\[2ex] a_1q=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Поділивши почленно друге рівняння на перше, дістанемо $q(1-q)=-\frac{5}{16}$. Звідси маємо $q_1=-\frac{1}{4}$, $q_2=\frac{5}{4}$. Значення q_2 не підходить, бо $|q_2|>1$, отже, $q=-\frac{1}{4}$. Далі знаходимо $a_1=2$, тобто $a_3=a_1q^2=2\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$. Відповідь: $\frac{1}{8}$. *

3. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x}+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{7}{2} \text{ при } |x|<1.$$

* Додамо по 1 до обох частин рівняння:

$$\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{9}{2}.$$

Ліва частина нового рівняння — це сума нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $a_1=\frac{1}{x}$, $q=x$ (за умовою $|x|<1$). Використовуючи формулу (11.11), маємо

$$\frac{1}{x}:(1-x)=\frac{9}{2},\ 9x^2-9x+2=0,\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\}$.

Вправи

1. Довести методом математичної індукції рівності:

а) $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

б) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$;

в) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$;

г) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

д) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

2. Довести методом математичної індукції нерівності:

а) $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$;

б) $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\le|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$;

в) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\le n$;

г) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$.

3. Знайти перші п'ять членів послідовності та зобразити її графічно: а) $f(n)=\sqrt{n}$;

б) $a_n=\frac{2-n}{n+1}$; в) $x_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$; г) $a_1=1,\ a_n=2a_{n-1}-1$; д) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

4. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{2n+7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n-1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n-n^2}{n^2+10}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3-3n^2+5}{2n^3+n^2-4n}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\ldots+b_m}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$; є) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}$.

5. $a_1=\sqrt{3},\ a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$; довести, що послідовність збіжна і знайти її границю.

6. Дано арифметичну прогресію 2, –1, ... Знайти a_{12}, a_{39} та a_{1000}.

7. Дано арифметичну прогресію, де $a_3 = 10$, $a_{18} = 40$. Знайти формулу n-го члена.

8. В арифметичній прогресії $a_1 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. Знайти S_{19}.

9. Розв'язати рівняння $(x - 1) + (x - 2) + \ldots + (x + 26) = 145$.

10. Скільки всього існує п'ятизначних чисел?

11. Знайти сьомий член геометричної прогресії, якщо $a_2 = 81$, $a_5 = 3$.

12. Дано геометричну прогресію, де $a_2 = 0{,}1$, $a_7 = 1/320$. Знайти формулу n-го члена.

13. Довести, що для геометричної прогресії справедлива рівність $S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

14. В арифметичній прогресії 11 членів. Перший, п'ятий та одинадцятий члени цієї прогресії складають геометричну прогресію. Знайти суму перших шести членів арифметичної прогресії, якщо $a_2 = 27$.

15. Три числа складають геометричну прогресію. Якщо другий член збільшити на 8, то дістанемо арифметичну прогресію. Збільшивши після цього третій член на 64, знову матимемо геометричну прогресію. Знайти ці числа.

16. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5.

17. Розв'язати рівняння $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots = 13/6$, де $|x| < 1$.

18. Перетворити нескінченні періодичні десяткові дроби у звичайні: 0.5 (14); 1. (3); 0.0 (41); 0,81 (4); 3,61 (28); 0.4 (5).

Відповіді до вправ

§ 2. 4. а) $-\frac{1}{2}$; б) немає границі; в) -1; г) 2; д) $\frac{a_0}{b_0}$; е) 0; є) $\frac{1}{2}$; ж) 0; з) 0; и) 0. **5.** $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **6.** -31; -112; -2995. **7.** $2n + 4$. **8.** 1064. **9.** $x = 2$. **10.** 90 000. **11.** 1/3. **12.** $0{,}2 \cdot 2^{1-n}$. **14.** 162 або 189. **15.** 4; 12; 36 або $\frac{4}{9}$; $-\frac{20}{9}$; $-\frac{100}{9}$. **16.** $\frac{1}{3}$. **17.** $x \in \left\{-\frac{7}{9}; \frac{1}{2}\right\}$. **18.** $\frac{509}{990}$; $1\frac{1}{3}$; $\frac{41}{990}$; $\frac{733}{900}$; $3\frac{6067}{9900}$; $\frac{41}{90}$.

Тема 12. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

§ 1. Границя функції

1.1. Число A називається *границею функції* $f(x)$ при x, що прямує до a ($x \neq a$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що із нерівності $|x-a| < \delta$ випливає нерівність $|f(x)-A| < \varepsilon$. Записують це так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. З'ясуємо геометричний зміст цього поняття. Проколотий δ-окіл точки a — це δ-окіл точки a, з якого вилучено точку a, тобто це множина $M = (a-\delta;\ a) \cup (a;\ a+\delta)$. Згідно з означенням для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що як тільки число x попаде в проколотий δ-окіл точки a, то число $f(x)$ попаде в ε-окіл числа A, отже, частина графіка, що відповідає проколотому δ-околу точки a, лежить у смузі між горизонталями $y = A - \varepsilon$ та $y = A + \varepsilon$ (рис. 12.1).

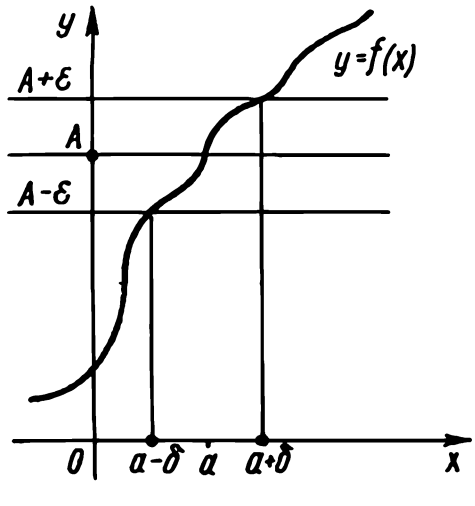


Рис. 12.1

Зауважимо, що значення функції $f(x)$ в самій точці a нас не цікавить, зокрема функція в точці a може бути не визначена.

Наведемо інше рівносильне означення границі функції в точці: число A називається границею функції $f(x)$ при x, що прямує до a, якщо для будь-якої збіжної до a послідовності $\{x_n\}$, всі значення якої відмінні від a, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ прямує до A.

Це означення зводить питання збіжності функції в точці до збіжності деякої числової послідовності, тому природно, що основні властивості границі функції в точці аналогічні властивостям границі числової послідовності.

1.2. *Основні властивості границі* функції в точці такі.

1. Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то існує δ-окіл точки a, в якому функція $f(x)$ обмежена.

2. Якщо функція має границю при $x \to a$, то тільки одну. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Наприклад: $f(x) = x$ при $x \to 0$; $(x-2)^2$ при $x \to 2$.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих при $x \to a$ є нескінченно малою при $x \to a$.

4. Добуток нескінченно малої при $x \to a$ на обмежену є нескінченно малою при $x \to a$.

5. Добуток скінченного числа нескінченно малих при $x \to a$ є нескінченно малою при $x \to a$.

6. ***Основна теорема про нескінченно малі.***

Рівність $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *рівносильна рівності* $f(x)=A+\alpha(x)$, *де* $\alpha(x)$ — *нескінченно мала при* $x\to a$.

7. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то а) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=A+B$, б) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=AB$, в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, $B\neq 0$.

8. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, причому $A\neq 0$, то існує проколотий δ-окіл точки a, в якому функція $f(x)$ має той самий знак, що і число A.

9. ***Теорема про три функції.*** *Якщо* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$, *причому існує проколотий δ-окіл точки* a, *в якому* $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$.

10. Якщо в проколотому δ-околі точки a виконується нерівність $f(x)<g(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то $A\le B$.

11. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ і існує проколотий δ-окіл точки a, в якому означена функція $\sqrt[n]{f(x)}$, $n\in\mathbf{N}$, тоді $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$.

Розглянемо приклади знаходження границі функції при $x\to a$.

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x\to a} x$.

* Нехай ε – довільне додатне число. Покладемо δ = ε. Тоді із нерівності $|x-a|<\delta$ випливає, що $|x-a|<\varepsilon$, а це й означає, що $\lim\limits_{x\to a} x=a$. *

2. Знайти $\lim\limits_{x\to a} x^n$, $n\in\mathbf{N}$.

* Згідно з властивістю 7б маємо $\lim\limits_{x\to a} x^n=\lim\limits_{x\to a} x\cdot\lim\limits_{x\to a} x\cdots\lim\limits_{x\to a} x=\Big(\lim\limits_{x\to a} x\Big)^n=a^n$. *

3. Знайти $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}$, $a>0$.

* Оскільки $\lim\limits_{x\to a} x=a$, згідно з властивістю 11 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. *

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-x+x^2}{4-x}$.

* Використовуючи властивість 7, маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-x+x^2}{4-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(3-x+x^2\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(4-x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}3-\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}x^2}{\lim\limits_{x\to 2}4-\lim\limits_{x\to 2}x}=\frac{3-2+4}{4-2}=\frac{5}{2}.$$ *

5. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2+3x-10}$.

* Безпосереднє застосування властивості 7 тут нічого не дає, бо границі чисельника і знаменника при $x\to 2$ дорівнюють 0. В такому випадку кажуть, що маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$.

Перетворимо даний дріб при $x\neq 2$ (пригадайте означення границі): $\dfrac{x^2-2x}{x^2+3x-10}=$

$=\dfrac{x(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\dfrac{x}{x+5}$. Отже, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x+5}=\dfrac{2}{7}$. *

6. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-1}{x+1}$.

* Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Перетворимо даний дріб при $x\neq -1$:

$$\frac{\sqrt{3+2x}-1}{x+1}=\frac{\left(\sqrt{3+2x}-1\right)\left(\sqrt{3+2x}+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{3+2x}+1\right)}=\frac{3+2x-1}{(x+1)\left(\sqrt{3+2x}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{3+2x}+1}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{\sqrt{3+2x}+1}=\dfrac{2}{2}=1$.

Зауваження. Те, що $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3+2x}=\sqrt{3+2(-1)}=1$, можна довести так само, як і в прикладі 3. *

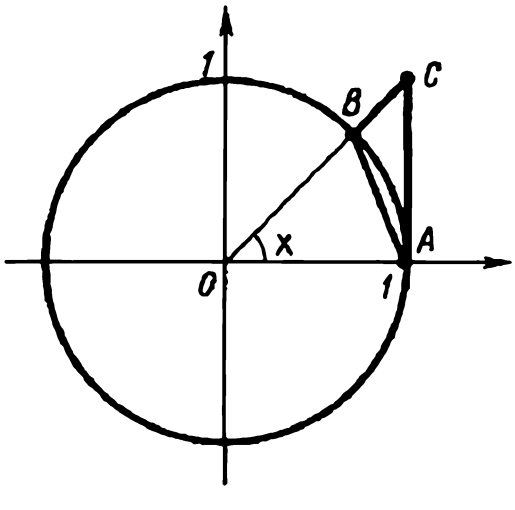


Рис. 12.2

1.3. Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Ця границя відіграє важливу роль в математичному аналізі.

Лема. При $0<x<\pi/2$ *виконується подвійна нерівність* $\sin x<x<\operatorname{tg} x$. На рис. 12.2 показано одиничне коло з центром O (0; 0). Розглянемо точки A (1; 0), B ($\cos x$; $\sin x$), C (1; $\operatorname{tg} x$). Маємо $S_1<S<S_2$, де S_1 — площа ΔOBA, S — площа сектора OBA, S_2 — площа ΔOCA. Оскільки $S_1=\dfrac{1}{2}\sin x$, $S=\dfrac{1}{2}x$, $S_2=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$, то маємо $\dfrac{1}{2}\sin x<$ $<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$, звідки $\sin x<x<\operatorname{tg} x$.

З леми випливає, що при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$. Зауважимо, що $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}<$ $<2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$, отже, $1-\dfrac{x^2}{2}<\cos x$ при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Таким чином, $1-\frac{x^2}{2}<\frac{\sin x}{x}<1$. Зрозуміло, що ця подвійна нерівність справедлива на множині $M=\left(-\frac{\pi}{2};\,0\right)\cup\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$, бо функції $1-\frac{x^2}{2}$ та $\frac{\sin x}{x}$ парні.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=1$, то за теоремою про три функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Можна помітити, що при $x\in M$ виконуються нерівності $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1$, звідки випливає, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Покажемо кілька прикладів, де використовується границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$.

* Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$. *

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7x}$.

* Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7x}=\frac{2}{7}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$. Покладемо $2x=y$, тоді $y\to 0$ при $x\to 0$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7x}=\frac{2}{7}$. *

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$.

* Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+\cos x)}=1\cdot\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$. *

4. Знайти $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

* Покладемо $x-\pi=y$. При $x\to\pi$ $y\to 0$. Отже, $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 2(\pi+y)}{\sin 5(\pi+y)}=-\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin 5y}=$

$=-\frac{2}{5}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{2y}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{5y}{\sin 5y}=-\frac{2}{5}$. *

1.4. Число A називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x\to+\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $t>0$ таке, що $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x>t$.

Це означення нагадує означення границі числової послідовності. І не дивно, бо числова послідовність — це функція. Позначається ця границя так: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

З'ясуємо геометричний зміст цього поняття (рис. 12.3). Яке б не було $\varepsilon > 0$, існує число $t > 0$ таке, що при $x > t$ відповідне значення функції $f(x)$ попадає в смугу між паралельними прямими $A - \varepsilon$ та $A + \varepsilon$. Отже, графік функції на проміжку $(t; +\infty)$ лежить у цій смузі.

Основні властивості границі функції при $x \to +\infty$ такі самі, як і у границі числової послідовності.

1. Якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, то існує проміжок $(p; +\infty)$, на якому функція $f(x)$ обмежена.

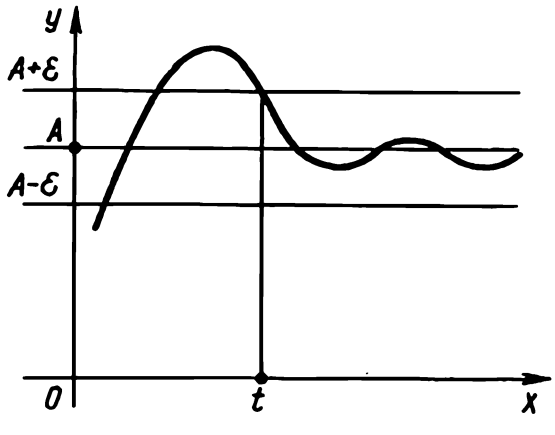


Рис. 12.3

2. Функція не може мати більше однієї границі при $x \to +\infty$. Якщо $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to +\infty$.

3. Сума скінченного числа нескінченно малих при $x \to +\infty$ є нескінченно малою при $x \to +\infty$.

4. Добуток нескінченно малої при $x \to +\infty$ на обмежену є нескінченно малою при $x \to +\infty$.

5. Добуток скінченного числа нескінченно малих при $x \to +\infty$ є нескінченно малою при $x \to +\infty$.

6. ***Основна теорема про нескінченно малі.*** *Рівність* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ *рівносильна рівності* $f(x) = A + \alpha(x)$, *де* $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Наведемо приклади нескінченно малих при $x \to +\infty$: $f(x) = \frac{1}{x}$. $f(x) = \frac{c}{x}$.

$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

7. Якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = B$, то:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B$, б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) g(x)\right) = AB$, в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

при $B \neq 0$.

8. Якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, причому $A \neq 0$, то існує число p таке, що при $x > p$ знак функції $f(x)$ збігається зі знаком числа A.

9. ***Теорема про три функції.*** *Якщо* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = A$, *причому існує число* $p > 0$ *таке, що при* $x > p$ $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$, *то* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = A$.

10. Якщо при $x > p$ $f(x) < g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = B$, то $A \le B$.

11. Нехай $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ і існує таке число $p > 0$, що при $x > p$ означена функція $\sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbf{N}$, тоді $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$.

Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $t < 0$ таке, що при $x < t$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається так: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Оскільки графік функції $y = f(-x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі Oy, то $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x)$.

Приклади

1. Знайти $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{1-5x}$.

* Поділимо чисельник і знаменник дробу на $x \neq 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{1-5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+3/x}{1/x-5}$. Тепер, згідно з властивістю 7, маємо $\dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty}(1+3/x)}{\lim\limits_{x \to +\infty}(1/x-5)} = \dfrac{1+0}{0-5} = -\dfrac{1}{5}$. *

2. Знайти $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2-x+3}$.

* Враховуючи, що $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x)$, дістанемо

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2+x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+1/x^2}{3+1/x+3/x^2} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$ *

3. Знайти $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$. Функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ - нескінченно мала при $x \to +\infty$. Із подвійної нерівності $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ випливає, що функція $2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)^{-1}$ — нескінченно мала при $x \to +\infty$. Отже, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0$. *

4. Знайти $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}$. Поділивши чисельник і знаменник дробу на $x\neq 0$, маємо $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-1/x}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1+1/x^2}}=\dfrac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\dfrac{1}{2}$.

Зверніть увагу на те, що при $x>0$ $1<\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}<1+\dfrac{1}{2x}$, отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=1$. *

1.5. Пряма $y=kx+b$ називається *асимптотою графіка функції* $f(x)$ при $x\to+\infty$, якщо різниця $f(x)-(kx+b)$ — нескінченно мала при $x\to+\infty$.

Аналогічно означають асимптоти і при $x\to-\infty$.

Теорема. *Якщо пряма* $y=kx+b$ *— асимптота графіка функції* $f(x)$ *при* $x\to+\infty$, *то* $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

* Згідно з означенням асимптоти при $x\to+\infty$ $f(x)-(kx+b)=\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала при $x\to+\infty$. Звідси маємо

1) $k=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\alpha(x)}{x}-\dfrac{b}{x}$, отже, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\alpha(x)}{x}-\dfrac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$;

2) $b=f(x)-kx-\alpha(x)$, отже, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$. *

При $x\to-\infty$ доведення аналогічне.

Зокрема, коли існує $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, бо $f(x)$ обмежена, а $\dfrac{1}{x}$ — нескінченно мала при $x\to+\infty$. При цьому $k=0$ і $b=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ і асимптота має рівняння $y=b$. Вона називається *горизонтальною* асимптотою. Якщо $k\neq 0$, асимптота називається *похилою*.

Приклади

1. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+5}$.

* Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{3}{2}$, функція має горизонтальну асимптоту $y=\dfrac{3}{2}$ при $x\to+\infty$ та при $x\to-\infty$. *

2. $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x+2}$.

* Маємо $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5}{x^2+2x}=3$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5}{x+2}-3x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6x-5}{x+2}=-6$. Отже, при $x\to+\infty$ графік функції має похилу асимптоту $y=3x-6$. Переконайтесь самостійно, що ця сама пряма є похилою асимптотою і при $x\to-\infty$. *

Вправи

1. Користуючись означенням границі, довести, що

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3-4x)=-5$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-2)=16$.

Знайти границю функції:

2. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-2x^2+5}{6x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-4x}{2x^3+x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{12x-24}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\dfrac{3x}{2}}{x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-x}{x^2-9}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\cos kx$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{px}$, $(p\neq 0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin px}$. $(p\neq 0)$;

д) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin(x-\pi/4)}$; е) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; є) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{1+\sin 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\operatorname{tg}(x/2)}{1-\operatorname{tg}(x/2)}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin 2x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-1}{5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-13x}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-2}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^2}{3x^2+x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+k}-\sqrt{x}\right)$, $k>0$; є) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x+k}\right)$.

5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-7x}{2x+10} & \text{при } x\geq 2,\\ \dfrac{2-6x}{x+1} & \text{при } x<2.\end{cases}$ Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ та $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

6. Знайти вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти функції при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$:

а) $f(x)=\dfrac{11-4x}{3x+5}$; б) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{4x-5}$; в) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$; г) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x-3}{x+4} & \text{при } x\geq 0,\\ \dfrac{7}{2x-1} & \text{при } x<0.\end{cases}$

§ 2. Неперервність функції

2.1. Функція $y=f(x)$ називається *неперервною в точці* a, якщо вона визначена в цій точці і $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

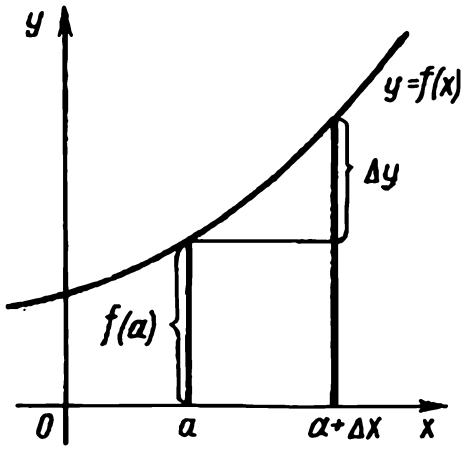


Рис. 12.4

На рис. 12.4 показано графік функції $y = f(x)$. Надамо аргументу деякого приросту Δx, тобто від точки a перейдемо до точки $a + \Delta x$. (Може бути, що $\Delta x < 0$.) При цьому і значення функції набуває деякого приросту Δy. Зрозуміло, що $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Зауважимо, що за означенням границі функції $f(x)$ при $x \to a$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Отже, функція $f(x)$ неперервна у точці a тоді і тільки тоді, коли вона в цій точці визначена і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Геометричний зміст неперервної функції в точці a полягає в тому, що існує δ-окіл точки a такий, що графік функції на цьому δ-околі можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу.

Функція називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Точка, в якій порушується умова неперервності, називається *точкою розриву функції* (мається на увазі, що в проколотому δ-околі точки a функція визначена).

Розглянемо деякі приклади.

Приклади

1. $f(x) = x$.

* Маємо $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, отже, функція $y = x$ неперервна в будь-якій точці a, тобто на всій числовій прямій. *

2. $y = x^n$. $n \in \mathbf{N}$.

* У будь-якій точці маємо $\Delta y = (a + \Delta x)^n - a^n$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = a^n (1 - 1) = 0$.

Отже, степенева функція $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, неперервна на всій числовій прямій. *

3. $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$

* На графіку (рис. 12.5) точка $x = 0$ — це точка розриву функції, бо вона в цій точці невизначена. Якщо покласти $f(0) = 0$, то дістанемо відому функцію $y = \operatorname{sign} x$. Але й у цієї функції $x = 0$ — точка розриву, бо в цій точці $\Delta y = 1$ при $\Delta x > 0$ і $\Delta y = -1$ при $\Delta x < 0$, отже, рівність $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ не виконується. *

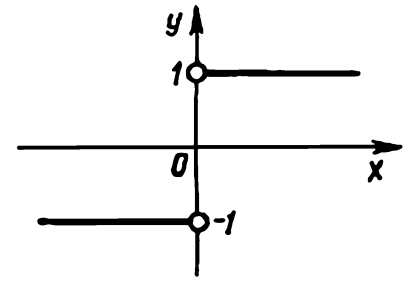


Рис. 12.5

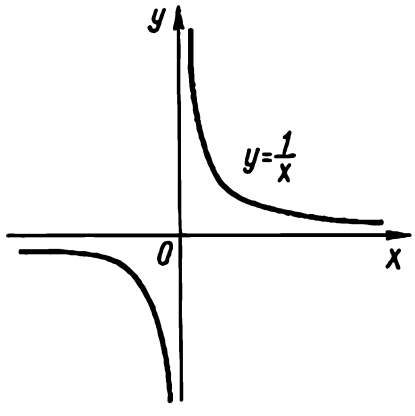


Рис. 12.6

4. $y=\frac{1}{x}$.

* $x = 0$ — точка розриву, бо в цій точці функція невизначена. Коли точка рухається по графіку, причому її абсциса наближається до $x = 0$, вона наближається до осі Oy як завгодно близько. Ця пряма називається вертикальною асимптотою графіка функції (рис. 12.6). *

Якщо $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, і в деякому δ-околі точки a $g(x)\neq 0$, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою графіка функції $\varphi(x)$. Наприклад, функція $y=\frac{x}{x+1}$ має вертикальну асимптоту $x = -1$, функція $y=\frac{1}{x(x^2-1)}$ має три вертикальні асимптоти: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

2.2. Неперервні функції мають такі *властивості*.

1. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці a і $f(a) \neq 0$, то існує δ-окіл точки a такий, що для будь-якого x із цього околу значення $f(x)$ має той самий знак, що й $f(a)$.

2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і p будь-яке число, яке лежить між числами $f(a)$ та $f(b)$, то на проміжку $[a; b]$ існує точка c така, що $f(c) = p$.

Наслідок. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і приймає на його кінцях значення різних знаків, то існує точка $c \in (a; b)$ така, що $f(c) = 0$* (рис. 12.7).

3. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то неперервними в цій точці є також і функції $f(x) + g(x)$, $f(x)\,g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (за умови, що $g(a) \neq 0$).

Цю властивість легко довести за допомогою відповідних теорем про границі функцій при $x \to a$.

4. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, то вона досягає на цьому проміжку найбільшого та найменшого значень.

5. Якщо функція $y = g(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, а її значення на цьому проміжку входять до області визначення неперервної на цій області функції $y = f(x)$, то складена функція $y = f(g(x))$ неперервна на проміжку $[a; b]$.

6. Функція, обернена неперервній функції, неперервна.

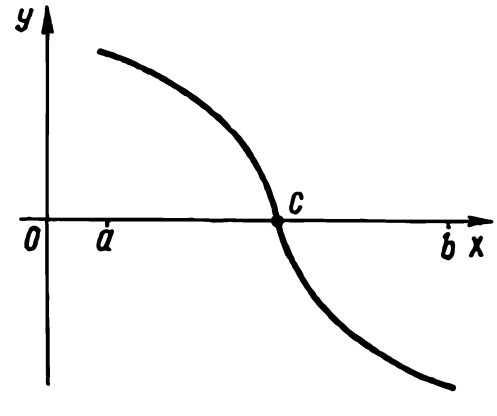


Рис. 12.7

Приклади

1. Довести, що многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, де $n\in\mathbf{N}$, $a_i\in\mathbf{R}$, є неперервною функцією на всій числовій прямій.

* Оскільки функція $y=x^m$, $m\in\mathbf{N}$, неперервна на всій числовій осі, то й функція $y=a_{n-m}x^m\left(m=0,1,2,...,n\right)$ неперервна на всій числовій прямій.

Згідно з властивістю 3 сума скінченного числа неперервних функцій є неперервною функцією. *

2. Довести, що раціональна функція $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ та $Q(x)$ — деякі многочлени з дійсними коефіцієнтами, неперервна в будь-якій точці x_0 такій, що $Q(x_0)\neq 0$.

* Такого висновку дійдемо з прикладу 1 та властивості 3 неперервних функцій. *

3. Довести, що функція $y=\cos x$ неперервна на всій числовій прямій.

* Маємо $\Delta y=\cos\left(x+\Delta x\right)-\cos x=-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$. Отже,

$$\left|\Delta y\right|=\left|-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{3}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|. \qquad (П12.1)$$

Як було показано раніше, при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\sin\alpha<\alpha$. Ця нерівність також виконується при $\alpha\ge\dfrac{\pi}{2}$, бо при $\alpha\ge\dfrac{\pi}{2}$ маємо $\sin\alpha\le 1<\dfrac{\pi}{2}\le\alpha$. Отже, при $\alpha\ge 0$ виконується нерівність $\sin\alpha\le\alpha$. Оскільки функції $y=\left|\sin x\right|$ та $y=\left|x\right|$ парні, $\left|\sin x\right|\le\left|x\right|$ при $x\in\mathbf{R}$. Звідси видно, що $\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right|\le\dfrac{\left|\Delta x\right|}{2}$. Тепер із нерівності (П12.1) дістанемо $\left|\Delta y\right|\le 2\cdot\dfrac{\left|\Delta x\right|}{2}=\left|\Delta x\right|$. Із подвійної нерівності $0\le\left|\Delta y\right|\le\left|\Delta x\right|$ випливає, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. *

Аналогічно можна довести, що функція $y=\sin x$ неперервна на всій числовій прямій. Втім, оскільки $\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, то неперервність синуса випливає з прикладу 3 та неперервності складеної функції. Із властивості 3 неперервних функцій випливає неперервність функцій $y=\operatorname{tg}x$ та $y=\operatorname{ctg}x$ у кожній точці своєї області визначення.

Обернені тригонометричні функції $y=\arcsin x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\arccos x$ та $y=\operatorname{arcctg}x$ неперервні в кожній точці своєї області визначення згідно з властивістю 6 неперервності оберненої функції.

4. Довести, що функція $y=\sqrt{\cos x}$ неперервна на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

* Функція $y=\sqrt{x}$ обернена до неперервної функції $y=x^2$, $x\in\left[0;+\infty\right]$. Отже, функція $y=\sqrt{x}$ неперервна. Функція $y=\cos x$ неперервна на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ і $E(y)=(0;1)$. Множина $E(y)$ входить до області визначення функції $y=\sqrt{x}$, отже, складена функція $y=\sqrt{\cos x}$ неперервна на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. *

5. Відомо, що показникова функція $y=a^x\ (a>0)$ неперервна на всій числовій прямій. Отже, логарифмічна функція $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ неперервна на множині (0, +∞) як обернена до неперервної.

2.3. Неперервність функцій використовується для знаходження границь. Так, згідно з властивістю 5 складена функція неперервна, якщо неперервні внутрішня і зовнішня функції при зазначених умовах. Отже, $\lim\limits_{x\to a} f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(g\left(a\right)\right)=$

$=f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$ або $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\right)$.

Приклади

Знайти границю функції.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}}{x+1}$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+x+6}{x^2+2x+1}}$.

Оскільки функція $y=\sqrt{x}$ неперервна, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+x+6}{x^2+2x+1}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+6}{x^2+2x+1}}=\sqrt{1}=1$.

Відповідь: 1. *

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+b+ab/x}{\sqrt{(1+a/x)(1+b/x)}+1}=\dfrac{a+b}{1+1}=\dfrac{a+b}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{a+b}{2}$. *

2.4. На властивості 2 грунтується так званий *загальний метод розв'язування нерівностей.*

Теорема. *Якщо на деякому проміжку функція неперервна і не має коренів, то вона зберігає знак на цьому проміжку.*

Справедливість цієї теореми випливає із наслідку властивості 2.

Наприклад, нерівність $f(x)>0\ (f(x)<0)$ розв'язуємо в такій послідовності: 1) знаходимо $D(f)$; 2) знаходимо проміжки, на кожному з яких функція неперервна й не має коренів; 3) виявляємо знаки функції на кожному з цих проміжків і пишемо відповідь.

Відомий *метод інтервалів*, що застосовують при розв'язуванні раціональних нерівностей, є окремим випадком загального методу розв'язування нерівностей.

Приклади

Розв'язати нерівність.

1. $3-x>3\sqrt{1-x^2}$.

* Перепишемо цю нерівність так: $x+3\sqrt{1-x^2}-3<0$ і розглянемо функцію $f(x)=x+3\sqrt{1-x^2}-3$.

1) Знаходимо $D(f)$ із нерівності $1-x^2\geq 0$: $D(f)=[-1;\ 1]$.

2) Корені функції $f(x)$ знаходимо із рівняння $3-x=3\sqrt{1-x^2}$. $(3-x)^2=9(1-x^2)$, $10x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=0.6$. Перевіркою впевнюємось, що обидва корені підходять. Корені функції розбивають область її визначення на три проміжки: [-1; 0), (0; 0,6) та (0,6; 1]. На кожному з цих проміжків функція зберігає знак.

3) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+3\sqrt{\frac{3}{4}}-3<0$, отже: при $x\in[-1;\ 0)$ $f(x)<0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+3\sqrt{\frac{3}{4}}-3>0$, при $x\in(0;0,6)$ $f(x)>0$; $f(1)=1+3\cdot 0-3<0$, при $x\in(0,6;1]$ $f(x)<0$. Відповідь: $x\in[-1;0)\cup(0,6;1]$. *

2. $\sqrt{5x-x^2-4}>2x-5$.

* Запишемо нерівність у вигляді $\sqrt{5x-x^2-4}-2x+5>0$ і розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{5x-x^2-4}-2x+5$.

1) Знаходимо $D(f)$ із нерівності $5x-x^2-4\geq 0$: $D(f)=[1;\ 4]$.

2) Розв'язавши рівняння $\sqrt{5x-x^2-4}=2x-5$, $5x-x^2-4=(2x-5)^2$, $5x^2-25x+29=0$, знайдемо корені функції $x_{1,2}=\frac{25\pm 3\sqrt{5}}{10}$. Перевіркою впевнюємось, що підходить тільки корінь $x=\frac{25+3\sqrt{5}}{10}$, який розбиває область визначення функції на два проміжки: $\left[1;\frac{25+3\sqrt{5}}{10}\right)$ та $\left(\frac{25+3\sqrt{5}}{10};4\right]$.

3) Маємо $f(1)=0-2+5>0$, отже:

при $x\in\left[1;\frac{25+3\sqrt{5}}{10}\right)$ $f(x)>0$; $f(4)=-8+5<0$; при $x\in\left(\frac{25+3\sqrt{5}}{10};4\right]$ $f(x)<0$.

Відповідь: $1\leq x<\frac{25+3\sqrt{5}}{10}$. *

3. $\log_x\left(x^2-5x+5\right)<1$.

* Запишемо нерівність у вигляді $\log_x\left(x^2-5x+5\right)-1<0$ і розглянемо функцію $f(x)=\log_x\left(x^2-5x+5\right)-1$.

1) Знаходимо $D(f)$ із системи $\begin{cases} x^2-5x+5>0, \\ x>0,\ x\neq 1, \end{cases}$ звідки $x\in(0;\,1)\cup\left(1;\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

2) Розв'язавши рівняння $\log_x\left(x^2-5x+5\right)=1$, $x^2-5x+5=x$, матимемо корені функції $x_1=1$, $x_2=5$. Перевіркою впевнюємось, що підходить тільки корінь $x=5$, який розбиває область визначення на 4 проміжки: $(0;\,1)$, $\left(1;\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2};\,5\right)$ та $(5;\,+\infty)$.

3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{1/2}2\frac{3}{4}-1<0$, $f(1{,}1)=\log_{1{,}1}0{,}71-1<0$, $f(4)=\log_4 1-1<0$, $f(10)=\log_{10}55-1>0$.

Відповідь: $x\in(0;\,1)\cup\left(1;\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2};\,5\right)$. *

4. $\frac{1-\sin x}{\sin 2x}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$.

* Маємо $\frac{1-\sin x}{\sin 2x}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ і $f(x)=\frac{1-\sin x}{\sin 2x}-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ця функція періодична з періодом $T=2\pi$, тому розв'язуємо нерівність на проміжку $[0;\,2\pi]$.

1) Знаходимо $D(f)$ з умови $\begin{cases} \sin 2x\neq 0, \\ 0\le x\le 2\pi, \end{cases}$ за якою $D(f)=\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\,\pi\right)\cup\left(\pi;\,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\,2\pi\right)$.

2) Корені функції знаходимо з рівняння

$$\frac{1-\sin x}{\sin 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}(1-\sin x)=\sin 2x,\ 3(1-\sin x)^2=\sin^2 2x,\ 4\sin^4 x-\sin^2 x-6\sin x+3=0.$$

Поклавши $\sin x=t$, маємо $4t^4-t^2-6t+3=0$, $t^2\left(4t^2-1\right)-3(2t-1)=0$, $(2t-1)(t-1)\left(2t^2+3t+3\right)=0$.

Це рівняння має лише два дійсних корені: $t_1=1$ та $t_2=\frac{1}{2}$. Відповідно маємо

а) $\sin x=1$. Корені цього рівняння не входять в область визначення $D(f)$;

б) $\sin x=\frac{1}{2}$. На проміжку $[0;\,2\pi]$ лежать два корені цього рівняння: $\frac{\pi}{6}$ та $\frac{5\pi}{6}$.

Перевіркою встановлюємо, що корінь $\frac{5\pi}{6}$ не підходить (сторонній корінь з'явився внаслідок піднесення обох частин рівняння до квадрата). Отже, функція має єдиний корінь $x=\frac{\pi}{6}$. Цей корінь розбиває множину $D(f)$ на проміжки: $\left(0;\,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\,\pi\right)$, $\left(\pi;\,\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};\,2\pi\right)$.

3) Виявляємо знаки функції на кожному з цих проміжків:

x	$\left(0;\,\frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6};\,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\,\pi\right)$	$\left(\pi;\,\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2};\,2\pi\right)$
$f(x)$	+	−	−	+	−

Враховуючи періодичність функції, маємо відповідь:

$$x\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi(1+2n)\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi(1+n)\right).\ *$$

Вправи

1. Довести неперервність функції:

а) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0;+\infty)$; б) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$, $x\in\mathbf{R}$; в) $f(x)=3\sin^2 x+4\cos x+x$, $x\in\mathbf{R}$;

г) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; д) $f(x)=2x\operatorname{tg}\sqrt{1-x}$, $x\in[0;1]$.

2. Знайти точку розриву та вертикальні асимптоти графіків функцій:

а) $y=\frac{x+5}{2x-1}$; б) $y=\frac{1-4x}{x}$; в) $y=\begin{cases}3x-4 \text{ при } x>2,\\ \frac{x+2}{x} \text{ при } x\le 2.\end{cases}$

3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$.

4. Розв`язати за допомогою загального методу нерівності:

а) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$; в) $|5x-2|<|x+1|$; г) $\sin 3x<\sin x$.

Відповіді до вправ

§ 1. 2. а) 3; б) $-\frac{1}{7}$; в) $-\frac{1}{12}$; г) $\frac{2}{9}$; д) $-\frac{2}{3}$; е) $-\frac{1}{18}$. **3.** а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{k}{p}$; г) $\frac{k}{p}$; д) $\sqrt{2}$; е) $\sqrt{2}$; є) $\frac{1}{9}$; ж) -1; з) $-\frac{1}{2}$; и) $\frac{1}{2}$. **4.** а) 2; б) -13; в) 0; г) $-\frac{1}{3}$; д) $\frac{a_0}{b_0}$; е) 0; є) не існує. **5.** $-\frac{7}{2}$ та -3. **6.** а) $x=-\frac{5}{3}$, $y=-\frac{4}{3}$; б) $x=\frac{5}{4}$, $y=-\frac{x}{4}-\frac{5}{16}$; в) $y=x-1$; г) $x=-4$, $y=6$ при $x\to+\infty$ та $x=\frac{1}{2}$, $y=0$ при $x\to-\infty$.

§ 2. 2. а) $x=0{,}5$; б) $x=0$; в) $x=0$. **3.** а) $\sqrt{2}$; б) 2. **4.** а) $x\in\left(\sqrt{\frac{28}{3}};+\infty\right)$; б) $x\in(-\infty;0]\cup(4{,}5;+\infty)$; в) $x\in\left(\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$; г) $x\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right)$.

Тема 13. ПОХІДНА

§ 1. Означення і основні властивості похідної

1.1. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно в одному напрямі за законом $S = f(t)$, де t — час, S — шлях, який точка проходить за час t.

За деякий час t_0 точка проходить шлях $S_0 = f(t_0)$. Визначимо швидкість v_0 матеріальної точки в момент t_0. За час $t = t_0 + \Delta t$ (Δt — приріст часу) точка пройде шлях $S = f(t_0 + \Delta t)$.

Отже, за проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ точка проходить шлях $\Delta S = S - S_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$.

Нехай v — середня швидкість руху за час Δt. Очевидно, $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Швидкістю v_0 в момент часу t_0 називається границя середньої швидкості v при $\Delta t \to 0$, тобто

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

До знаходження границі такого виду зводяться численні задачі (наприклад, з природознавства).

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(якщо ця границя існує).

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 позначається так: $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$, або $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$.

Для функції $f(x)$ можна обчислювати похідну в різних точках x. Нехай L — множина всіх таких значень x. Правило, за яким кожному $x \in L$ відповідає похідна $f'(x)$ в цій точці,— це деяка функція, визначена на множині L. Називається вона похідною функції $f(x)$ і позначається так: $f'(x)$, або $y'(x)$, або $\dfrac{df}{dx}$.

Як було з'ясовано раніше, $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Це означає, що швидкістю v прямолінійного руху матеріальної точки в момент часу t є похідна від шляху $S(t)$, бо $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$. В цьому полягає механічний зміст похідної.

Операцію обчислення похідної називають *диференціюванням*. Якщо похідна функції $f(x)$ у точці x_0 існує, то функція називається *диференційовною в точці* x_0.

Якщо функція диференційовна в кожній точці деякого проміжку, то вона називається *диференційовною на цьому проміжку*. Наприклад, як буде показано далі, функція $y = 8x + 1$ диференційовна на всій числовій прямій, функція $y=\sqrt{x}$ — на множині $(0;\ +\infty)$, а функція $y=|x|$ — на множині $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна в точці* x_0, *то вона неперервна в цій точці.*

* По-перше, функція визначена в точці x_0, бо існує $f(x_0)$. Далі помітимо, що $\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$, отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$, а це означає, що функція неперервна в точці x_0. *

Обернена теорема не справедлива. Наприклад, функція $y=|x|$ неперервна в точці $x_0 = 0$, але не має похідної в цій точці.

Приклади

1. $f(x)=3x-1$. Знайти $f'(1)$.

* $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=3(1+\Delta x)-1-(3\cdot 1-1)=3\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$; $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}3=3$. Відповідь: 3. *

2. $f(x)=1-x^2$. Знайти $f'(2)$.

* $\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=1-(2+\Delta x)^2-(1-2^2)=-4\Delta x-(\Delta x)^2$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-4-\Delta x$, $f'(2)=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-4-\Delta x)=-4$. Відповідь: –4. *

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$. **Знайти швидкість руху в момент** $t = 2$.

* $\Delta S=S(2+\Delta t)-S(2)=\frac{1}{2}g(4\Delta t+(\Delta t)^2)$, $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(4+\Delta t)$, $S'(2)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(4+\Delta t)=2g$.

Відповідь: $2g$. *

4. Знайти похідну функції $y=8x+1$.

* Для кожного фіксованого x маємо $\Delta y=8(x+\Delta x)+1-(8x+1)=8\Delta x$, тобто $\frac{\Delta y}{\Delta x}=8$,

отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=8$, або $(8x+1)'=8$. Зрозуміло, що $L = \mathbf{R}$, бо значення x довільне. *

5. Знайти похідну функції $y=\sqrt{x}$.

* Для фіксованого додатного x маємо $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$. отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, або $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. *

6. Довести, що в точці $x = 0$ функція $y=|x|$ не має похідної.

* $\Delta y=|0+\Delta x|-0=|\Delta x|$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1 \text{ при } \Delta x>0,\\ -1 \text{ при } \Delta x<0;\end{cases}$ $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1 \text{ при } \Delta x>0,\\ -1 \text{ при } \Delta x<0.\end{cases}$

Звідси випливає, що цієї границі не існує, тобто функція $y=|x|$ не має похідної в точці $x = 0$. *

Зауваження. Зрозуміло, що функція $f(x)=|x|$ має похідну в будь-якій точці $x \neq 0$, причому $f'(x)=1$ при $x>0$ та $f'(x)=-1$ при $x<0$.

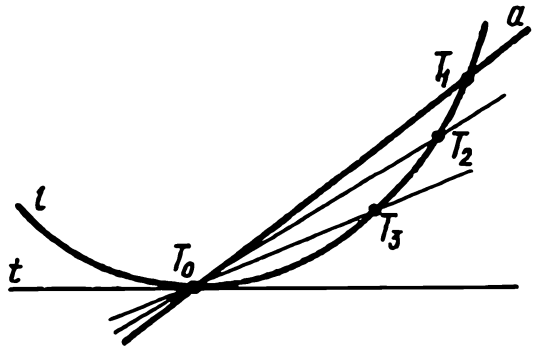


Рис. 13.1

1.2. З'ясуємо *геометричний зміст похідної*. Візьмемо точки T_0, T_1 на плоскій кривій (рис. 13.1). Відрізок прямої $T_0\,T_1$ називається *січною*. Почнемо рухати точку T_1 вздовж кривої (точка T_0 фіксована). Січна змінюватиме своє положення ($T_0\,T_1$, $T_0\,T_2$, $T_0\,T_3$ і т. д.). Припустимо, що існує граничне положення січної — пряма t, яка має такі властивості: 1) $T_0 \in t$, 2) якщо точка T, рухаючись вздовж кривої l, необмежено наближається до точки T_0, то кут між прямою t та січною $T_0\,T$ прямує до нуля. Така пряма t називається *дотичною до кривої* l в точці T_0.

Нехай графік неперервної функції $f(x)$ має в точці $T_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ невертикальну дотичну (рис. 13.2). Ця дотична утворює з віссю Ox кут α, отже, має кутовий коефіцієнт $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Вибираємо на графіку іншу точку $T\big(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)\big)$ і проводимо січну $T_0\,T$. Нехай ця січна утворює з віссю Ox кут β. Кутовий коефіцієнт січної $k_2 = \operatorname{tg}\beta$. З рис. 13.2 видно, що $TP = \Delta y$, $T_0P = \Delta x$, $TP \parallel Oy$, $T_0P \parallel Ox$, отже, $\angle\, TT_0P = \beta$. З трикутника TT_0P маємо $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{TP}{T_0P}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta y \to 0$, бо функція $f(x)$ неперервна, отже, точка T, рухаючись вздовж графіка, нескінченно наближається до точки T_0. При цьому січна нескінченно наближається до дотичної, отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=\alpha$, або, враховуючи неперервність тангенса, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0). \qquad (13.1)$$

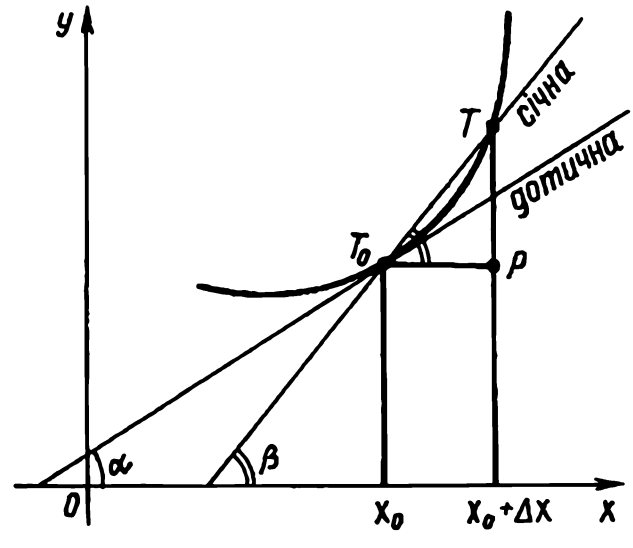


Рис. 13.2

Отже, кутовий коефіцієнт невертикальної дотичної до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$ дорівнює значенню похідної функції в точці x_0. Формула (13.1) з'ясовує геометричний зміст похідної.

І навпаки, можна довести, що коли функція має похідну в точці x_0, то в точці $T(x_0, f(x_0))$ до графіка функції можна провести невертикальну дотичну.

Приклади

1. В якій точці графіка функції $y=x^2+x+1$ дотична до нього паралельна осі Ox?

* Якщо дотична до графіка паралельна осі Ox, то її рівняння $y=c$, отже, її кутовий коефіцієнт $k=0$. Нехай шукана точка має абсцису x_0, тоді $f'(x_0)=0$; $2x_0+1=0$; $x_0=-\frac{1}{2}$.

$f(x_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$. Отже, шукана точка $T_0\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. Відповідь: $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. *

2. Дотична до графіка функції $y=\sqrt{x}$ має кутовий коефіцієнт $k=1$. Знайти координати точки дотику.

* Нехай $T\left(x_0,\sqrt{x_0}\right)$ — шукана точка, тоді $y'(x_0)=1$. Оскільки $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=1$ і $x_0=\frac{1}{4}$. При цьому $f(x_0)=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$. Відповідь: $T\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$. *

1.3. *Похідні обчислюють за певними правилами.*

Теорема 1. *Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні в точці x, то і функція $u(x)+v(x)$ має похідну в цій точці, причому* $\left(u(x)+v(x)\right)'=u'(x)+v'(x)$.

* Нехай $y=u(x)+v(x)$, тоді $\Delta y=u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)=\Delta u+\Delta v$,

тобто $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)+v'(x)$. *

Теорема справедлива для будь-якого скінченного числа доданків:

$$\left(u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)\right)'=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x).$$

Теорема 2. *Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні в точці x, то і функція $u(x)v(x)$ має похідну в цій точці, причому* $\left(u(x)v(x)\right)'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$.

* Нехай $y=u(x)v(x)$. Надамо змінній x деякого приросту Δx, тоді функція $u(x)$ матиме приріст, причому $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$, звідки $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u$. Аналогічно $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$, тобто $\Delta y=\left(u(x)+\Delta u\right)\left(v(x)+\Delta v\right)-u(x)v(x)=$

$=u(x)\Delta v+v(x)\Delta(u)+\Delta u\,\Delta v$, отже, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\Delta v+v(x)\Delta u+\Delta u\,\Delta v}{\Delta x}=$

$=u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=u(x)v'(x)+v(x)u'(x)+u'\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v.$

Оскільки функція $v(x)$ має похідну в точці x, вона неперервна в цій точці, отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$. Остаточно $y'=u'v+uv'$. *

Наслідок. *Сталу можна винести за знак похідної*: $\left(c\cdot u(x)\right)'=c\cdot u'(x)$.

Дійсно, $\left(c\cdot u(x)\right)'=c'\cdot u(x)+c\cdot u'(x)=0+c\cdot u'(x)$. Зокрема, $(u-v)'=\left(u+(-v)\right)'=$

$=u'+(-v)'=u'-v'$.

Теорема 3. *Якщо в точці x функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні і $v(x)\neq 0$, то функція* $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *має похідну в цій точці, причому* $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

* Нехай $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, тоді $\Delta y=\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{v(x)\left(v(x)+\Delta v\right)}$, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta(x)}-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\left(v(x)+\Delta v\right)}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.\ *$$

При доведенні враховано, що функція $v(x)$ має похідну, отже, неперервна в точці x і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$.

Теорема 4. *Нехай $y=f\left(g(x)\right)$ — складена функція. Якщо функція $g(x)$ має похідну в точці x, а функція $f(g)$ має похідну у відповідній точці $g(x)$, то складена функція y має похідну в цій точці, причому* $y'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

Наслідок. *Нехай $f(x)$ та $\varphi(x)$ — взаємно обернені функції, причому функція f має похідну в точці $\varphi(x)$, тоді функція φ має похідну в точці x, причому*

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'\left(\varphi(x)\right)}.$$

* Дійсно, оскільки функції f і φ взаємно обернені, то $f\left(\varphi(x)\right)=x$. Звідси, згідно з теоремою 4, маємо $f'\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)=1$, отже, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{f'\left(\varphi(x)\right)}$. *

Приклади

1. $f(x)=x^2$. Знайти $f'(x)$ та $f'(1)$.

* $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$; $f'(1)=2$.

Відповідь: $2x$ та 2. *

2. $f(x)=x^n$. Знайти $f'(x)$.

* 1) При $n=1$ маємо $f(x)=x$, $(x)'=1$.

2) Нехай $(x^m)'=mx^{m-1}$ при $x\in\mathbf{R}$, $m\in\mathbf{N}$, $m>1$, тоді $(x^{m+1})'=(x^m\cdot x)'=(x^m)'x+$ $+x'x^m=mx^{m-1}x+x^m=(m+1)x^m$. Методом математичної індукції доведено, що $(x^n)'=nx^{n-1}$ при $n\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{R}$. *

3. $y=2x^3-3x^2+4x-2$. Знайти $y'(x)$.

* Використовуючи правила обчислення похідної суми і добутку кількох функцій, маємо $y'=(2x^3-3x^2+4x-2)'=(2x^3)'-(3x^2)'+(4x)'-(2)'=6x^2-6x+4-0=6x^2-6x+4$.

Відповідь: $6x^2-6x+4$. *

4. $y=\dfrac{3x-2}{2x-1}$. Знайти $y'(x)$ та $y'(0)$.

* Згідно з правилом знаходження похідної від частки двох функцій, маємо $y'(x)=\dfrac{(3x-2)'(2x-1)-(2x-1)'(3x-2)}{(2x-1)^2}=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ при $x\neq 0{,}5$. Зокрема, $y'(0)=1$.

Відповідь: $\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ при $x\neq\dfrac{1}{2}$ та 1. *

5. Довести, що вісь Ox є дотичною до графіка функції $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

* З рівняння $\dfrac{x^2}{x-1}=0$ бачимо, що вісь Ox має з даним графіком єдину спільну точку (0; 0).

Знайдемо похідну $y'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $y'(0)=0$. Отже, дотична до графіка в точці (0; 0) паралельна осі Ox, значить ця дотична і є віссю Ox, що й треба було довести. *

6. Знайти похідну від функції: а) $y=\sqrt{x^2+x+1}$; б) $y=\left(\dfrac{x-2}{2x+3}\right)^3$, в) $y=(4x^2+2x+3)^{-1}$.

* а) Нехай $x^2+x+1=u(x)$, тоді $y=\sqrt{u}$. Згідно з формулою похідної складеної функції маємо $y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. Тобто, $y'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

б) Нехай $\dfrac{x-2}{2x+3}=u(x)$, тоді $y=(u(x))^3$,

$$y'=3u^2(x)u'(x)=3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)^2\frac{1(2x+3)-2(x-2)}{(2x+3)^2}=3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)^2\frac{7}{(2x+3)^2}=\frac{21(x-2)^2}{(2x+3)^4}$$ при $x\neq-\dfrac{3}{2}$.

в) $y(x)=(u(x))^{-1}$, де $u(x)=4x^2+2x+3$, $y'=-1\cdot(u(x))^{-2}\cdot u'(x)=-\dfrac{8x+2}{(4x^2+2x+3)^2}$. *

7. Довести, що похідною непарної функції, якщо вона існує, є функція парна.

* $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x_0)-f(-x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(-x_0)$, отже, $f'(x)$ — парна функція (мається на увазі, що якщо похідна існує в точці x_0, то вона існує й у точці $(-x_0)$). *

Вправи

1. $y=\dfrac{6x-1}{3x+2}$. Знайти $y'(x)$, $y'(0)$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$. Знайти y'.

3. Розв'язати нерівність $f(x)<f'(x)$, $f(x)=x^4$.

4. У точках перетину графіка функції $y=1-x^2$ з віссю Ox проведено дотичні до цього графіка. Під яким кутом перетинаються ці дотичні?

5. $y=5x^4-6x^3+4x^2-3x+1$. Знайти $y'(1)$.

6. $y=\dfrac{1-5x}{4x+7}$. Знайти $y'(x)$ та $y'(0)$.

7. Довести, що вісь Ox є дотичною до графіка функції $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

8. Знайти похідну від функції: а) $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1;\,1)$; б) $y=\left(\dfrac{3x+1}{x-4}\right)^3$; в) $y=\dfrac{1}{2x^2+x+4}$.

9. Довести, що похідна парної функції, якщо вона існує, є непарною функцією.

§ 2. Похідні елементарних функцій

2.1. *Похідна сталої функції* $y = c$. Маємо $\Delta y = 0$, тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$, отже, $(c)'=0$.

Похідна степеневої функції $(x^n)'=n x^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}$, $x\in\mathbf{R}$, що доведено у прикладі 2 (див. § 1, п. 1.1).

Похідні тригонометричних функцій:

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x,\ (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

* Нехай $y=\sin x$, $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$; $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=\cos x\cdot 1=\cos x$. При доведенні використовуємо

неперервність функції $y=\cos x$ та відому границю $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$. Врахуємо, що $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

Згідно з теоремою про похідну складеної функції маємо

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x.$$

Згідно з теоремою про похідну від частки двох функцій маємо

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}.\ *$$

Похідні обернених тригонометричних функцій знаходимо, використовуючи наслідок із теореми 4 (про похідну оберненої функції), за яким (див. п. 1.3):

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sin'(\arcsin x)}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $x\in(-1;\,1)$;

$$(\arccos x)'=\frac{1}{\cos'(\arccos x)}=\frac{1}{-\sin(\arccos x)}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $x\in(-1;\,1)$;

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}x)}=\cos^2(\operatorname{arctg}x)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}x)}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbf{R};$$

$$(\operatorname{arcctg}x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

при $x\in\mathbf{R}$.

Похідну логарифмічної функції $y=\ln x$ знаходимо так: маємо

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x/x)}{\Delta x/x}=\frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha},\ \alpha=\frac{\Delta x}{x}.$$

Можна довести, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$, отже, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ при $x>0$.

Нехай $y = \log_a x$. Скористаємось тотожністю $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Тепер маємо

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Похідну показникової функції $y = e^x$ знаходимо, логарифмуючи обидві частини цієї рівності: $\ln y = \ln e^x = x \ln e = x.$

Беремо похідну від обох частин цієї рівності: $\dfrac{1}{y} \cdot y' = 1$, звідки $y' = y$, тобто $\left(e^x\right)' = e^x$. Якщо $y = a^x$, то $y = e^{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$. $y' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \left(x \ln a\right)' = a^x \ln a$ при $x \in \mathbf{R}$.

Похідну степеневої функції з довільним дійсним показником $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x > 0$ знаходимо, враховуючи, що $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$:

$$\left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\left(\alpha \ln x\right)' = x^\alpha \, \alpha \frac{1}{x} = \alpha \, x^{\alpha - 1}$$

при $x > 0$. Звідси при $\alpha \in \mathbf{N}$ дістаємо відомий результат для степеневої функції з натуральним показником.

2.2. *Логарифмічне диференціювання* застосовується тоді, коли зручно спочатку прологарифмувати функцію, а потім знайти похідну складеної функції:

$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ звідки } f'(x) = f(x)\left(\ln f(x)\right)'. \qquad (13.2)$$

Формула (13.2) називається *формулою логарифмічного диференціювання.*

Наприклад, $y = x^x$, тоді $\ln y = x \ln x$, отже $\left(\ln y\right)' = \left(x \ln x\right)' = \ln x + x \dfrac{1}{x} = \ln x + 1.$

За формулою (13.2) маємо $\left(x^x\right)' = x^x \left(\ln x + 1\right)$.

2.3. *Похідні порядку вище першого* називаються *похідними вищих порядків.* Нехай функція f має похідну f' на деякій множині M. Якщо функція $f'(x)$ має похідну на множині M, то ця похідна називається похідною другого порядку функції f на множині M, або другою похідною. Позначається друга похідна символом $f''(x)$ або $y''(x)$. Отже, $f''(x) = (f'(x))'$.

Похідна від похідної другого порядку називається похідною третього порядку, або третьою похідною. Позначається третя похідна так: $f'''(x)$ або $y'''(x)$.

Аналогічно можна розглядати похідні четвертого, п'ятого, ..., n-го порядку. Похідна n-го порядку позначається так: $f^{(n)}(x)$. Отже, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Приклад

1. $y=2\sin 3x$. Знайти $y'''(x)$.

* Скористаємось формулою похідної складеної функції: $y'=2\cos 3x\cdot 3=6\cos 3x$.

$y''=6(-\sin 3x)\cdot 3=-18\sin 3x$, $y'''=(-18\sin 3x)'$, тобто $y'''=-18\cos 3x\cdot 3=-54\cos 3x$. Відповідь: $-54\cos 3x$. *

2.4. Розглянемо механічний та геометричний зміст другої похідної. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S=S(t)$. Як було з'ясовано раніше, $v(t)=S(t)$. Розглянемо приріст швидкості v за час від моменту t до моменту $t+\Delta t$: $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$. Величина $a_c=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ називається середнім прискоренням руху за проміжок часу Δt. Прискорення a в момент руху t — це границя середнього прискорення при $\Delta t\to 0$:

$$a=\lim_{\Delta t\to 0} a_c=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t).$$

Враховуючи, що $v=S'(t)$, маємо

$$a(t)=v'(t)=S''(t).$$

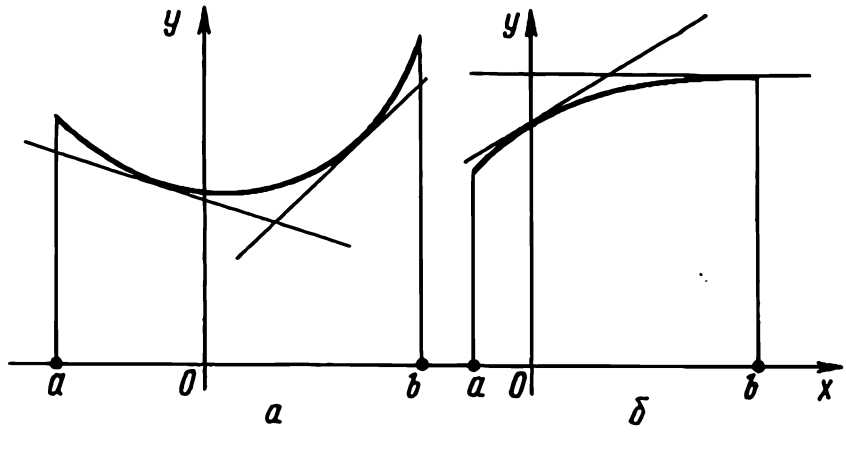
Таким чином, прискорення прямолінійного руху точки — це друга похідна від шляху.

Приклад

1. Точка рухається прямолінійно за законом $S=gt^2$ (g — стала). Знайти прискорення руху в момент $t=2$.

* $S'=2gt$, $S''=a(t)=2g$. Виходить, що прискорення руху в даному випадку — стала величина. Відповідь: $2g$. *

Означення. Функція f, визначена і диференційовна на проміжку $(a; b)$, називається опуклою донизу (догори) на цьому проміжку, якщо її графік розміщено не нижче (не вище) дотичної до графіка, проведеної в довільній його точці. На рис. 13.3, *а*, *б* відповідно показано графіки функцій опуклих донизу та догори.



а *б*

Рис.13.3

Якщо функція неперервна у точці x_0 і змінює характер опуклості при переході через цю точку, точка x_0 називається точкою перегину.

Теорема. *Для того щоб функція* $y=f(x)$, *задана і двічі диференційовна на проміжку* $(a;\ b)$, *була опуклою донизу (догори) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $x\in(a;\ b)$ *виконувалась нерівність* $f''(x)>0$ $\left(f''(x)<0\right)$.

Зауваження. Проміжок $(a;\ b)$ може бути і нескінченним. Наприклад, нехай $y=x^3$, $y'=3x^2$, $y''=6x$. Функція $y=x^3$ опукла догори при $x\in(-\infty;\ 0)$, бо $y''<0$. Ця функція опукла донизу при $x\in(0;\ +\infty)$, бо $y''>0$. Точка $x=0$ є точкою перегину.

Приклади

2. Знайти похідну від многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$.

* $f'(x)=a_0\,nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+...+a_{n-1}$. Похідною многочлена є також многочлен, степінь якого на одиницю менший. *

3. $y=2\sin\left(x^2-3x-1\right)$. Знайти $y'(x)$.

* За формулою похідної складеної функції маємо $y'=2\cos\left(x^2-3x-1\right)(2x-3)$.

Відповідь: $2(2x-3)\cos\left(x^2-3x-1\right)$. *

4. $y=\operatorname{tg}\left(1-x+x^2-x^3\right)$. Знайти $y'(0)$.

* $y'=\dfrac{1}{\cos^2\left(1-x+x^2-x^3\right)}\cdot\left(-1+2x-3x^2\right)$, отже, $y'(0)=\dfrac{-1}{\cos^2 1}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{\cos^2 1}$. *

5. $y=\arcsin(1-3x)$. Знайти $y'(x)$.

* Область визначення функції знаходимо із подвійної нерівності $-1\le 1-3x\le 1$, або $0\le x\le\dfrac{2}{3}$.

Отже, $D(y)=\left[0;\ \dfrac{2}{3}\right]$.

Функція диференційовна на проміжку $\left(0;\ \dfrac{2}{3}\right)$. Для $x\in\left(0;\ \dfrac{2}{3}\right)$ маємо

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}(1-3x)'=\dfrac{-3}{\sqrt{6x-9x^2}}$. Відповідь: $\dfrac{-3}{\sqrt{6x-9x^2}}$ при $x\in\left(0;\ \dfrac{2}{3}\right)$. *

6. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$. Знайти $y'(0)$.

* За правилом знаходження похідної частки двох функцій маємо

$$y'=\frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x-\cos x)'(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2};\ y'(0)=\frac{-2}{(-1)^2}=-2.$$

Відповідь: -2. *

7. $y=\ln|x|$, $x\neq 0$. Знайти $y'(x)$.

* Маємо $y=\ln x$ при $x>0$, отже, $y'=\dfrac{1}{x}$; $y=\ln(-x)$ при $x<0$, отже, $y'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}$. Відповідь: $\dfrac{1}{x}$. *

8. $y=\log_3\left(7x^2-x-2\right)$. Знайти $y'(1)$.

* $y'=\dfrac{1}{7x^2-x-2}\dfrac{14x-1}{\ln 3}$, отже, $y'(1)=\dfrac{13}{4\ln 3}$. Відповідь: $\dfrac{13}{4\ln 3}$. *

9. $y=2^{\sin x+\cos x}$. Знайти $y'(x)$.

* $y=2^{u(x)}$, де $u(x)=\sin x+\cos x$, $y'=2^{u(x)}\ln 2\,u'(x)=2^{\sin x+\cos x}\cdot\ln 2\left(\cos x-\sin x\right)$.

Відповідь: $\left(\cos x-\sin x\right)\ln 2\cdot 2^{\sin x+\cos x}$. *

10. $y=3x\sqrt{x}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$. Знайти $y'(x)$.

* $y=3x^{3/2}-2x^{-3/2}$. За формулою похідної степеневої функції з довільним дійсним показником маємо $y'=3\cdot\dfrac{3}{2}x^{1/2}-2\left(-3/2\right)x^{-5/2}=\dfrac{9}{2}\sqrt{x}+3x^{-2,5}$. Відповідь: $4{,}5x^{0.5}+3x^{-2,5}$ при $x>0$. *

11. $f(x)=\ln x$. $g(x)=x^3$. Знайти $\left(f\left(g(x)\right)\right)'$ та $\left(g\left(f(x)\right)\right)'$.

* $f\left(g(x)\right)=\ln x^3=3\ln x$, отже, $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=\dfrac{3}{x}$ при $x>0$; $g\left(f(x)\right)=\left(\ln x\right)^3$, отже. $\left(g\left(f(x)\right)\right)'=3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}$ при $x>0$. Відповідь: $\dfrac{3}{x}$ при $x>0$ та $\dfrac{3}{x}\ln^2 x$ при $x>0$. *

12. $y=\left(\sin x\right)^x$. Знайти y'.

* $\ln y=x\ln\sin x$. $\dfrac{y'}{y}=\ln\sin x+\dfrac{x\cos x}{\sin x}$, отже, $y'=y\left(x\operatorname{ctg}x+\ln\sin x\right)$.

Відповідь: $y'=\left(\sin x\right)^x\left(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x\right)$ при $x\in\left(2\pi k,\ \pi\left(2k+1\right)\right)$, $k\in Z$. *

13. Довести, що функція $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ задовольняє співвідношення $y''=-9y$.

* $y'=2\left(-\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)3=-6\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $y''=-6\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)3=-18\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-9y$.

що й треба було довести. *

14. $y=\ln\left(\cos x\right)$. Знайти y''.

* $y'=\dfrac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right)=-\operatorname{tg}x$; $y''=\dfrac{-1}{\cos^2 x}$. Зрозуміло, що похідна існує тільки тоді, коли $\cos x>0$, тобто при $2\pi n-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. Відповідь: $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ при $x\in\left(2\pi n-\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi n+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n\in Z$. *

15. $y=e^x\sin x$. Знайти y'''.

* $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$, $y''=e^x\left(\sin x+\cos x\right)+e^x\left(\cos x-\sin x\right)=2e^x\cos x$, $y'''=2\left(e^x\cos x-e^x\sin x\right)$. Відповідь: $2e^x\left(\cos x-\sin x\right)$. *

16. Точка рухається за законом $S(t)=4t^3-3t^2+2t+1$. Знайти швидкість і прискорення руху.

* $v(t)=S'(t)=12t^2-6t+2$, $a(t)=v'(t)=24t-6$. Відповідь: $12t^2-6t+2$; $24t-6$. *

17. Знайти n-у похідну від функції $y=x^n$, $n\in\mathbf{N}$.

* $y'=nx^{n-1}$, $y''=n(n-1)x^{n-2}$,.... Продовжуючи далі, знаходимо $y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!$ Відповідь: $n!$ *

18. Довести, що $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$, $n\in\mathbf{N}$.

* Доведення проведемо методом математичної індукції.

1) $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, що справедливо.

2) Нехай $(\sin x)^{(m)}=\sin\left(\frac{\pi m}{2}+x\right)$, тоді

$$(\sin x)^{(m+1)}=\left(\sin\left(\frac{\pi m}{2}+x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi m}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi m}{2}+\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(m+1)+x\right),$$

що завершує доведення. *

19. Дослідити на опуклість функції:

а) $y=2x^2-4x+1$; б) $y=\frac{x-1}{3x+1}$; в) $y=\frac{1}{x^2+1}$.

* а) $y'=4x-4$; $y''=4>0$. Отже, функція опукла донизу на всій числовій прямій;

б) $y'=\frac{3x+1-3(x-1)}{(3x+1)^2}=\frac{4}{(3x+1)^2}$ при $x\neq-\frac{1}{3}$, $y''=4(-2)(3x+1)^{-3}\cdot 3=-24(3x+1)^{-3}$ при $x\neq-\frac{1}{3}$.

Оскільки чисельник цього дробу від'ємний, знак другої похідної залежить від знака знаменника:

$(3x+1)^3>0$ при $x>-\frac{1}{3}$, отже, при $x>-\frac{1}{3}$ $y''<0$ і функція опукла догори;

$(3x+1)^3<0$ при $x<-\frac{1}{3}$, отже, при $x<-\frac{1}{3}$ функція опукла донизу;

в) $y=(x^2+1)^{-1}$. $y'=-(x^2+1)^{-2}\cdot 2x$, $y''=-2\left((x^2+1)^{-2}-2(x^2+1)^{-3}2x^2\right)=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$;

$y''=0$, $3x^2-1=0$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Функція опукла донизу на кожному з проміжків $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ та $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$, функція опукла догори на проміжку $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Графік функції має дві точки перегину: $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ та $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. *

Вправи

1. Знайти похідну функції і встановити область існування похідної:

а) $y=3x^6-4x^5+5x^4-6x^3+7x^2-8x+9$; б) $y=\dfrac{4x-2}{x+3}$; в) $y=\dfrac{1}{(x-4)(x+2)}$;

г) $y=\dfrac{x}{x^3+x+2}$; д) $y=\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2-x+1}$; е) $y=\left(x^2-4x+1\right)\left(2x^3-x^2+x+2\right)$;

є) $y=\dfrac{1-x-2x^2}{3x^2+x+1}$; ж) $y=\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)\left(4x^2-x+2\right)$; з) $y=\dfrac{x^3+x^2-x+2}{3x^{-1}-2\sqrt{x}}$;

и) $y=\left(x^2-4x+1\right)^3$; і) $y=2\sqrt{3-2x-7x^2}$; ї) $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}}$; й) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

2. Точка рухається прямолінійно за законом $S(t)=2t^3-3t^2+5t+2$. Знайти швидкість та прискорення руху.

3. а) $y=3\cos\left(2-4x+x^2\right)$. Знайти $y'(0)$;

б) $y=4\operatorname{ctg}\dfrac{x+2}{x-2}$. Знайти $y'(0)$;

в) $y=3\arccos(1-5x)$. Знайти $y'(0{,}2)$;

г) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. Знайти $y'(0)$.

4. Знайти похідну функції:

а) $y=4\sin x-3\cos x$; б) $y=2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x$;

в) $y=4\cos^2 3x-2\cos 2x+\sqrt{\sin x}$; г) $y=2\operatorname{tg}^2\sqrt{1-x^2}$.

5. а) $y=\log_2\left(\sin^2 x-\sin x+2\right)$. Знайти $y'(0)$;

б) $y=3^{\frac{x-4}{x+1}}$. Знайти $y'(1)$;

в) $y=2\sin\left(\ln\dfrac{x-1}{x+2}\right)$. Знайти $y'(2)$.

6. Довести, що функція $y=3\sin\left(2x-\pi/6\right)$ задовольняє співвідношення $y''=-4y$.

7. $f(x)=\sqrt{x}$. $g(x)=\cos 2x$, $u(x)=f\left(g(x)\right)$, $v(x)=g\left(f(x)\right)$. Знайти $u'(x)$ та $v'(x)$.

8. За допомогою логарифмічного диференціювання знайти похідну функції а) $y=x^{x^2}$, б) $y=x^{\cos x}$.

Відповіді до вправ

§ 1. 1. $y'(x)=\frac{15}{(3x+2)^2}$; $y'(0)=\frac{15}{4}$. **2.** $-2x^{-3}$. **3.** $x\in(0;\,4)$. **4.** arctg 4/3. **5.** 7.

6. $y'=-39(4x+7)^{-2}$, $y'(0)=-\frac{39}{49}$. **8.** а) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\frac{-39(3x+1)^2}{(x-4)^4}$; в) $\frac{-(4x+1)}{(2x^2+x+4)^2}$.

§ 2. 1. а) $18x^5-20x^4+20x^3-18x^2+14x-8$ при $x\in\mathbf{R}$; б) $14(x+3)^2$ при $x\neq-3$;

в) $\frac{2-2x}{(x^2-2x-8)^2}$ при $x\neq-2$, $x\neq4$; г) $\frac{2-2x^3}{(x^3+x+2)^2}$ при $x\neq-1$; д) $\frac{x^{-1}-2x^3+2x^2-2x+2}{(x^2-x+1)^2}$ при

$x\in\mathbf{R}$; е) $10x^4-36x^3+21x^2-6x-7$ при $x\in\mathbf{R}$; є) $(x^2-10x-2)(3x^2+x+1)^{-2}$ при $x\in\mathbf{R}$;

ж) $20x^{1,5}-3x^{0,5}+2x^{-1/2}+2x^{-2}-4$, $x>0$; з) $\frac{-5x^{2,5}+3x^{1,5}+12x+x^{0,5}+2x^{-0,5}-6x^{-1}+6x^{-2}+9}{(3x^{-1}-2\sqrt{x})^2}$

при $x>0$, $x\neq\sqrt[3]{9/4}$; и) $6(x-2)(x^2-4x+1)^2$ при $x\in\mathbf{R}$; і) $\frac{-2(1+7x)}{\sqrt{3-2x-7x^2}}$ при $x\in\left(\frac{-1-\sqrt{22}}{7};\frac{-1+\sqrt{22}}{7}\right)$;

ї) $3{,}5(x+4)^{-2}\sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(-3;+\infty)$; й) $\frac{1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x(x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})}}$

при $x>0$. **2.** $v(t)=6t^2-6t+5$; $a(t)=12t-6$. **3.** а) $12\sin 2$; б) $4(\sin 1)^2$; в) 15; і) 2.

4. а) $4\cos x+3\sin x$, $x\in\mathbf{R}$; б) $\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}$ при $x\neq\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $-12\sin 6x+4\sin 2x+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

при $x\in(2\pi n;\,\pi(2n+1))$; г) $\frac{-4x\,\mathrm{tg}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cos^2\sqrt{1-x^2}}$. $-1<x<1$. **5.** а) $-0{,}5(\ln 2)^{-1}$; б) $\frac{5\ln 3}{4\sqrt{27}}$;

в) $1.5\cos\ln\frac{1}{4}$. **7.** $\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ та $-\frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. **8.** а) $x^{x^x+1}(2\ln x+1)$; б) $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)$.

Тема 14. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

§ 1. Дотична

На рис. 14.1 дотична до графіка функції $y = f(x)$ проведена у точці $A(x_0, f(x_0))$. Відомо, що рівняння прямої має вигляд $y = kx + b$, де кутовий коефіцієнт прямої $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α — кут між прямою і додатним напрямом осі Ox). Як було доведено раніше, $k = f'(x_0)$. Отже, рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0)\,x + b. \tag{14.1}$$

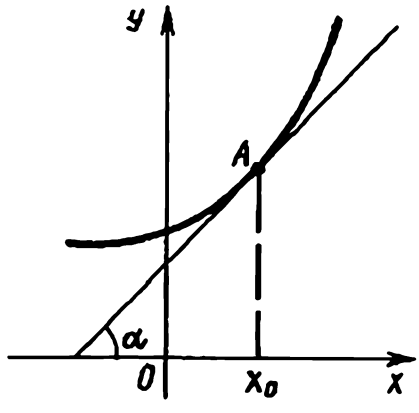


Рис. 14.1

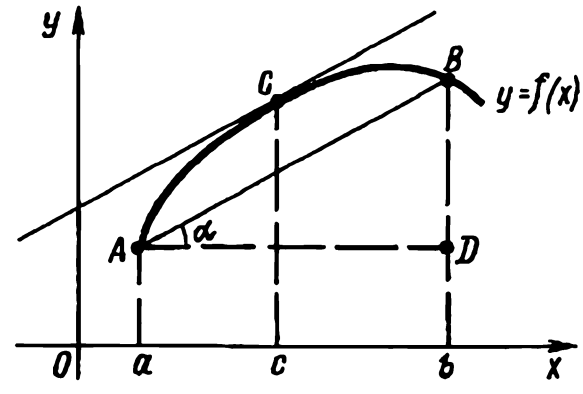


Рис. 14.2

Оскільки точка A лежить на дотичній, то $y(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + b$, звідки $b = y(x_0) - f'(x_0)\,x_0$. Підставляючи це значення у рівняння (14.1), маємо рівняння дотичної

$$y - y(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{14.2}$$

На рис. 14.2 показано дугу графіка функції $y = f(x)$. Ця функція диференційовна при $x \in (a; b)$. Розглянемо хорду AB цієї дуги, де $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Нехай $AD \perp BD$, $\angle BAD = \alpha$, $k = \operatorname{tg}\alpha$ — кутовий коефіцієнт прямої AB, тоді

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

З усіх прямих, паралельних відрізку AB, виберемо пряму, що дотикається до графіка функції у деякій точці $C(c; f(c))$. Враховуючи геометричний зміст похідної, маємо $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$, або

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{14.3}$$

Ця формула називається *формулою Лагранжа*, а вираз $f'(x)\,\Delta x$ — диференціалом функції $y = f(x)$ і позначається так:

$$dy = y'\Delta x = f'(x)\,\Delta x. \tag{14.4}$$

Оскільки для функції $y = x$ маємо $y' = 1$, то $dx = \Delta x$ і формулу (14.4) можна записати у такому вигляді:

$$dy = y'dx = f'(x)\,dx. \qquad (14.5)$$

Якщо позначити $x_2 - x_1 = \Delta x$ і $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$, то формулу Лагранжа можна записати у такому вигляді:

$$\Delta y = f'(c)\,\Delta x, \quad c \in (x_1; x_2). \qquad (14.6)$$

Нехай $x - x_0 = \Delta x$. При малому Δx матимемо $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$, отже, для наближених обчислень

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (14.7)$$

Приклади

1. Записати рівняння дотичної, яку проведено до графіка функції $y = 3 - 2x - 4x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

* Визначимо ординату точки дотику: $y(x_0) = 3 - 2 - 4 = -3$, отже точка дотику $A(1; -3)$. Знаходимо $y' = -2 - 8x$, $y'(x_0) = f'(x_0) = -2 - 8 = -10$. За формулою (14.2) дістаємо рівняння дотичної: $y - (-3) = -10(x - 1)$, або $y = -10x + 7$. *

2. В якій точці графіка функції $y = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ треба провести дотичну з кутовим коефіцієнтом $k = 5$? Записати рівняння цієї дотичної.

* Знаходимо $y' = 12x^2 - 4x - 3$. Оскільки $k = y'(x_0)$, маємо рівняння $12x^2 - 4x - 3 = 5$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = -2/3$. Далі знаходимо $y(1) = 1$, $y(-2/3) = 52/27$. Отже, можливі дві точки дотику: $A(1; 1)$ та $B(-2/3; 52/27)$. Відповідно маємо два рівняння дотичної: $y - 1 = 5(x - 1)$ або $y - 52/27 = 5(x + 2/3)$. *

3. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \ln x$, яка проходить через точку $O(0; 0)$.

* Оскільки $y' = \dfrac{1}{x}$, рівняння дотичної має вигляд $y - \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$, де x_0 — абсциса точки дотику. Оскільки дотична проходить через точку $O(0; 0)$, дістанемо рівність $-\ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}(-x_0)$, або $\ln x_0 = 1$, звідки $x_0 = e$, $y(x_0) = \ln e = 1$. Отже, $A(e, 1)$ — точка дотику, тоді рівняння дотичної має вигляд $y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e)$ або $y = \dfrac{x}{e}$. *

4. Знайти наближено $\sqrt{37}$.

* Нехай $y = \sqrt{x}$. тоді $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. За формулою (14.7) маємо $\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$. Нехай $x_0 = 36$. $\Delta x = 37 - 36 = 1$. Тоді $\sqrt{37} \approx \sqrt{36} + \dfrac{1}{2\sqrt{36}} \cdot 1 = 6 + \dfrac{1}{12} \approx 6{,}08$. *

5. Знайти наближено $\sqrt[3]{8{,}5}$.

* Нехай $y = \sqrt[3]{x}$, тоді $y' = (x^{1/3})' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$. За формулою (14.7) маємо $\sqrt[3]{x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \dfrac{1}{3}(x_0)^{-2/3}\Delta x$. Виберемо $x_0 = 8$, тоді $\Delta x = 0{,}5$. Далі маємо $\sqrt[3]{8{,}5} \approx \sqrt[3]{8} + 0{,}5 \cdot \dfrac{1}{3}(8)^{-2/3} = 2 + \dfrac{0{,}5}{12} \approx 2{,}04$. *

6. Довести, що для малих значень Δx виконується наближена рівність $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$, $n \in \mathbf{N}$.

* Нехай $f(x) = x^n$, $x_0 = 1$, тоді $f'(x) = nx^{n-1}$, $f'(1) = n$. За формулою (14.7) маємо $x^n \approx 1 + n\Delta x$. Враховуючи, що $x = 1 + \Delta x$, дістанемо: $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$. *

§ 2. Зростання і спадання функцій

Теорема. *Якщо у кожній точці проміжку $(a; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція $y = f(x)$ зростає на цьому проміжку. Якщо у кожній точці проміжку $(a; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція $y = f(x)$ спадає на цьому проміжку.*

* Нехай $a < x_1 < x_2 < b$. За формулою Лагранжа існує точка $c \in (x_1, x_2)$ така, що $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Якщо похідна додатна для всіх $x \in (a; b)$, то $f'(c) > 0$. Звідси дістанемо $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. Таким чином, із нерівності $x_1 < x_2$ при $f'(x) > 0$ дістаємо нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, тобто функція зростає. Аналогічне доведення і при $f'(x) < 0$. *

Приклади

1. Знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x) = x - 2x^4$.

* Ця функція визначена і диференційовна при $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 1 - 8x^3$. Далі розв'язуємо нерівність $f'(x) > 0$, або $1 - 8x^3 > 0$, або $8x^3 < 1$, звідки $x < 0{,}5$. Аналогічно знаходимо, що $f'(x) < 0$ при $x > 0{,}5$. Відповідь: функція зростає при $x \in (-\infty; 0{,}5)$, спадає при $x \in (0{,}5; +\infty)$. *

2. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x.$$

* Знаходимо $f'(x) = x^2 + 2x - 3$. Далі розв'язуємо нерівність $f'(x) > 0$, або $x^2 + 2x - 3 > 0$. Розв'язок цієї нерівності: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. Аналогічним чином знаходимо, що при $x \in (-3; 1)$ функція спадає. Відповідь: функція зростає при $x \in (-\infty; -3)$ та $x \in (1; +\infty)$, спадає при $x \in (-3; 1)$. *

3. Довести, що рівняння $2x + \cos x = 0$ має єдиний корінь: $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

* Розглянемо функцію $f(x) = 2x + \cos x$, знаходимо $f'(x) = 2 - \sin x$. Очевидно, що $f'(x) > 0$ при $x \in \mathbf{R}$, отже $f(x)$ зростає при $x \in \mathbf{R}$. Тому вона не може мати більше одного нуля. Оскільки $f(-\pi/2) = -\pi < 0$, а $f(0) = 1 > 0$, корінь рівняння $f(x) = 0$ знаходиться на проміжку $(-\pi/2; 0)$ (функція $f(x)$ неперервна). *

§ 3. Локальний екстремум

Означення. Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, якщо існує проміжок $(x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x)$, де виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$, причому рівність досягається лише при $x = x_0$. На рис. 14.3 зображено графік деякої функції при $x \in [a; b]$.

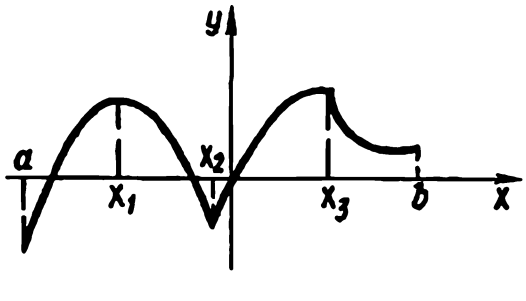


Рис. 14.3

Ця функція має локальні максимуми у точках x_1, x_3 та локальний мінімум у точці x_2. Запис такий: $y(x_1) = y_{max}$, $y(x_2) = y_{min}$, $y(x_3) = y_{max}$. Точки локального максимуму та мінімуму функції іноді називають *точками локального екст-*

ремуму (від лат. extremum — крайній). Значення функції у точках локального екстремуму називаються *екстремальними значеннями*.

Зауваження. Кінці відрізка $[a; b]$ не можуть бути точками локального екстремуму, оскільки проміжок, який містить кінець відрізка, не належить відрізку.

Теорема Ферма. *Якщо x_0 — точка локального екстремуму функції $f(x)$ і у цій точці існує похідна, то $f'(x_0) = 0$.*

* Нехай x_0 — точка локального екстремуму функції $f(x)$, тоді $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, звідки $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0$. Причому $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$ і $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$. Якщо перейти до границі у цих нерівностях при $\Delta x \to 0$, дістанемо систему нерівностей

$$\begin{cases} f'(x_0) \le 0, \\ f'(x_0) \ge 0, \end{cases}$$

звідки $f'(x_0) = 0$. Якщо x_0 — точка локального мінімуму, доведення аналогічне.*

Обернена теорема не має місця. Наприклад, для функції $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$. Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$, тобто $3x^2 = 0$, звідки $x = 0$. Але точка $x = 0$ не є точкою локального екстремуму.

Зауваження. Цей приклад свідчить про те, що функція може зростати на проміжку $(a; b)$ не тільки у випадку $f'(x) > 0$, але й у тому випадку, коли $f'(x) \ge 0$, причому $f'(x) = 0$ лише у скінченному числі точок.

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, для яких похідна дорівнює нулю, або не існує, називаються *критичними точками функції*.

Зауважимо, що точка локального екстремуму є критичною (але не навпаки). Як саме серед критичних точок виділити точки локального екстремуму? Відповідь на це запитання дають дві теореми.

Теорема 1. *Якщо $f'(x_0) = 0$, причому поблизу точки x_0 ліворуч від неї $f'(x) > 0$, а праворуч від неї $f'(x) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму функції.*

* За умовою існує проміжок $(x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x)$ такий, що при $x \in (x_0 - \Delta x; x_0)$ $f'(x) > 0$, а при $x \in (x_0; x_0 + \Delta x)$ $f'(x) < 0$, тобто, на проміжку $(x_0 - \Delta x; x_0)$ функція $f(x)$ зростає, а на проміжку $(x_0; x_0 + \Delta x)$ спадає. Таким чином, для будь-якого $x \in (x_0 - \Delta x; x_0 + \Delta x)$ виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ (рівність досягається лише при $x = x_0$). Отже, x_0 – точка локального максимуму.*

Теорема 2. *Якщо $f'(x_0) = 0$, причому поблизу точки x_0 ліворуч від неї $f'(x) < 0$, а праворуч від неї $f'(x) > 0$,* то x_0 — *точка локального мінімуму.*

Доведення аналогічне доведенню попередньої теореми.

Приклади

1. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

* Дана функція визначена і диференційовна при $x \in \mathbf{R}$. Знайдемо похідну функції

$f'(x) = ((1+x^2)^{-1})' = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Щоб визначити критичні точки функції, розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$, тобто $\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0$, звідки $x = 0$ (одна критична точка). При $x < 0$ $f'(x) > 0$, при $x > 0$ $f'(x) < 0$. Звідси дістаємо, що $y(0) = y_{max} = 1$, функція зростає при $x \in (-\infty; 0)$, спадає при $x \in (0; +\infty)$. *

2. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$.

* Функція визначена і диференційовна при $x \in \mathbf{R}$. Знаходимо $y' = x^2 - x - 6$. Далі розв'язуємо рівняння $y' = 0$, тобто $x^2 - x - 6 = 0$, звідки знаходимо $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ (критичні точки). При $x \in (-\infty; -2)$ маємо $y' > 0$, при $x \in (-2; 3)$ $y' < 0$, при $x \in (3; +\infty)$ $y' > 0$. Отже, функція зростає при $x \in (-\infty; -2)$ та $x \in (3; +\infty)$, спадає при $x \in (-2; 3)$; $y_{max} = y(-2) = \dfrac{22}{3}$, $y_{min} = y(3) = -13{,}5$. *

3. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $y = x^3 - x|x+1|$.

* Функція визначена і диференційовна для всіх точок дійсної осі, крім $x = -1$. У точці $x_0 = -1$ похідної не існує, отже, $x_0 = -1$ критична точка. Крім цієї знайдемо точки, де $y' = 0$. Оскільки

$$y = \begin{cases} x^3 - x^2 - x & \text{при } x \ge -1, \\ x^3 + x^2 + x & \text{при } x < -1, \end{cases}$$

то

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1, & x \ge -1. \\ 3x^2 + 2x + 1 & x < -1. \end{cases}$$

Рівняння $y' = 0$ має два корені: $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1$. При $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; -1/3)$ маємо $y' > 0$, при $x \in (-1/3; 1)$ $y' < 0$, при $x \in (1; +\infty)$ $y' > 0$. Звідси маємо $y_{max} = y(-1/3) = \dfrac{5}{27}$, $y_{min} = y(1) = -1$, функція зростає при $x \in (-\infty; -1/3)$ та $x \in (1; +\infty)$, спадає при $x \in (-1/3; 1)$. *

§ 4. Опуклість функції

У цьому параграфі розглядатимемо такі *функції, для яких графіки є гладкими кривими*, тобто у кожній точці існує дотична (означення опуклої функції див. у темі 13, § 2).

Теорема. *Якщо при $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f''(x) > 0$, то функція опукла донизу на цьому проміжку.*

* Нехай $x_0 \in (a; b)$ і $f''(x) > 0$ при всіх $x \in (a; b)$, зокрема $f''(x_0) > 0$. Дотична, що проведена у точці $x = x_0$, має рівняння

$$y_д = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (14.8)$$

Віднімаючи почленно це рівняння від рівняння $y = f(x)$, дістанемо

$$y - y_д = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \qquad (14.9)$$

Нехай $x_0 < x$. За теоремою Лагранжа знайдеться число $c \in (x_0; x)$ таке, що $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Рівність (14.9) набирає вигляду $y - y_д = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)(f'(c) - f'(x_0))$. За формулою Лагранжа

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0), \text{ де } c_1 \in (x_0; c).$$

Звідси дістанемо $y - y_д = (x - x_0)(c - x_0) f''(c_1) > 0$, оскільки $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$, $f''(c_1) > 0$. Отже, при $x \in (a; b)$, $x \neq x_0$ маємо $y > y_д$, тобто функція опукла донизу. Аналогічно доводимо опуклість догори, якщо $f''(x) < 0$. *

Приклади

1. Дослідити на опуклість функцію $f(x) = \sin x$ при $x \in (-\pi; \pi)$.

* Знаходимо $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. Зауважимо, що $f''(x) > 0$ при $x \in (-\pi; 0)$ і $f''(x) < 0$ при $x \in (0; \pi)$. Тобто при переході через точку $x = 0$ друга похідна змінює знак з «+» на «–», а тому $x = 0$ — точка перегину. Отже, функція $y = \sin x$ опукла донизу при $x \in (-\pi; 0)$ і опукла догори при $x \in (0; \pi)$. *

2. Дослідити на опуклість функцію $y = x - x^3$.

* Знаходимо $y' = 1 - 3x^2$. $y'' - 6x$. Далі маємо $y'' = 0$ при $x = 0$ $y'' < 0$ при $x > 0$, $y'' > 0$ при $x < 0$. Аналізуючи ці результати, одержимо відповідь: функція опукла донизу при $x \in (-\infty; 0)$, опукла догори при $x \in (0; +\infty)$; точка $x = 0$ — точка перегину. *

3. Довести, що функція $y = x\ln x$ опукла донизу при $x \in (0; +\infty)$.

* Знаходимо $y' = \ln x + 1$, $y'' = 1/x$. Оскільки $y'' > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, то функція $y = x\ln x$ опукла донизу, що й треба було довести. *

§ 5. Побудова графіка функції

Загальна схема дослідження функції зводиться до знаходження: а) області визначення функції; б) нулів та знаків функції; в) проміжків монотонності та локальних екстремумів; г) проміжків опуклості та точок перегину; д) точок перетину графіка з осями координат та інших значень функції в окремих точках.

У деяких випадках *додатково досліджуємо*: е) симетрію графіка відносно деякої прямої або точки; є) періодичність функції; ж) поведінку функції поблизу особливих точок і коли $x \to \pm\infty$.

Цю схему застосуємо при дослідженні функції $y = 2x^2 - x^3$ і побудові її графіка. За схемою знаходимо: а) область визначення функції $D(y) = \mathbf{R}$; б) $y = x^2(2 - x)$, знаходимо нулі функції, тобто розв'язуємо рівняння $y = 0$, або $x^2(2 - x) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Функція додатна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$, від'ємна при $x \in (2; +\infty)$; в) знаходимо $y' = 4x - 3x^2 = x(4 - 3x)$, розв'язуємо рівняння $y'(x) = 0$, або $x(4 - 3x) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 4/3$. При $x \in (-\infty; 0)$ маємо $y' < 0$, функція спадає; при $x \in (0; 4/3)$ $y' > 0$, функція зростає; при $x \in (4/3; +\infty)$ $y' < 0$, функція спадає. Таким чином, $x = 0$ — точка мінімуму, $y_{min} = y(0) = 0$; а $x = 4/3$ — точка максимуму, $y_{max} = y(4/3) = 32/27$; г) знаходимо $y'' = 4 - 6x$, розв'язуємо рівняння $y'' = 0$, тобто $4 - 6x = 0$, звідки $x = 2/3$. При $x < 2/3$ маємо $y'' > 0$, отже, функція опукла донизу, при $x > 2/3$ $y'' < 0$, функція опукла догори, точка перегину $x = 2/3$; д) будуємо графік функції, враховуючи інформацію пунктів а — г (рис. 14.4).

Приклади

1. Дослідити функцію $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

* Згідно зі схемою дослідження знаходимо: а) область визначення функції D (*y*): $x^2 - 1 \neq 0$. звідси $x \neq \pm 1$, графік має дві вертикальні асимптоти: $x = -1$, $x = 1$; б) оскільки $f(-x) = -f(x)$,

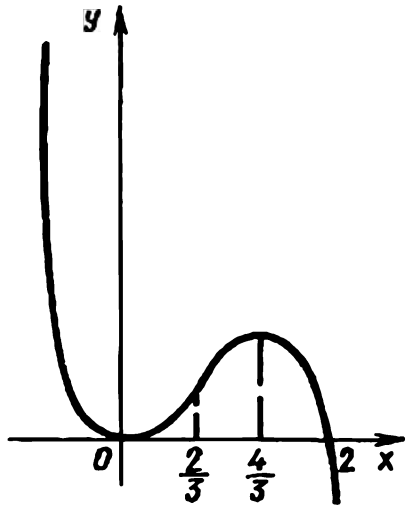


Рис. 14.4

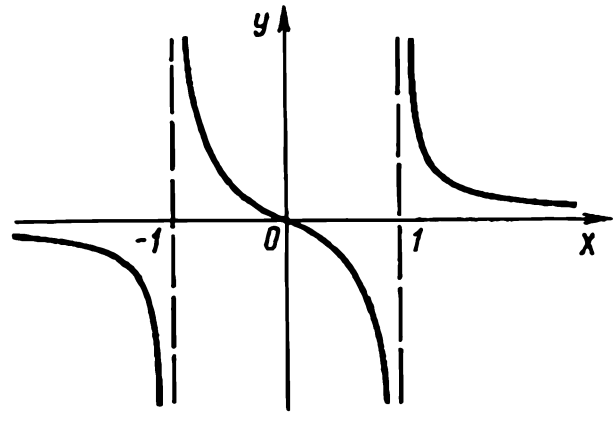


Рис. 14.5

функція непарна, то досить її дослідити при $x \geq 0$; в) функція має єдиний корінь $x = 0$; $y < 0$ при $x \in (0; 1)$, $y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; г) знаходимо $y' = \dfrac{\left(x^2 - 1\right) - 2x^2}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \dfrac{-\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$. Очевидно, що $y' < 0$ для всіх точок із області D (*y*), отже, функція спадає, екстремумів немає; д) знаходимо $y'' = \dfrac{2x\left(3 + x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$. При $x \in (0; 1)$, $y'' < 0$, функція опукла догори, $y'' > 0$ при $x \in (1; +\infty)$,

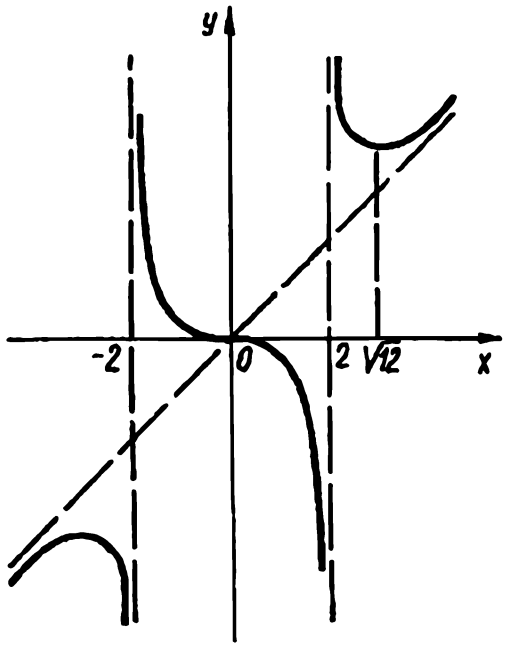


Рис. 14.6

функція опукла донизу; точка перегину $x = 0$; е) $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$. графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$. Будуємо графік функції (рис. 14.5). *

2. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ та побудувати її графік.

* Знаходимо: а) область визначення функції *D* (*y*): $x^2 - 4 \neq 0$ або $x \neq \pm 2$. В точках $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ функція має вертикальні асимптоти; б) оскільки $y(-x) = -y(x)$, функція непарна, тому досить дослідити її при $x \in [0; +\infty)$, а потім симетрично початку координат відобразити її; в) знаходимо нулі функції, розв'язуючи рівняння $y(x) = 0$, або $\dfrac{x^3}{x^2 - 4} = 0$, звідки $x = 0$; $y < 0$ при $x \in (0; 2)$,

$y > 0$ при $x \in (2; +\infty)$, г) знаходимо $y' = \dfrac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$; далі розв'язуємо рівняння $y' = 0$ або $x^2(x^2 - 12) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{12}$; $y' < 0$ при $x \in (0; 2)$ та $x \in (2; \sqrt{12})$ і функція спадає, $y' > 0$ при $x \in (\sqrt{12}; +\infty)$ функція зростає, отже, $x = \sqrt{12}$ — точка мінімуму, $y(\sqrt{12}) = y_{\min} = 3\sqrt{3}$; д) знаходимо $y'' = \dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$. розв'язуємо рівняння $y'' = 0$, звідки $x = 0$; $y'' < 0$ при $x \in (0, 2)$, функція опукла догори; $y'' > 0$ при $x \in (2; +\infty)$, функція опукла донизу: е) виконуємо перетворення $y = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x^2-4} = 0$, отже, графік даної функції наближається до графіка функції $y = x$ при $x \to \infty$, тобто пряма $y = x$ є похилою асимптотою. Будуємо графік функції $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ (рис. 14.6). *

§ 6. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції

Якщо для будь-якого $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$, причому рівність досягається лише при $x = x_0$, то число x_0 називається *точкою абсолютного максимуму функції на множині M*. Позначаємо так: $\max\limits_{x\in M} f(x) = f(x_0)$.

Аналогічно визначаємо *точку абсолютного мінімуму функції на множині* M ($f(x) \ge f(x_1)$) і позначаємо так: $\min\limits_{x\in M} f(x) = f(x_1)$.

Часто $f(x_0)$ називають *найбільшим значенням*, а $f(x_1)$ — *найменшим значенням* функції на множині M. Наприклад, $\min\limits_{x\in M} x^2 = 0$, $\max\limits_{x\in[0,2\pi]} \sin x = 1$, $\min\limits_{x\in M} \cos x = -1$ і т. д.

Зауважимо, що функція може не мати найбільшого (найменшого) значення. Наприклад, $\max\limits_{x\in R} x^3$ не існує, $\min\limits_{x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)} \operatorname{tg} x$ не існує.

Сформулюємо *правило для знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції при* $x \in [a; b]$: а) знайти похідну; б) знайти критичні точки функції на проміжку $(a; b)$; в) знайти значення функції в критичних точках, $f(a)$, $f(b)$, і вибрати з цих значень найбільше та найменше.

Приклади

1. Знайти найбільше й найменше значення функції $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ при $x \in [0; 4]$.

* Знаходимо $y' = x^2 - 4x + 3$, розв'язуємо рівняння $y' = 0$ або $x^2 - 4x + 3 = 0$, корені якого $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Обидва корені належать проміжку [0; 4]. Знаходимо $y(0) = 1$, $y(1) = 7/3$, $y(3) = 1$, $y(4) = 7/3$. Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;4]} y(x) = 7/3$, $\min\limits_{x\in[0;4]} y(x) = 1$. *

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ при $x \in [0; 1]$.

* Знаходимо $f'(x) = \dfrac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}$, розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$, або $2 - 2x = 0$, звідки $x = 1$.

Далі знаходимо $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Відповідь: $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = 1$, $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = 0$. *

§ 7. Задачі на екстремум

Розв'язування задач на екстремум покажемо на прикладах.

Приклади

1. Зобразити додатне число a у вигляді добутку двох додатних чисел, сума яких мінімальна.

* Нехай x — один із множників, тоді $\dfrac{a}{x}$ — другий множник. Складаємо функцію $f(x) = x + \dfrac{a}{x}$, тоді $f'(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2}$; розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$, $1 - \dfrac{a}{x^2} = 0$, звідки $x = \sqrt{a}$.

При $0 < x < \sqrt{a}$ маємо $f'(x) < 0$, функція спадає, при $x > \sqrt{a}$ $f'(x) > 0$, функція зростає, отже, точка $x = \sqrt{a}$ — точка мінімуму, $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a} + \dfrac{a}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$.

Відповідь: $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$. *

2. Знайти число, сума якого з його квадратом найменша.

* Нехай x — невідоме число. Розглянемо $f(x) = x + x^2$, тоді $f'(x) = 1 + 2x$. Далі розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$; $2x + 1 = 0$, звідси $x = -0{,}5$. Точка M $(-0{,}5; -0{,}25)$ є вершиною параболи $y = x + x^2$, а у вершині цієї параболи досягається найменше значення. Відповідь $-0{,}5$. *

§ 8. Доведення нерівностей

Нехай треба довести нерівність $f(x) \geq 0$ при $x \in M$. Ця задача рівносильна такій: довести, що $\min\limits_{x\in M} f(x) = 0$. Аналогічно замість нерівності $f(x) \leq 0$ можна довести, що $\max\limits_{x\in M} f(x) = 0$. Наприклад, доведемо, що при $x \geq 0$ справедлива нерівність $x^n - nx + n \geq 1$, де $n \in \mathbf{N}$.

* Розглянемо функцію $f(x) = x^n - nx + n - 1$, $x \in [0; +\infty)$. Знайдемо $f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$. Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$, звідки $x = 1$. Якщо $n = 1$, то дана нерівність справедлива при будь-якому x. Якщо $n > 1$, то $f'(x) < 0$ при $0 \leq x < 1$ і $f'(x) > 0$ при $x > 1$. Отже, при $n > 1$ $\min\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x) = f(1) = 0$, звідки маємо $f(x) \geq 0$, що й треба було довести. Рівність досягається при $x = 1$ $(n > 1)$ і при будь-якому x, якщо $n = 1$. *

Приклади

1. Довести нерівність $e^x \geq ex$.

Нехай $f(x) = e^x - ex$, $x \in \mathbf{R}$. Знаходимо $f'(x) = e^x - e$, $f'(x) = 0$ при $x = 1$; $f'(x) < 0$ при $x < 1$. $f'(x) > 0$ при $x > 1$. Отже, $\min\limits_{x \in R} f(x) = f(1) = 0$, звідки і дістаємо потрібну нерівність.

2. Довести нерівність $e^x \geq 1 + x$ при $x \in \mathbf{R}$.

*Нехай $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$. Знаходимо $f'(x) = e^x - 1$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$; $f'(x) < 0$ при $x < 0$, $f'(x) > 0$ при $x > 0$. Отже, $x = 0$ — точка мінімуму, $\min\limits_{x \in R} f(x) = f(0) = 0$, звідки дістаємо задану нерівність. Рівність досягається лише при $x = 0$. *

Зауваження. Якщо покласти у попередній нерівності $x = z - 1$, дістанемо

$$e^{z-1} \geq z \qquad (П14.1)$$

для будь-якого дійсного z, причому рівність досягається тільки при $z = 1$.

Нехай маємо невід'ємні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Позначимо їх середнє арифметичне через a, тобто

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Якщо у нерівність (П14.1) послідовно підставляти значення $z_1 = \frac{x_1}{a}$, $z_2 = \frac{x_2}{a}$, ..., $z_n = \frac{x_n}{a}$, дістаємо $e^{\frac{x_1}{a}-1} \geq \frac{x_1}{a}$, $e^{\frac{x_2}{a}-1} \geq \frac{x_2}{a}$, ..., $e^{\frac{x_n}{a}-1} \geq \frac{x_n}{a}$. Помножимо почленно відповідні частини цих нерівностей:

$$e^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{a}-n} \geq \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{a^n}; \text{ або } 1 \geq \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{a^n},$$

звідки $a \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, або

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \qquad (П14.2)$$

де $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$. Нерівність (П14.2) називається *нерівністю Коші*.

Іноді справедливість нерівності випливає з монотонності деякої функції.

3. Відомо, що $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$. Довести, що $\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y}$.

* Розглянемо функцію $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Знаходимо $f'(\alpha) = \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2} = \frac{\cos \alpha}{\alpha^2} \times$ $\times (\alpha - \operatorname{tg} \alpha)$. Відомо, що $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $\alpha - \operatorname{tg} \alpha < 0$ при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і $f'(\alpha) < 0$, функція $f(\alpha)$ спадає. Звідси і дістанемо задану нерівність.*

4. Порівняти числа 17^{19} та 19^{17}.

* Розглянемо функцію $y = \frac{\ln x}{x}$. Знаходимо $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. $y' = 0$ при $x = e$; $y' < 0$ при $x > e$. Отже, при $x > e$ функція спадає. Звідси випливає, що $\frac{\ln 19}{19} < \frac{\ln 17}{17}$ або $17 \ln 19 < 19 \ln 17$, або $\ln 19^{17} < \ln 17^{19}$, тобто $19^{17} < 17^{19}$. *

§ 9. Доведення тотожностей

Теорема. *Якщо похідна деякої функції при* $x \in (a; b)$ *дорівнює нулю, то ця функція стала.*

* Візьмемо дві точки: $x_1, x_2 \in (a; b)$. За формулою Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, де $c \in (x_2; x_1)$. Оскільки $f'(c) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$ і функція $f(x)$ стала. *

Приклади

1. Довести тотожність $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

* Нехай $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, тоді $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$, отже, $f(x) = f(0) = \operatorname{arctg} 0 +$ $+ \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. *

2. Довести тотожність

$\sin^2(x + \alpha) + \cos^2(x - \alpha) - \sin 2x \sin 2\alpha = 1$.

* Нехай $f(x) = \sin^2(x + \alpha) + \cos^2(x - \alpha) - \sin 2x \sin 2\alpha$, тоді $f'(x) = 2\sin(x + \alpha)\cos(x + \alpha) +$ $+ 2\cos(x - \alpha)(-\sin(x - \alpha)) - 2\cos 2x \sin 2\alpha = \sin 2(x + \alpha) - \sin 2(x - \alpha) - 2\cos 2x \sin 2\alpha =$ $= 2\sin 2\alpha \cos 2x - 2\cos 2x \sin 2\alpha = 0$, $f(x) = \text{const}$. Отже, $f(x) = f(0) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, що й треба було довести. *

Вправи

1. Знайти рівняння дотичної, яка проведена до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0:

а) $f(x) = 3x^2 - x + 1$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = 3 - 5x + 2x^2$, $x_0 = 1$; в) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$, $x_0 = 0$; г) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x - 2$, $x_0 = 1$; д) $f(x) = \frac{4x-1}{3x-2}$, $x_0 = -1$; е) $f(x) = \frac{5x+2}{x-4}$, $x_0 = 0$; є) $f(x) = x \ln x$, $x_0 = 1$; ж) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $x_0 = -1$; з) $f(x) = \sin x + \sin 2x$, $x_0 = \pi$; и) $f(x) = \frac{1-\cos x}{\cos 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; і) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = \pi$.

2. До графіка функції $y = x^2 + x + 1$ проведена дотична. Знайти координату точки дотику, якщо: а) ця дотична пройшла через початок координат, б) кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює нулю.

3. Маємо коло, рівняння якого $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Записати рівняння дотичної до цього кола, що проходить через початок координат.

4. На графіку функції $y = x^2 - 2x - 3$ знайти точку, в якій дотична паралельна прямій AB, де $A(-1; 0)$ і $B(4; 5)$.

5. Обчислити наближено: а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{63}$; г) $\sqrt{120}$; д) $\sqrt{1263}$; е) $\sqrt[3]{126}$.

6. Дослідити на монотонність та екстремуми функції:

а) $y = 3x^2 + x + 1$; б) $y = 1 - x - x^2$; в) $y = 2x^3 - 2x^2 - 2x$; г) $y = 4x^3 - 6x^2$; д) $y = \frac{x^2+1}{x}$; е) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$; є) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; ж) $y = 3^x + 3^{-x}$; з) $y = \ln(x^3 - 3x)$; и) $y = e^{x^2-5x+4}$.

7. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функцій:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$; в) $y = x^3 - x$; г) $y = \frac{1}{1+x^2}$; д) $y = \sin x + \cos x$; е) $y = x + \frac{1}{x}$; є) $y = x \ln x$; ж) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{10-x}$; з) $y = (x-1)e^x$; и) $y = \arcsin x$; і) $y = 2^x + 2^{-x}$.

8. Дослідити функцію та побудувати графік:

а) $y = 3 - x - 2x^2$; б) $y = x^3 - 2x^2 + 1$; в) $y = 2x^4 - x^2 - 1$; г) $y = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$; д) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$;

е) $y = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}$; є) $y = \frac{1}{x + 4} + \frac{1}{x - 1}$; ж) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2}$; з) $y = \sqrt{x + 7} + \sqrt{7 - x}$;

и) $y = (x + 1)^2 (x - 1)^2$; і) $y = \frac{2x^3 - x}{(x + 2)^3}$; ї) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; й) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; к) $y = x + x^{-2}$;

л) $y = x^3 e^{-x^2}$; м) $y = e^x + e^{-x}$; н) $y = x \ln x$; о) $y = \frac{x}{\ln x}$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції у заданому проміжку:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; $x \in [-1; 1]$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$; $x \in [-2; 2]$; в) $y = x^4 + 4x$; $x \in [-2; 2]$;

г) $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$, $x \in [-1; 3]$; д) $y = x^3 \cdot (8 - x)$, $x \in [0; 7]$; е) $y = \sin x \cos^2 x/2$, $x \in [0; \pi]$; є) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$,

$x \in [-5; -1]$; ж) $y = 1 + \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-6; 8]$; з) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$, $x \in [0; 4]$; и) $y = 4x^3 - x|x - 2|$,

$x \in [0; 3]$; і) $y = x|x - 1| - 5x^3$, $x \in [0; 2]$; ї) $y = x^3 - 2x|x - 2|$, $x \in [0; 2,5]$; й) $y = |x^2 - 2x - 3| + 1,5 \ln x$; $x \in [0,5; 4]$.

10. Довести нерівності:

а) $x^5 + (1 - x)^5 \geq \frac{1}{16}$, $x \in \mathbf{R}$; б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, $x > 0$; в) $x + \cos x < y + \cos y$ при

$0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

11. Довести, що а) $23^{31} > 31^{23}$; б) $1{,}3^{1.8} < 1{,}8^{1.3}$.

12. Довести тотожності:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \leq 1$; б) $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = 1{,}5$.

Відповіді до вправ

§ 9. 1. а) $y = 5x - 2$; б) $y = 1 - x$; в) $y = x - 4$; г) $y = 2x - 2$; д) $y = \frac{1}{5}(4 - x)$; е) $y = -\frac{11}{8}x - \frac{1}{2}$;

є) $y = x - 1$; ж) $y = 2{,}5 - 1{,}5 \ln 2(1 + x)$; з) $y = x - \pi$; и) $y + 1 = \frac{\pi}{2} - x$; і) $y = \pi^2 - \pi x$. **2.** а) (1; 3) або

(–1; 1); б) (–0,5; 0,75). **3.** $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ або $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$. **4.** (1,5; –3,75). **5.** а) 7,07; б) 3,875; в) 7,9375;

г) 10,954; д) 35,54; е) 5,013. **6.** а) зростає при $x \in \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$, спадає при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)$,

$y_{min} = y\left(-\frac{1}{6}\right)$; б) зростає при $x \in (-\infty; -0{,}5)$, спадає при $x \in (-0{,}5; +\infty)$, $y_{max} = y(-0{,}5)$; в) зростає

при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ та при $x \in (1; +\infty)$, спадає при $x \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$, $y_{max} = y\left(-\frac{1}{3}\right)$, $y_{min} = y(1)$;

г) зростає при $x \in (-\infty; 0)$ та при $x \in (1; +\infty)$, спадає при $x \in (0; 1)$, $y(0) = y_{max}$, $y(1) = y_{min}$;
д) зростає при $x \in (-\infty; -1)$ та при $x \in (1; +\infty)$, спадає при $x \in (-1; 0)$ та $(0; 1)$, $y_{max} = y(-1)$,

$y_{min} = y(1)$; е) зростає при $x \in [2; 5)$, спадає при $x \in (5; 8]$, $y_{max} = y(5)$; є) зростає при $x \in (-\infty; 0)$, спадає при $x \in (0; +\infty)$, $y_{max} = y(0)$; ж) зростає при $x \in (0; +\infty)$, спадає при $x \in (-\infty; 0;)$, $y_{min} = y(0)$; з) зростає при $x \in \left(-\sqrt{3}; -1\right)$ та при $x \in \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$, спадає при $x \in (-1; 0)$, $y_{max} = y(-1)$; и) зростає при $x \in (2{,}5; +\infty)$, спадає при $x \in (-\infty; 2{,}5)$, $y_{min} = y(2{,}5)$. 7. а) опукла донизу при $x \in \mathbf{R}$; б) опукла догори при $x > -0{,}5$, опукла донизу при $x < -0{,}5$; в) опукла донизу при $x > 0$, опукла догори при $x < 0$, $x = 0$ — точка перегину; г) опукла догори при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, опукла донизу при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ та $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty;\right)$, точки перегину $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; д) опукла догори при $x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{3\pi}{4}\right)$, опукла донизу при $x \in \left(2\pi n + \frac{3\pi}{4}; 2\pi n + \frac{7\pi}{4}\right)$, точки перегину $x = \pi n - \frac{\pi}{4}$; е) опукла догори при $x < 0$, опукла донизу при $x > 0$; є) опукла донизу при $x > 0$; ж) опукла догори при $x \in [-2; 10]$; з) опукла догори при $x < -1$, опукла донизу при $x > -1$; точка перегину $x = -1$; и) опукла догори при $x \in [-1; 0)$, опукла донизу при $x \in (0; 1]$, точка перегину $x = 0$; і) опукла донизу при $x \in \mathbf{R}$. **9.** Позначимо через m і M найменше і найбільше значення: а) $m = -3$, $M = 1$; б) $m = -22/3$, $M = 5/3$; в) $m = -3$, $M = 24$; г) $m = -5/13$, $M = 1$; д) $m = 0$, $M = 432$; е) $m = 0$, $M = \frac{3\sqrt{3}}{8}$; є) $m = -10/3$, $M = -2$; ж) $m = 7$, $M = 11$; з) $m = -1$, $M = 0{,}6$; и) $m = -11/27$, $M = 105$; і) $m = -38$, $M = 0{,}12$; ї) $m = -40/27$, $M = 105/8$; й) $m = 1{,}5 \ln 3$, $M = 5 + 1{,}5 \ln 4$.

Тема 15. ІНТЕГРАЛ

§ 1. Первісна і невизначений інтеграл

У механіці за допомогою диференціювання знаходять швидкість, коли відомий шлях, а також прискорення, коли відома швидкість. Зустрічаються і обернені задачі: знаючи швидкість, треба знайти шлях або, знаючи прискорення, треба знайти швидкість. Такі задачі розв'язують за допомогою операції інтегрування, яка є оберненою до диференціювання.

1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною на деякому проміжку для функції* $f(x)$, якщо похідна функції $F(x)$ у кожній точці x цього проміжку дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функція $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ є первісною для функції $f(x) = x$ на всій числовій прямій, бо $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$ при $x \in \mathbf{R}$. Функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на всій числовій прямій, бо $(\sin x)' = \cos x$ при $x \in \mathbf{R}$. Помітимо, що функція $F(x) = 3 + \sin x$ також є первісною для функції $f(x) = \cos x$ при $x \in \mathbf{R}$. Отже, в даному випадку задача відшукання первісної має багато розв'язків (будь-яка функція $F(x) = c + \sin x$, $c \in \mathbf{R}$ є первісною).

Функція $F(x) = \ln|x|$ є первісною для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, бо $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ (див. приклад 6 § 2 теми 13).

1.2. ***Теорема.*** *Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, то функція $f(x)$ має безліч первісних і всі вони мають вигляд $F(x) + c$, де $c \in \mathbf{R}$.*

* Нехай $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді $(F(x) + c)' = f(x)$ для будь-якого x із цього проміжку

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x).$$

Отже, $F(x) + c$ — первісна для функції $f(x)$. Якщо $\Phi(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на тому самому проміжку, то $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Похідна від сталої функції дорівнює нулю.

Справедлива й обернена теорема: якщо похідна функції дорівнює нулю при будь-якому x, то ця функція стала. Отже, функція $g(x) = \Phi(x) - F(x)$ стала на розглядуваному проміжку. Маємо

$$\Phi(x) - F(x) = c \text{ і } \Phi(x) = F(x) + c,$$

що й треба було довести. *

Доведену теорему називають *основною властивістю первісної.*

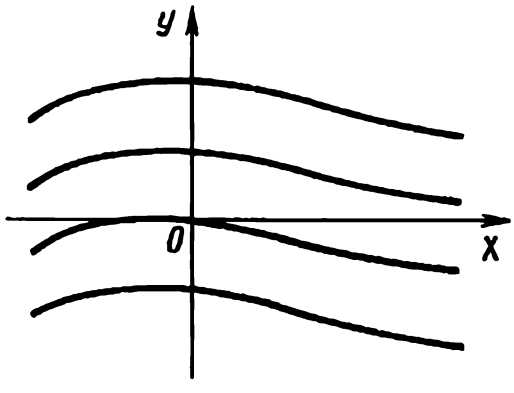


Рис. 15.1

Геометричний зміст її такий: графіки всіх первісних функції $f(x)$ дістаємо з будь-якого з них паралельним перенесенням вздовж осі Oy (рис. 15.1).

Наприклад, треба знайти для функції $f(x) = 2x - 1$ ту первісну, графік якої проходить через початок координат. Легко перевірити, що функція $F(x) = x^2 - x$ є первісною для функції $f(x) = 2x - 1$ на всій числовій прямій. Дійсно, $F'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1$ при $x \in \mathbf{R}$. Згідно з основною властивістю первісної будь-яка первісна функції $f(x) = 2x - 1$ має вигляд $\Phi(x) = x^2 - x + c$. Оскільки точка $O(0; 0)$ лежить на графіку цієї функції, то $0 = \Phi(0) = 0^2 - 0 + c$, звідки $c = 0$. Отже, шукана первісна $\Phi(x) = x^2 - x$.

Означення. Множина $\{F(x) + c\}$ всіх первісних функції $f(x)$ на деякому проміжку називається *невизначеним інтегралом цієї функції* і позначається так: $\int f(x)dx$. Отже, $\int f(x)dx = F(x) + c$, де $F(x)$ — одна із первісних функції $f(x)$, $c \in \mathbf{R}$. В цій рівності змінну x називають *змінною інтегрування*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, $f(x)\,dx$ — *підінтегральним виразом*, c — *сталою інтегрування*.

Приклади

1. $\int (x-2)dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$. Перевірка: $\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + c\right)' = x - 2$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$. Перевірка: $\left(2\sqrt{x} + c\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$. Перевірка: $(-\cos x + c)' = \sin x$.

1.3. *Властивості невизначеного інтеграла:*

1. $\int F'(x)\,dx = F(x) + c$.
2. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx$.
4. Нехай F — первісна для функції f, k та b — деякі числа, причому $k \neq 0$, тоді

$$\int f(kx + b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + c.$$

Ці властивості легко доводяться за допомогою диференціювання. Доведемо, наприклад, властивість 3: якщо $F'(x) = f(x)$, то $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$, отже,

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + c = k\int f(x)dx.$$

Аналогічно доводяться й інші властивості.

1.4. За означенням із формули $F'(x) = f(x)$ випливає відповідна формула $\int f(x)\,dx = F(x) + c$. На цьому грунтується метод безпосереднього (табличного) інтегрування.

Наприклад, оскільки $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R})$, то $\int nx^{n-1}dx = x^n + c$, звідки $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + c$. Складемо таблицю *основних інтегралів:*

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \left(\alpha \neq -1,\ x > 0\right), \tag{15.1}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ \left(a > 0,\ \ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}\right), \tag{15.2}$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \tag{15.3}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,\ \ x \in \mathbf{R}, \tag{15.4}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n. \tag{15.5}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,\ \ x \neq \pi n, \tag{15.6}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c,\ \ x \in (-1;1), \tag{15.7}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,\ \ x \in \mathbf{R}, \tag{15.8}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c,\ \ x \in \mathbf{R}, \tag{15.9}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,\ \ x \neq 0. \tag{15.10}$$

Приклади

Знайти інтеграл

1. $\int \left(3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 2\right) dx.$

* Використовуючи основні властивості та таблицю основних інтегралів, маємо

$$3\int x^4 dx - 6\int x^3 dx + 8\int x^2 dx - \int x\, dx + 2\int dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c.$$

Для розвитку навичок самоконтролю рекомендуємо зробити перевірку:

$\left(\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c\right)' = 3x^4 - 6x^3 + 8x^2 - x + 2.$ Відповідь: $\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 -$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + c.$ *

2. $\int \left(3x\sqrt{x} - 2x^2 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}\right) dx.$

* Запишемо шуканий інтеграл у вигляді

$$\int \left(3x^{3/2} - 2x^2 + 3x^{1/2} - 2x^{-1/2} + 3x^{-1}\right) dx = J.$$

Використовуючи основні властивості невизначеного інтеграла та табличні інтеграли (15.1) та (15.10), маємо

$$J = 3\int x^{3/2}\,dx - 2\int x^2\,dx + 3\int x^{1/2}\,dx - 2\int x^{-1/2}\,dx + 3\int \frac{dx}{x} = 3x^{5/2}\cdot\frac{2}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x^{3/2}\cdot 2 - 2x^{1/2}\cdot 2 +$$

$$+ 3\ln|x| + c = 1{,}2x^{2.5} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^{1.5} - 4\sqrt{x} + 3\ln|x| + c.$$

Зробіть перевірку самостійно. Відповідь: $1{,}2x^{2.5} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^{1.5} - 4\sqrt{x} + 3\ln|x| + c$. *

3. $\int (3\sin x - 4\cos x)\,dx$.

* $\int (3\sin x - 4\cos x)\,dx = 3\int \sin x\,dx - 4\int \cos x\,dx = -3\cos x - 4\sin x + c$.

Відповідь: $-3\cos x - 4\sin x + c$. *

4. $\int \left(\frac{5}{\sin^2 x} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$.

* $\int \frac{5}{\sin^2 x}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -5\operatorname{ctg} x + 2\arcsin x + c$ при $x \in (-1;0) \cup (0;1)$.

Далі не будемо вказувати проміжки існування інтеграла. Відповідь: $-5\operatorname{ctg} x + 2\arcsin x + c$. *

5. $\int \left(2^x - \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{4}{x} \right) dx$.

* $\int 2^x\,dx - 4\int \frac{dx}{\cos^2 x} + 4\int \frac{dx}{x} = \frac{2^x}{\ln 2} - 4\operatorname{tg} x + 4\ln|x| + c$.

Відповідь: $2^x (\ln 2)^{-1} - 4\operatorname{tg} x + 4\ln|x| + c$. *

6. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

* Враховуючи, що $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, маємо

$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c$. Перевірка: $(\operatorname{tg} x - x + c)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$.

Відповідь: $\operatorname{tg} x - x + c$. *

1.5. Крім *безпосереднього (табличного) інтегрування* відмітимо *ще два способи:*

1) *заміна змінної;*

2) *інтегрування частинами.* Оскільки $dy = y'(x)\,dx$, то $d(uv) = udv + vdu$ (u та v — деякі диференційовні функції). Інтегруючи обидві частини останньої рівності, маємо $uv = \int udv + \int vdu$, звідки

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (15.11)$$

Ця формула називається *формулою інтегрування частинами.*

Приклади

Знайти інтеграл методом заміни змінної.

1. $\int \cos 5x\,dx$.

* Якщо виконати заміну $5x = y$, то $dy = 5\,dx$ і $\int \cos 5x\,dx = \int \cos y \frac{dy}{5} = \frac{1}{5}\int \cos y\,dy =$

$= \frac{1}{5}\sin y + c = \frac{1}{5}\sin 5x + c$. Відповідь: $\frac{1}{5}\sin 5x + c$. *

2. $\int \sin^2 x\,dx$.

* $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$ (тут $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$).

Відповідь: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$. *

3. $\int \frac{dx}{x-a}$.

* Після заміни $x - a = y$ маємо $dx = dy$ і $\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|x-a| + c$.

Відповідь: $\ln|x-a| + c$. *

4. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$.

* Оскільки $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$, то $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$. *

5. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

* $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}$. Після заміни $x + 1 = y$ маємо $dx = dy$ і $\int \frac{dx}{1 + (x+1)^2} =$

$= \int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + c = \operatorname{arctg}(x+1) + c$. Відповідь: $\operatorname{arctg}(x+1) + c$. *

6. $\int \cos(3x-4)\,dx$.

* Покладемо $3x - 4 = y$. тоді $3dx = dy$ і $dx = \frac{1}{3}dy$. тобто $\int \cos(3x-4)dx = \int \cos y \frac{dy}{3} =$

$= \frac{1}{3}\sin y + c = \frac{1}{3}\sin(3x-4) + c$. Відповідь: $\frac{1}{3}\sin(3x-4) + c$. *

7. $\int \frac{4x-1}{2x^2 - x + 3}dx$.

* Нехай $2x^2 - x + 3 = y$, тоді $dy = (4x - 1)\,dx$ і $\int \frac{4x-1}{2x^2-x+3}dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c =$

$= \ln|2x^2 - x + 3| + c$. Оскільки $2x^2 - x + 3 > 0$ при $x \in \mathbf{R}$, маємо відповідь: $\ln(2x^2 - x + 3) + c$. *

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

* $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$. Покладемо $\frac{x}{3} = y$. тоді $dx = 3dy$ і $\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} =$

$= \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + c = \arcsin \frac{x}{3} + c$. Відповідь: $\arcsin \frac{x}{3} + c$. *

9. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$.

* $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x}$. Нехай $\operatorname{tg} x = y$, тоді $dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$ і $\int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 +$

$+ c = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c$. Відповідь: $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c$. *

10. $\int \sin^5 x \cos x \, dx$.

* Нехай $\sin x = y$, тоді $dy = \cos x \, dx$ і $\int \sin^5 x \cos x dx = \int y^5 dy = \frac{1}{6} y^6 + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + c$.

Відповідь: $\frac{1}{6}\sin^6 x + c$. *

Застосувати інтегрування частинами.

11. $\int x \cos x dx$.

* Покладемо $u = x$, $dv = \cos x \, dx$, тоді $du = dx$ і $v = \int \cos x dx = \sin x$ (стала c відсутня, бо досить знати лише одну первісну). За формулою (15.11) маємо $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x +$

$+ \cos x + c$. Перевірка: $(x \sin x + \cos x + c)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$.
Відповідь: $x \sin x + \cos x + c$. *

12. $\int \ln x dx$.

* Покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$, тоді $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. За формулою (15.11) маємо $\int \ln x \, dx =$

$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$. Перевірка: $(x \ln x - x + c)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
Відповідь: $x \ln x - x + c$. *

13. $\int x e^x dx$.

* Покладемо $u = x$, $dv = e^x dx$, тоді $du = dx$ і $v = e^x$. Отже, $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx =$

$= x e^x - e^x + c$. Перевірка: $(x e^x - e^x + c)' = e^x + x e^x - e^x = x e^x$. Відповідь: $x e^x - e^x + c$. *

14. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

* Покладемо $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x dx$, тоді $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Отже,

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2 dx}{2\left(1+x^2\right)}. \qquad (П15.1)$$

Помітимо, що $\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)}=\int\frac{x^2+1-1}{\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\operatorname{arctg}x$. Тепер із рівності (П15.1) дістанемо $\int x\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$. Перевірку зробіть самостійно. Відповідь: $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+c$. *

Вправи

1. Знайти таку первісну функції $f(x)$, графік якої проходить через точку A:

а) $f(x)=x^2+3x+1, A\,(1;2)$; б) $f(x)=\sin 2x, A\,(0;1)$;

в) $f(x)=2x^3-3x^2+x-\sqrt{x}+2$, $A\,(2;0)$; г) $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x, A\,(\pi/3;1)$.

2. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int\left(3-2x+4x^2-x^3+2x^4\right)dx$; б) $\int\left(5\sin x-7\cos x\right)dx$;

в) $\int\left(2x^3-4x\sqrt{x}+3x-\frac{2}{\sqrt{x}}+4\right)dx$; г) $\int\left(\frac{7}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+e^x\right)dx$;

3. Знайти інтеграл за допомогою заміни змінної:

а) $\int\left(3\sin 8x-4\cos 5x\right)dx$; б) $\int\cos^2 x\,dx$; в) $\int\left(1+2x\right)^9\,dx$; г) $\int\frac{dx}{\left(3x-1\right)^4}$;

д) $\int\frac{dx}{\sqrt{-2x+1}}$; е) $\int\frac{dx}{x^2-4}$; є) $\int\operatorname{tg}x\,dx$; ж) $\int\frac{dx}{x^2-x+1}$; з) $\int\frac{6x-2}{3x^2-2x+1}dx$;

и) $\int\left(\cos x\right)^7\sin x\,dx$; і) $\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.

4. Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами:

а) $\int x\sin x\,dx$; б) $\int x^2\cos x\,dx$; в) $\int\operatorname{arctg}x\,dx$; г) $\int x\ln x\,dx$.

5. Впевнитись, що $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+c$.

§ 2.Диференціальні рівняння (початкові відомості)

Часто закони фізики пов'язують значення величини із швидкістю та прискоренням зміни цієї величини. Наприклад, матеріальна точка масою m рухається прямолінійно, під дією сили F. За другим законом Ньютона $ma = F$, де a — прискорення руху точки. Оскільки $a = S''$, то цю рівність можна записати у вигляді

$$mS'' = F. \tag{15.12}$$

Виберемо початок координат у точці рівноваги. Нехай сила F пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги і напрямлена до точки рівноваги, тоді $F = -kS$ і з рівності (15.12) маємо

$$mS'' = -kS. \tag{15.13}$$

Позначивши $S = y$ та $\frac{k}{m} = \omega^2$, дістанемо

$$y'' + \omega^2 y = 0. \tag{15.14}$$

Якщо точка рухається за інерцією, причому протидія середовища, в якому рухається точка, пропорційна швидкості руху і напрямлена в бік, протилежний швидкості, то $F = -kv$ і, отже, із рівняння (15.12) маємо

$$mS'' = -kv, \text{ або } mS'' = -kS'. \tag{15.15}$$

Якщо врахувати, що $S'' = v'$, а $S' = v$, то із рівняння (15.15)

$$mv' = -kv, \; v' = -\frac{k}{m}v.$$

Позначивши $v = y$ та $\frac{k}{m} = \lambda$, маємо

$$y' = -\lambda y. \tag{15.16}$$

Рівняння виду (15.13), (15.14), (15.15), (15.16) пов'язують аргумент (час), функцію цього аргументу та похідні цієї функції (до деякого порядку включно) і називаються диференціальними. Найвищий порядок похідної цього рівняння визначає порядок рівняння. Так, (15.13), (15.14), (15.15) — це диференціальні рівняння другого, а (15.16) — першого порядку.

Розглянемо процес радіоактивного розпаду. Відомо, що миттєва швидкість зміни маси радіоактивної речовини пропорційна цій масі в даний момент часу, тобто $v = -km$. Оскільки миттєва швидкість зміни маси — це похідна, одержане рівняння можна записати так: $m' = -km$. Нарешті, поклавши $m = y$, маємо вже відоме рівняння (15.16).

Таким чином, одне диференціальне рівняння може описувати різні процеси. Розв'язком диференціального рівняння називається функція, підстановка якої в рівняння перетворює його на тотожність. Наприклад, функція $y = e^{-\lambda x}$ є розв'язком рівняння (15.16). Дійсно, $y' = -\lambda e^{-\lambda x} = -\lambda y$.

Покажемо, що коли функція є розв'язком рівняння (15.16), то вона має вигляд $y = ce^{-\lambda x}$, де $c \in \mathbf{R}$.

Нехай функція $y(x)$ задовольняє рівняння (15.16). Покладемо $y(x) = u(x)\, e^{-\lambda x}$, де $u(x)$ — деяка функція; $y' = u' e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} u$. З іншого боку, $y' = -\lambda y = -\lambda u e^{-\lambda x}$, оскільки y — розв'язок рівняння (15.16). Отже, $u' e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} u = -\lambda u e^{-\lambda x}$, звідки $u' e^{-\lambda x} = 0$ і $u'(x) = 0$. Це означає, що $u(x) = c$, тобто $y = ce^{-\lambda x}$. Функція $y = ce^{-\lambda x}$, $c \in \mathbf{R}$ — це *загальний розв'язок*, а функція $y = e^{-\lambda x}$ (тут $c = 1$) — *окремий розв'язок* диференціального рівняння.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Означення. Функція $y = g(x, c)$, $c \in \mathbf{R}$ називається загальним розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ *в області* M, якщо: 1) $g'(x, c) = f(x, g(x, c))$; 2) для будь-якої точки $A_0(x_0, y_0)$ з області M існує єдине число c_0 таке, що лінія $y = g(x, c_0)$ проходить через точку A_0, тобто $y_0 = g(x_0, c_0)$.

Розв'язок диференціального рівняння, який дістаємо із загального рівняння шляхом вибору сталої c, називається *окремим розв'язком*.

Покажемо, що загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{y}{x}$ має вигляд $y = cx$, де $c \in \mathbf{R}$.

Покладемо $y(x) = xu(x)$, де $y(x)$ — розв'язок цього рівняння, $y' = xu' + u$. Підставляючи значення y' в рівняння, маємо $xu' + u = u$, звідки $xu' = 0$ і, отже, $u' = 0$. Це означає, що $u(x) = c$ і $y = cx$.

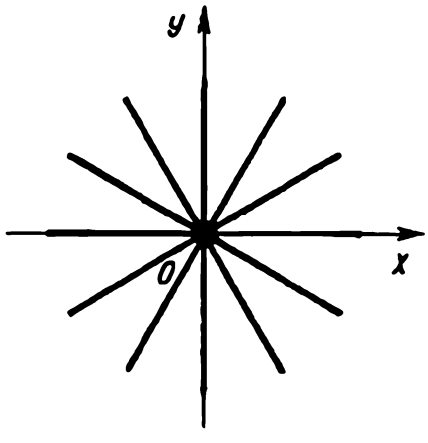


Рис. 15.2

На рис. 15.2 зображено множину інтегральних кривих рівняння $y' = \frac{y}{x}$. Це прямі, описані рівнянням $y = cx$, $c \in \mathbf{R}$, що проходять через точку $O(0; 0)$. Сама ця точка не лежить на жодній з цих прямих, бо в ній вираз $\frac{y}{x}$ втрачає сенс. Отже, інтегральна крива — це пряма без точки $O(0; 0)$.

Диференціальне рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$ (див. рівняння (15.14)) називається *рівнянням гармонічних коливань*. Впевнимося, що функція $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ є його розв'язком: $y' = -\omega A \sin(\omega x + \varphi)$, $y'' = -\omega^2 A\cos(\omega x + \varphi) = -\omega^2 y$. Можна довести, що будь-який розв'язок диференціального рівняння (15.14) має вигляд $y = A\cos(\omega x + \varphi)$.

Вправи

1. Перевірте, чи є наведена функція розв'язком диференціального рівняння:

а) $y = 5e^{-3x}$; $y' = -3y$; б) $y = 10e^{4x}$; $y' = 4y$;

в) $y = 3\cos 3x$; $y'' = -9y$; г) $y = \frac{1}{3}e^{x} - e^{-2x}$; $y' + 2y = e^{x}$.

2. Складіть диференціальне рівняння гармонічного коливання $y = 3\cos(3x - 2)$.

§ 3. Визначений інтеграл

3.1. Розглянемо площу криволінійної трапеції із змінною верхньою межею. Нехай на відрізку $[a; b]$ задано неперервну невід'ємну функцію $f(x)$. Фігура, обмежена графіком цієї функції, відрізком $[a; b]$ та прямими $x = a$, $x = b$, називається криволінійною трапецією (рис. 15.3). Виберемо на проміжку $(a; b)$ довільну точку x і проведемо через неї вертикальну пряму. Вона розбиває криволінійну трапецію на дві частини. Ліва частина називається криволінійною трапецією із змінною верхньою межею x. Позначимо її площу через $S(x)$. Це деяка зростаюча функція; $S(a) = 0$, тоді $S(b) = S$ — площа всієї криволінійної трапеції.

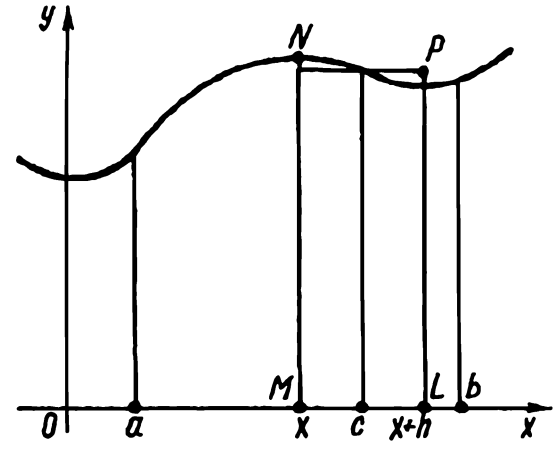


Рис. 15.3

Теорема. *Площа $S(x)$ криволінійної трапеції із змінною верхньою границею є первісною для функції $f(x)$, графік якої обмежує цю трапецію.*

* Нехай $h > 0$ і $x + h < b$, тоді $S(x+h) - S(x) = \Delta S$ — площа криволінійної трапеції $MLPN$ (рис. 15.3). Візьмемо прямокутник з основою ML і площею ΔS. Верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції f в точці з абсцисою $c \in [x; x + h]$, бо інакше площа прямокутника буде менша або більша за ΔS. За відомою формулою площа прямокутника $\Delta S = f(c)h$, звідки $f(c) = \Delta S/h$. Оскільки $x \le c \le x + h$, то $\lim\limits_{h\to 0} c = x$. Звідси внаслідок неперервності функції f маємо $\lim\limits_{h\to 0} f(c) =$

$= f(x)$, або $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta S}{h} = f(x)$, але $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta S}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x)$, отже,

$S'(x) = f(x)$, що й треба було довести. * При $h < 0$ доведення аналогічне.

Якщо $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$, то згідно з основною властивістю первісних $S(x) = F(x) + c$. Зокрема $S(a) = F(a) + c$. Враховуючи, що $S(a) = 0$, маємо $c = -F(a)$ і $S(x) = F(x) - F(a)$. З останньої рівності маємо $S = S(b) = F(b) - F(a)$.

Площа криволінійної трапеції — це різниця значень будь-якої первісної функції f на кінцях відрізка $[a; b]$.

Приклад

1. Знайти площу криволінійної трапеції (рис. 15.4), обмеженої зверху графіком функції $y = \sin x$, а з боків — прямими $x = 0$ та $x = \pi/2$.

* Однією з первісних для функції $f(x) = \sin x$ є функція $F(x) = -\cos x$. Отже, шукана площа дорівнює $F(\pi/2) - F(0) = -(\cos(\pi/2) - \cos 0) = 1$. Відповідь: 1. *

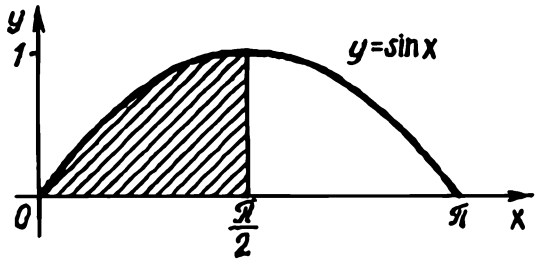


Рис. 15.4

Зауваження. Із доведеної теореми випливає, що будь-яка неперервна на відрізку $[a; b]$ функція має на цьому відрізку первісну. Дійсно, якщо неперервна функція $f(x)$ невід'ємна на проміжку $[a; b]$, то однією з її первісних є площа криволінійної трапеції із змінною верхньою межею. Якщо ж неперервна функція $f(x)$ набуває на проміжку $[a; b]$ від'ємні значення, то вона за властивістю неперервних функцій обмежена на цьому проміжку. Отже, існує число $m < 0$ таке, що $f(x) \ge m$ при $x \in [a; b]$. Наприклад, маємо функцію $g(x) = f(x) - m$. Оскільки $g(x) \ge 0$ при $x \in [a; b]$, функція $g(x)$ має на проміжку $[a; b]$ первісну $F(x)$. Розглянемо функцію $\Phi(x) + mx$. Оскільки $\Phi'(x) = F'(x) + m = g(x) + m = f(x)$, функція $\Phi(x)$ є первісною для $f(x)$.

3.2. Означення. Різниця значень первісної для функції f у точках b та a називається *визначеним інтегралом* цієї функції від a до b.

Позначається визначений інтеграл так: $\int\limits_a^b f(x)dx$. Число a називається *нижньою межею* інтегрування, число b — *верхньою межею*. Відрізок $[a; b]$ називається *областю інтегрування*.

Отже, за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (15.17)$$

де $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Нехай $\Phi(x)$ та $F(x)$ — дві різні первісні функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$. Згідно з основною властивістю первісних $\Phi(x) = F(x) + c$. Звідси маємо $\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$ — ця різниця не залежить від вибору c.

Іноді визначений інтеграл записують так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Приклади

Знайти значення інтеграла.

1. $\int_1^3 x^2 dx$.

* Оскільки $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, то $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\left(3^3 - 1\right) = \frac{26}{3}$. Відповідь: $\frac{26}{3}$. *

2. $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$.

* Оскільки $\int \cos x\, dx = \sin x + c$, то $\int_0^{\pi} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0$. Відповідь: 0. *

3. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2 - 3x + 4\right)dx$.

* Знаходимо $\int\left(2x^2 - 3x + 4\right)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + c$, отже, $\int_{-1}^{2}\left(2x^2 - 3x + 4\right)dx =$

$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{22}{3} - \left(-\frac{37}{6}\right) = \frac{81}{6} = 13{,}5$. Відповідь: 13,5. *

4. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\left(11 + 5x\right)^3}$.

* Маємо $\int \frac{dx}{\left(11+5x\right)^3} = \frac{\left(11+5x\right)^{-2}}{-2} \cdot \frac{1}{5} + c$, отже, $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\left(11+5x\right)^3} = -\frac{1}{10}\left(11+5x\right)^{-2}\Big|_{-2}^{-1} =$

$= -\frac{1}{10}\left(6^{-2} - 1\right) = \frac{7}{72}$. Відповідь: $\frac{7}{72}$. *

5. $\int_0^{\pi/3} \sin^2\left(3x + \pi/6\right)dx$.

* $\int \sin^2\left(3x + \pi/6\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(1 - \cos\left(6x + \pi/3\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin\left(6x + \pi/3\right)\right)$, отже,

$\int_0^{\pi/3} \sin^2\left(3x + \pi/6\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin\left(6x + \pi/3\right)\right)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь: $\pi/6$. *

3.3. Розглянемо *властивості визначеного інтеграла, пов'язані з рівностями*:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Дійсно $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Ця властивість випливає з того, що

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ а } \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b).$$

3. Для будь-яких дійсних чисел a, b, c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Дійсно,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

4. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Властивості 4 та 5 випливають із відповідних властивостей первісної.

Приклади

1. На рис. 15.5 заштриховано фігуру, обмежену графіками функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$ і $x = b$. Вивести формулу площі цієї фігури.

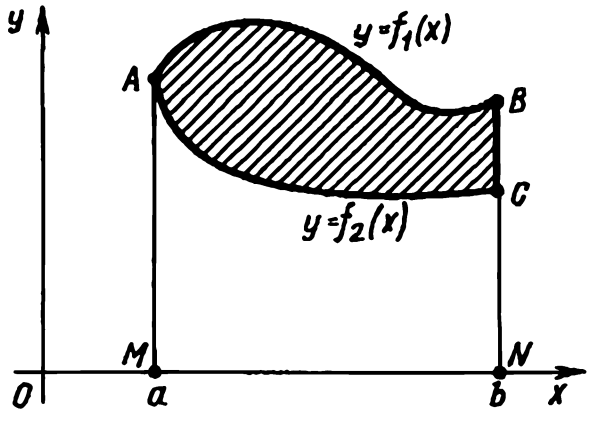


Рис. 15.5

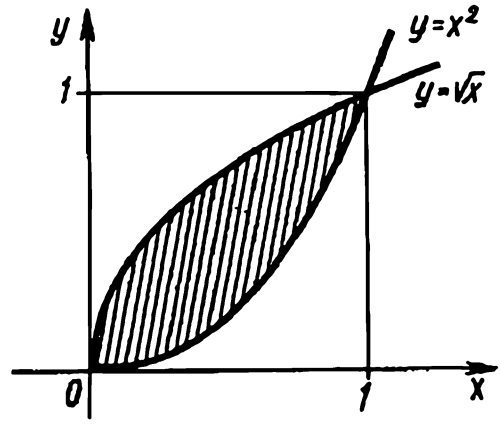


Рис. 15.6

* Нехай S — шукана площа. Тоді $S = S_1 - S_2$, де S_1 — площа криволінійної трапеції $MABN$, S_2 — площа криволінійної трапеції $MACN$. Отже,

$$S = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\,dx.$$

Зауваження. Функції f_1 та f_2 можуть набувати і від'ємних значень, якщо при цьому, як і раніше, при всіх $x \in [a; b]$ $f_2(x) \le f_1(x)$.

2. Знайти площу фігури (рис. 15.6), обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$ та $y = x^2$.

* Легко переконатись, що $x^2 \le \sqrt{x}$ при $x \in [0; 1]$.

За формулою, виведеною у прикладі 1, маємо

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

(межі інтегрування 0 та 1 є коренями рівняння $\sqrt{x}=x^2$). *

3. Знайти площу фігури (рис. 15.7), обмеженої лініями $y=x^2+2x-2$ та $y=x$.

* Знайдемо з рівняння $x^2+2x-2=x$ абсциси точок перетину даних графіків $x_1=-2$, $x_2=1$. На проміжку $(-2; 1)$ графік функції $y=x$ лежить вище графіка функції $y=x^2+2x-2$. Отже,

$$S=\int_{-2}^1\left(x-\left(x^2+2x-2\right)\right)dx=\int_{-2}^1\left(2-x-x^2\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^1=\frac{7}{6}-\left(-\frac{10}{3}\right)=4{,}5.$$

Відповідь: 4,5. *

4. $f(x)$ — парна функція, визначена на всій числовій прямій. Довести, що для будь-якого a виконується рівність

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

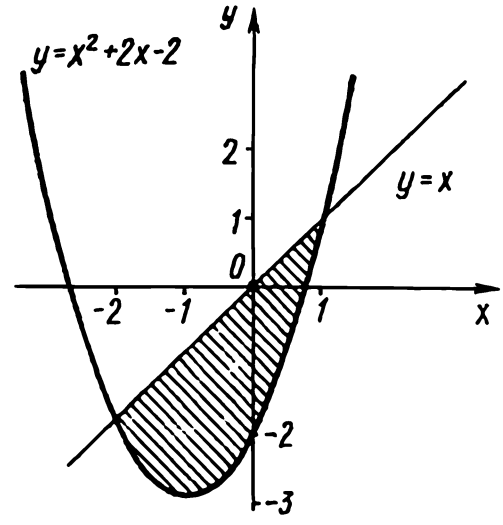


Рис. 15.7

* Згідно з властивістю 3 (див. п. 3.3) визначеного інтеграла

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx. \qquad (П15.2)$$

Нехай $t=-x$, тоді $dx=-dt$, тобто

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_a^0 f(-t)(-dt)=-\int_a^0 f(t)dt.$$

бо $f(x)$ — парна функція.

За властивістю 2 визначеного інтеграла (див. п.3.3)

$$-\int_a^0 f(t)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx.$$

Із рівності (П15.2) маємо

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx,$$

що й треба було довести. Геометричний зміст полягає в тому, що коли f — парна функція, то вісь Oy поділяє площу криволінійної трапеції навпіл. *

3.4. Розглянемо *властивості визначеного інтеграла, пов'язані з нерівностями:*

1. Якщо $a<b$ і $f(x)\ge 0$ при $x\in[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$$

Дійсно, якщо F — первісна функції f і оскільки $F'(x)=f(x)\ge 0$, то $F(x)$ не спадає на проміжку $[a; b]$, отже $F(b)\ge F(a)$ і тоді

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\ge 0.$$

Наслідок 1. *Якщо $a<b$ і при $x\in[a; b]$, $f(x)<g(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

Дійсно, $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)dx \ge 0$, *бо* $g(x) \ge f(x)$.

Наслідок 2. *Нехай* $a<b$ і f — *неперервна на проміжку* $[a; b]$ *функція, тоді*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \qquad (15.18)$$

де m *та* M — *відповідно найменше та найбільше значення функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a; b]$.

Наслідок 3. *Нехай* $a<b$, *тоді*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Дійсно, $f(x) \le |f(x)|$ і $-f(x) \le |f(x)|$, отже,

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \text{ і } -\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

звідки $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

що й треба було довести.

Приклади

1. Довести, що для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконуються нерівності: а) $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$, б) $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$.

* а) Відомо, що при $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin t < t$. Згідно з наслідком 1 маємо

$$\int_0^x \sin t\,dt < \int_0^x t\,dt, \text{ де } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Далі маємо $-\cos t\Big|_0^x < \frac{1}{2}t^2\Big|_0^x$ або $-\cos x+1 < \frac{1}{2}x^2$ і $1-\frac{1}{2}x^2 < \cos x$.

б) Оскільки $1-\frac{1}{2}t^2 < \cos t$ при $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\int_0^x \left(1-\frac{1}{2}t^2\right)dt < \int_0^x \cos t\,dt,$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^x < \sin t\Big|_0^x, \quad x-\frac{x^3}{6} < \sin x. *$$

2. Довести, що при $x > 0$ виконується нерівність

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}.$$

* Відомо, що при $t > 0$ виконується нерівність $e^t > 1 + t$. Отже, $\int_0^x e^t dt > \int_0^x (1+t)dt$ при $x > 0$.

Звідси маємо

$$e^t\Big|_0^x > \left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x,\ e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2} \text{ і } e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}.*$$

3. Нехай на проміжку $[a; b]$ задано неперервну функцію $f(x)$ (рис. 15.8). Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ на n рівних частин довжиною $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Точки поділу $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$. Через ці точки поділу проведемо вертикальні прямі, при цьому криволінійна трапеція розіб'ється на кілька криволінійних трапецій. Замінимо кожну маленьку криволінійну трапецію на прямокутник, взявши за висоту прямокутника ординату кривої $y = f(x)$ у початковій точці проміжку $[x_m; x_{m+1}]$. Сума площ всіх таких прямокутників наближено дорівнює площі криволінійної трапеції. Звідси маємо

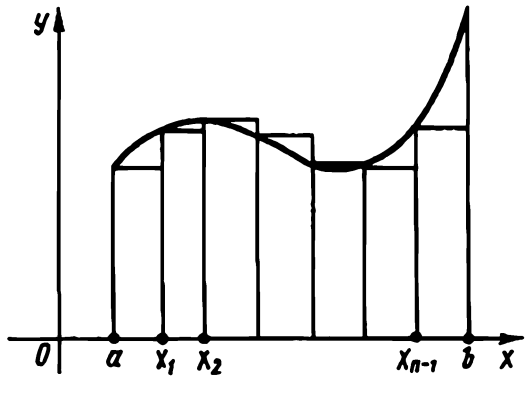


Рис. 15.8

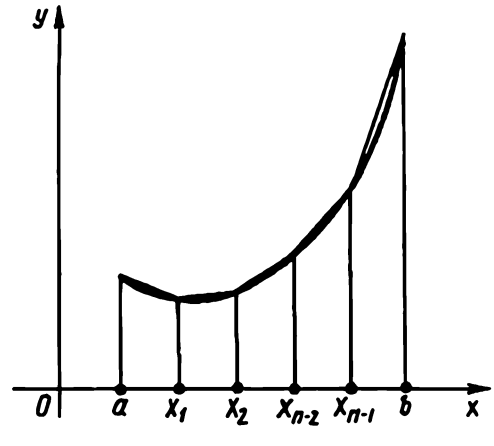


Рис. 15.9

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Одержана формула називається *формулою прямокутників*.

У випадку, коли функція $f(x)$ зростає на відрізку $[a; b]$, матимемо $f(x_m) < f(x) < f(x_{m+1})$ для $x \in [x_m; x_{m+1}]$.

Згідно з наслідком 2

$$\frac{b-a}{n} f(x_m) < \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x)dx < \frac{b-a}{n} f(x_{m+1}).$$

Додаючи всі такі подвійні нерівності, дістанемо

$$\frac{b-a}{n}\sum_{m=0}^{n-1} f(x_m) < \int_a^b f(x)dx < \frac{b-a}{n}\sum_{m=1}^{n} f(x_m). \qquad (П15.3)$$

Із цієї подвійної нерівності можна при досить великих значеннях n дістати як завгодно точні оцінки інтеграла.

Крім формули прямокутників наведемо ще формулу трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Геометричний зміст цієї формули полягає в тому, що на проміжку $[x_m; x_{m+1}]$ криволінійна трапеція замінюється звичайною (рис. 15.9).

Визначений інтеграл часто застосовується у геометрії.

Вправи

1. Знайти визначений інтеграл:

а) $\int_{-1}^{1}\left(2x^2-3x+2\right)dx$; б) $\int_{0}^{\pi/2}\left(6\cos x-3\sin x\right)dx$; в) $\int_{0}^{\pi/2}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$; г) $\int_{-\pi/2}^{0}\cos^2 4x\,dx$;

д) $\int_{0}^{4,5}\sqrt[3]{2x-1}\,dx$; е) $\int_{0}^{4}\sqrt{1+2x}\,dx$; є) $\int_{-1}^{14}\frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$; ж) $\int_{-1}^{1}\cos\pi x\,dx$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y=x^3, y=x, x\ge 0$; б) $y=\frac{2}{x}$, $y=3-x$; в) $y=2x^2, y=x+1$; г) $y=2x^2, y=3-x$.

Відповіді до вправ

§ 1. 1. а) $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x-\frac{5}{6}$; б) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$; в) $0,5x^4-x^3+0,5x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2x+$

$+\frac{1}{3}\left(4\sqrt{2}-18\right)$; г) $\frac{11}{12}-\cos x-0,5\cos 2x-\frac{1}{3}\cos 3x$. **2.** а) $\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-x^2+3x+c$; б) $c-$

$-5\cos x-7\sin x$; в) $\frac{1}{2}x^4-\frac{8}{5}x^{2,5}+\frac{3}{2}x^2-4\sqrt{x}+4x+c$; г) $7\operatorname{tg}x-3\arcsin x+e^x+c$. **3.** а) $c-$

$-\frac{3}{8}\cos 8x-\frac{4}{5}\sin 5x$; б) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$; в) $\frac{1}{20}\left(1+2x\right)^{10}+c$; г) $c-\frac{1}{9}\left(3x-1\right)^{-3}$; д) $c-\sqrt{1-2x}$;

е) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$; є) $c-\ln\left|\cos x\right|$; ж) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$; з) $\ln\left(3x^2-2x+1\right)+c$; и) $c-\frac{1}{8}\cos^8 x$;

і) $\ln\left|\sin x+\cos x\right|+c$. **4.** а) $\sin x-x\cos x+c$; б) $x^2\sin x-2\sin x+2x\cos x+c$; в) $x\operatorname{arctg}x-$

$-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$; г) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$.

§ 2. 2. $y''=-9y$.

§ 3. 1. а) 16/3; б) 3; в) $\pi/4-0,5$; г) $\pi/4$; д) 45/8; е) 26/3; є) 28/3; ж) 0. **2.** а) 1/4; б) $-2\ln 2+1,5$;

в) 9/8; г) $5\frac{5}{24}$.

Тема 16. ПЛАНІМЕТРІЯ

§ 1. Логічна структура курсу геометрії. Основні поняття

Геометрія складається з двох розділів: планіметрії і стереометрії.

В планіметрії вивчаються властивості фігур, що лежать в одній площині, а в стереометрії — властивості фігур простору.

1.1. Шкільний курс геометрії побудований за аксіоматичним методом і має таку логічну структуру.

1. Даються основні поняття: точка, пряма, площина, міра, належність, знаходження міри тощо. Ці поняття не означаються.

2. Властивості та взаємозв'язок основних понять описуються за допомогою аксіом.

3. Через основні поняття та аксіоми даються означення нових понять.

4. На основі аксіом та означень доводяться теореми. Основні позначення: a, b, c, ...— прямі; A, B, C, ...— точки (запис $A \in b$ означає, що пряма b проходить через точку A); α, β, γ, ...— площини.

1.2. Візьмемо на прямій a дві довільні точки A і B (рис. 16.1). *Відрізком* називається частина прямої, яка включає дві різні точки цієї прямої (кінці відрізка) і всі точки прямої, що лежать між ними. Позначається так: відрізок AB. З рис. 16.1 маємо

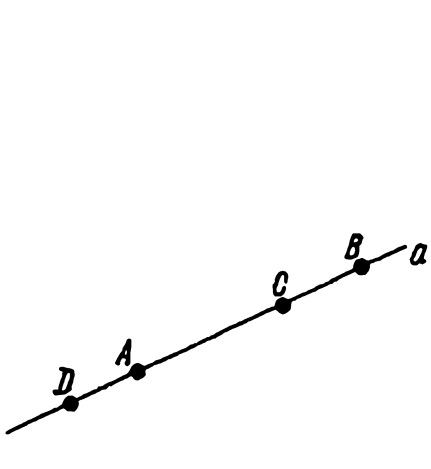


Рис. 16.1

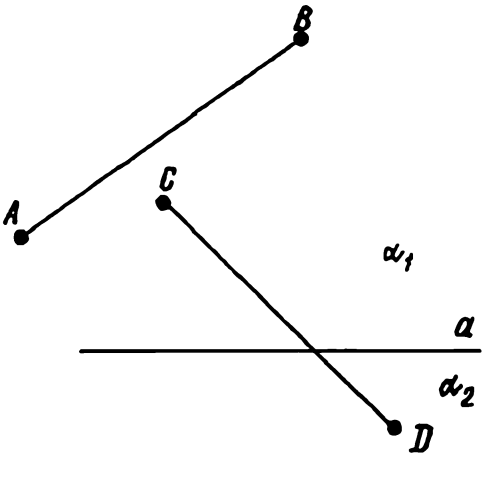


Рис.16.2

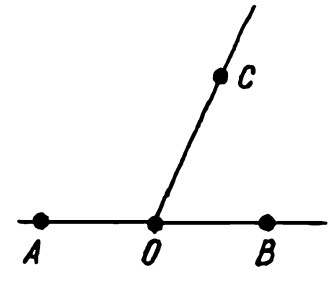


Рис.16.3

$C \in AB$, $D \notin AB$, оскільки точка C лежить між точками A, B, а точка D — ні. На рис. 16.2 показано пряму a. Вона розбиває всю площину на дві півплощини α_1 та α_2. Кінці відрізка AB належать півплощині α_1, відрізок AB не перетинає прямої a. Кінці відрізка CD належать різним півплощинам, $C \in \alpha_1$, $D \in \alpha_2$, відрізок CD перетинає пряму a.

Променем (*або півпрямою*) називається частина прямої, яка складається з усіх її точок, що лежать по один бік від фіксованої точки прямої, і самої цієї точки, що називається *початком променя*. Різні промені однієї прямої із спільним початком називаються *доповняльними*. На рис. 16.3 промені OA і OB доповняльні, промені OA і OC — ні.

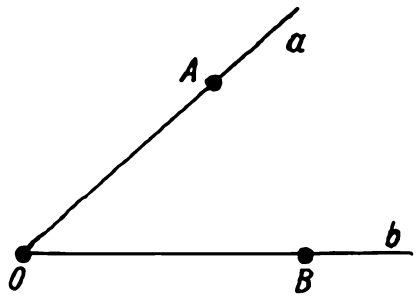


Рис.16.4

Кутом називається фігура, що складається з двох різних променів із спільним початком. Цей спільний початок називається *вершиною кута*, а промені — його *сторонами* (рис. 16.4). Позначаючи кут, вказують вершину ($\angle O$), сторони ($\angle (ab)$) або три точки ($\angle AOB$), з яких середня — вершина кута.

Якщо сторони кута — доповняльні промені, кут називається *розгорнутим*. *Два відрізки називаються рівними*, якщо вони мають рівні довжини. *Два кути називаються рівними*, якщо їх градусні міри рівні.

Трикутником називається фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що сполучають ці точки попарно. Вказані точки називаються *вершинами трикутника*, а відрізки — його *сторонами*. На рис. 16.5. показано трикутник ABC (позначається так: ΔABC). Куг трикутника ABC при вершині, наприклад, B позначається так: $\angle ABC$, або $\angle B$. *Два трикутники називаються рівними* ($\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$), якщо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. При позначенні рівності трикутників має значення порядок запису вершин трикутників. На рис. 16.6 показано рівні трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$. Рівні елементи позначено однаково. Довжини сторін позначають ще так: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

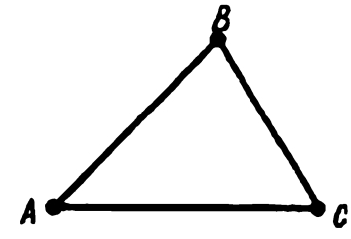


Рис.16.5

Прямі a і b називаються *паралельними* ($a \parallel b$), якщо вони не мають спільних точок (не перетинаються).

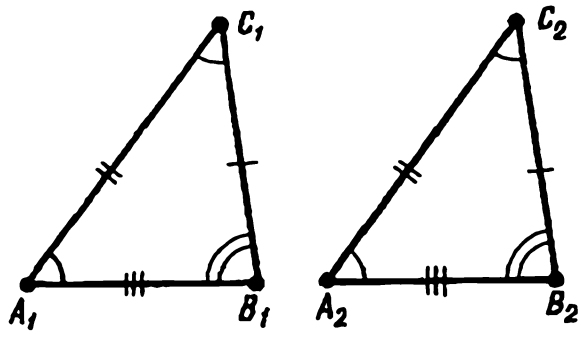


Рис.16.6

1.3. *Аксіоми планіметрії.*

1. *Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.*

2. *Через довільні дві різні точки можна провести пряму і притому тільки одну.*

3. *З трьох різних точок, що лежать на одній прямій, одна і тільки одна лежить між двома іншими.*

4. *Пряма розбиває площину на дві півплощини.*

5. *Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю точкою. Якщо точка C лежить на відрізку AB, то* $AB = AC + CB$ (рис. 16.7).

6. *Кожний кут має певну градусну міру, не меншу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами. Якщо промінь c проходить між сторонами кута (ab), то* $\angle (ab) = \angle (ac) + \angle (cb)$ (рис. 16.8).

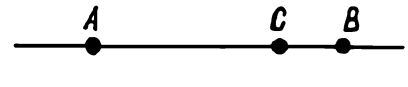


Рис.16.7

7. *На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і притому тільки один.*

8. *Від будь-якого променя в задану півплощину можна відкласти кут і притому тільки один, що має задану градусну міру, меншу від* 180°.

9. *Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.*

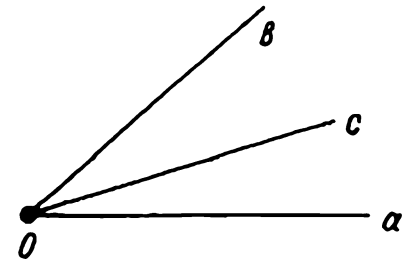


Рис.16.8

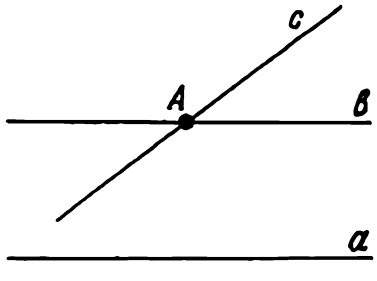


Рис.16.9

10. *Через точку поза даною прямою можна провести на площині тільки одну пряму, паралельну даній.*

1.4. Математичні твердження бувають трьох видів: *означення, аксіоми, теореми.*

Означення — це твердження, в якому роз'ясніється зміст деякого поняття (наприклад, означення відрізка, кута, трикутника).

Аксіома — це твердження, яке приймають без доведення.

Теорема — це твердження, яке треба довести. Наведемо приклад геометричної теореми: якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу.

Нехай $a \parallel b$ (рис. 16.9) і пряма c перетинає пряму b в точці A. Доведення проведемо від супротивного: якщо пряма c не перетинає прямої a, то $c \parallel a$, а це протиріччить аксіомі 10, бо через точку A проходять дві прямі (c і b), паралельні третій (прямій a).

§ 2. Кути

2.1. *Суміжними* називаються два кути, у яких одна сторона спільна, а інші є доповняльними променями. На рис. 16.10 показано суміжні кути *BOA* та *BOC*.

Теорема. *Сума суміжних кутів дорівнює* 180°.

Нехай α — градусна міра кута. Якщо $0° < \alpha < 90°$, кут називається гострим, якщо $\alpha = 90°$, кут називається прямим, якщо $90° < \alpha < 180°$, кут називається тупим. З теореми випливають два важливі наслідки.

Наслідок 1. *Кут, суміжний з прямим, — прямий, кут, суміжний з тупим, — гострий.*

Наслідок 2. *Якщо два кути рівні, то і суміжні з ними кути рівні.*

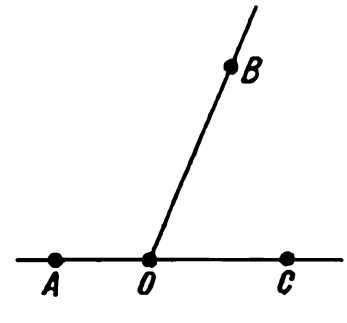


Рис.16.10

Задачі

1. Знайти суміжні кути, якщо один з них в 5 разів більший за другий.

Нехай α — величина одного з кутів, тоді 5α — величина другого. Згідно з теоремою $\alpha + 5\alpha = 180^\circ$, звідки $\alpha = 30^\circ$. Відповідь: 30 і 150°.

2. Знайти суміжні кути, якщо один на 70° більший за другий.

Нехай α — величина одного з суміжних кутів, тоді $\alpha + 70°$ — величина другого. Згідно з теоремою їх сума $\alpha + \alpha + 70° = 180°$, звідки $\alpha = 55°$. Відповідь: 55 і 125°.

2.2. *Вертикальними* називаються два кути, в яких сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого. На рис. 16.11 показано вертикальні кути *AOB* і *COD*. Сторони *OA* і *OD*, *OB* і *OC* є доповняльними променями. Кути *AOC* і *BOD* також вертикальні.

Теорема. *Вертикальні кути рівні.*

*Дійсно, кути *AOB* і *DOC* мають спільний суміжний кут *AOC* і тому рівні.*

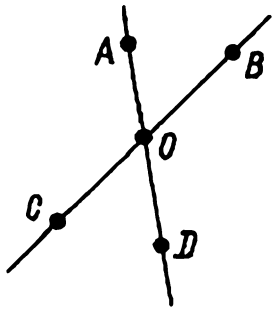


Рис.16.11

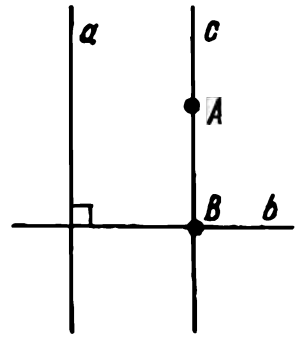


Рис.16.12

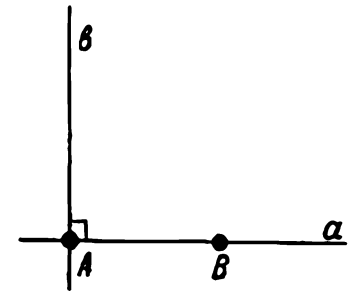


Рис.16.13

2.3. Дві прямі, перетинаючись, утворюють чотири кути. *Кутом між двома прямими* вважатимемо кут з найменшою градусною мірою. Наприклад, прямі *AD* і *BC* (рис. 16.11) утворюють кут *AOB* (або *DOC*). Якщо α — кут між двома прямими, то $0° < \alpha < 90°$.

Задачі

1. Один з кутів, утворений при перетині прямих, дорівнює 70°. Знайти інші кути.

* Всього при перетині двох прямих утворюється чотири кути. Два з них суміжні до даного, а два — вертикальні. Тому два кути по 70°, а два інші по $180° - 70° = 110°$. Відповідь: 70°, 110°, 110°.*

2. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 100°. Знайти всі чотири кути.

* Зрозуміло, що 100° — це сума двох вертикальних кутів. Тому один із них дорівнює 50°. Суміжний з ними кут дорівнює $180° - 50° = 130°$. Відповідь: 50°, 50°, 130°, 130°. *

2.4. Дві прямі називаються *взаємно перпендикулярними*, якщо вони перетинаючись утворюють прямий кут (рис. 16.12). Позначають взаємно перпендикулярні прямі так: $a \perp b$. Два промені називаються *взаємно перпендикулярними*, якщо вони лежать на взаємно перпендикулярних прямих. На рис. 16.12 показано перпендикуляр *AB* до прямої *b*, тут *B* — основа перпендикуляра.

Теорема. *Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і притому тільки одну.*

* Візьмемо на прямій *a* довільну точку *A* (рис. 16.13). Згідно з аксіомою 8 від променя *AB* у верхню півплощину, визначену прямою *a*, можна відкласти прямий кут і притому тільки один. Сторона цього кута і визначає пряму $b \perp a$, яка за аксіомою 8 є єдиною. *

2.5. ***Теорема.*** *Якщо від даного променя відкласти в одну півплощину два кути з спільною вершиною, то сторона меншого кута проходить між сторонами більшого кута.*

* На рис. 16.14 показано кути AOC і AOB, відкладені від променя OA в одну півплощину, $\angle AOB < \angle AOC$. Промінь OB проходить між променями OA і OC.*

Наслідок. *Якщо кути AOB і AOC відкладено в одну півплощину від променя OA, то $\angle BOC = |\angle AOC - \angle AOB|$.*

Бісектрисою кута називається промінь, що виходить з його вершини і ділить цей кут навпіл. З означення випливає, що бісектриса проходить між сторонами кута.

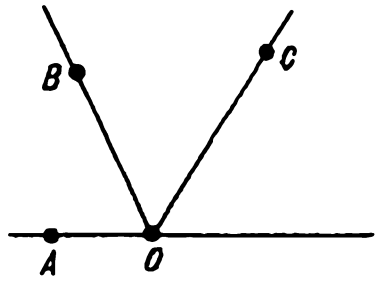


Рис.16.14

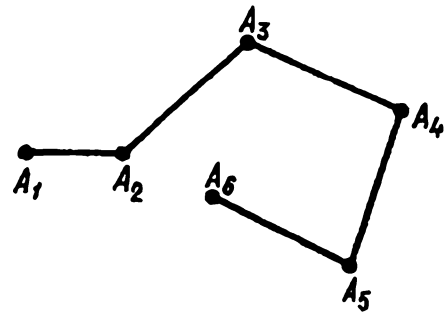


Рис.16.15

Задача

1. $\angle AOB = 100°$, OC — бісектриса кута AOB. Знайти кут, суміжний з кутом AOC.

* Оскільки OC — бісектриса кута AOB, то $\angle AOC = 50°$. Кут, суміжний з кутом AOC, дорівнює $180° - 50° = 130°$. Відповідь: 130°.

2.6. *Ламаною* $A_1A_2...A_n$ називається фігура, що складається з точок $A_1, A_2, ..., A_n$ та відрізків, що сполучають кожну наступну точку з попередньою, причому будь-які

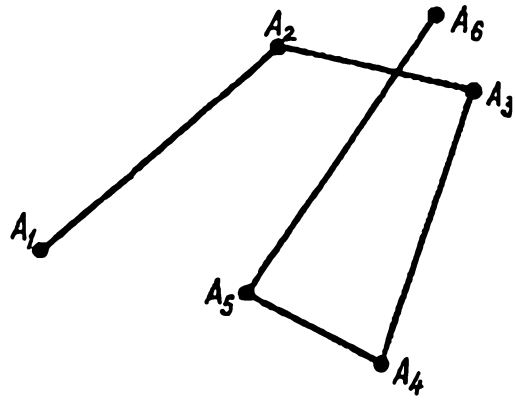


Рис.16.16

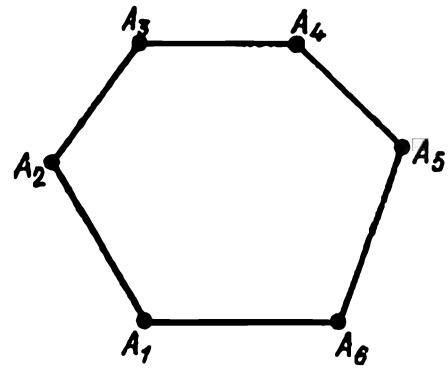


Рис.16.17

послідовні три точки не лежать на одній прямій (рис. 16.15). Відрізки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ називаються *ланками ламаної*, точки $A_1, A_2, ..., A_n$ — її *вершинами*. Точки A_1 і A_n називають *кінцями ламаної*. Ламана називається *замкненою*, якщо її кінці збігаються. Ламана називається *простою*, якщо її несуміжні ланки не мають спільних точок (рис. 16.15). Ламана, яку показано на рис. 16.16, не є простою. Довжина ламаної дорівнює сумі довжин її ланок.

2.7. Проста замкнена ламана утворює *многокутник*. На рис. 16.17 показано шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Вершини ламаної називаються *вершинами* многокутника, а її

ланки — *сторонами* многокутника. Сума довжин всіх сторін многокутника називається його *периметром.*

Плоским многокутником називається частина площини, обмежена многокутником. На рис. 16.18 плоский п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ заштриховано. Плоский многокутник називається *опуклим*, якщо відрізок, що сполучає будь-які дві його точки M, N,

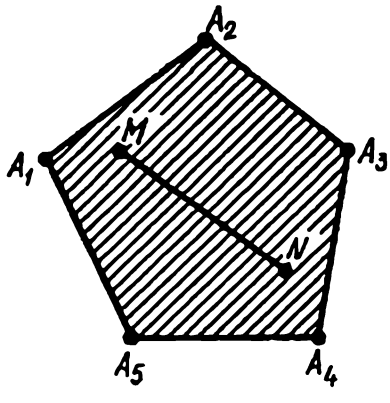


Рис.16.18

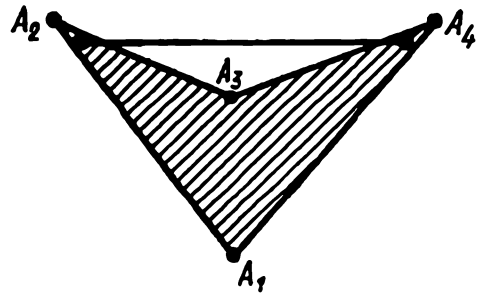


Рис.16.19

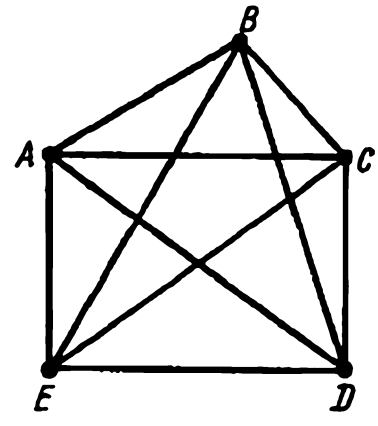


Рис.16.20

цілком належить цьому многокутнику (рис.16.18). Плоский многокутник, показаний на рис. 16.19, не є опуклим. Якщо плоский многокутник опуклий, то відповідний многокутник (замкнена ламана) також опуклий. Далі розглядатимемо лише опуклі многокутники.

За числом сторін многокутник називають трикутником, чотирикутником, п'ятикутником тощо. *Діагоналі многокутника* — це відрізки, які сполучають дві його вершини і не є його сторонами. На рис. 16.20 AC, AD, BD, BE і CE — діагоналі п'ятикутника.

Кут, сторони якого є сторонами многокутника, називається *внутрішнім кутом* многокутника. Кут, суміжний з внутрішнім, називається *зовнішнім кутом* многокутника.

Задача

1. Скільки діагоналей має опуклий п'ятикутник?

* З рис. 16.20 видно, що число діагоналей опуклого п'ятикутника дорівнює 5. Підтвердимо це розв'язання логічним міркуванням. Якщо сполучити попарно 5 вершин п'ятикутника відрізками, то всього таких відрізків буде $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Але 5 із цих відрізків є сторонами п'ятикутника. Отже, число діагоналей дорівнює $10 - 5 = 5$. Відповідь: 5. *

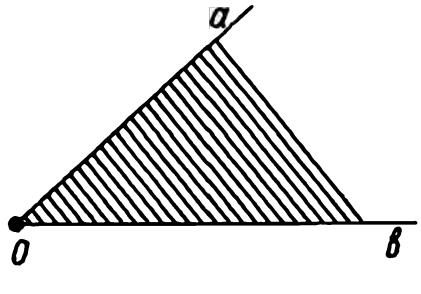


Рис.16.21

2.8. Частина площини, обмежена двома променями, що виходять з однієї точки, називається *плоским кутом.* На рис. 16.21 заштриховано плоский кут (ab). Існує ще один плоский кут, утворений тими самими променями. Він доповнює вказаний кут до всієї площини. Ці два плоскі кути називаються *доповняльними.*

Вправи

1. Один із суміжних кутів більший за другий в 4 рази. Знайти ці кути.

2. Один із суміжних кутів на 15° більший за другий. Знайти ці кути.

3. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 80°. Знайти величини всіх чотирьох кутів.

4. Скільки пар вертикальних кутів показано на рис. 16.22?

5. Довести, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними променями.

6. Довести, що бісектриси суміжних кутів перпендикулярні.

7. Скільки діагоналей має опуклий 10-кутник?

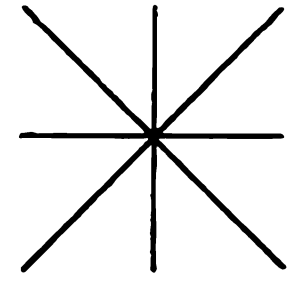


Рис.16.22

§ 3. Трикутники

3.1. Якщо дві сторони трикутника рівні, він називається *рівнобедреним* (рис. 16.23). *Рівностороннім (або правильним)* називається трикутник, у якого всі сторони рівні (рис. 16.24). Трикутник, у якого всі кути гострі (рис. 16.25), називається *гострокутним*, один кут прямий — *прямокутним* (рис. 16.26), один кут тупий — *тупокутним* (рис. 16.27).

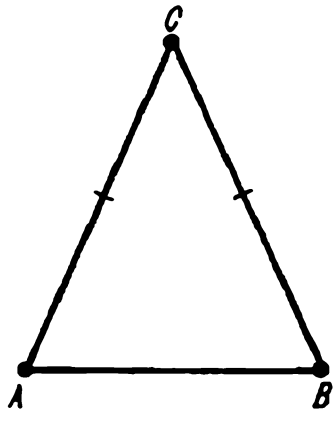


Рис.16.23

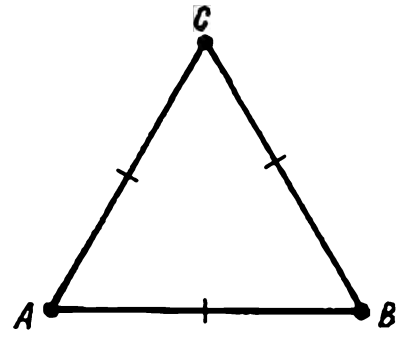


Рис.16.24

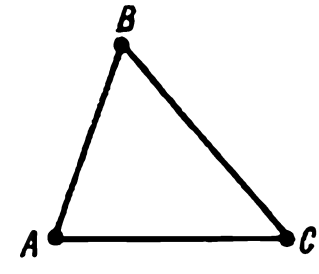


Рис.16.25

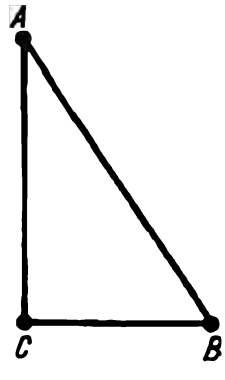


Рис.16.26

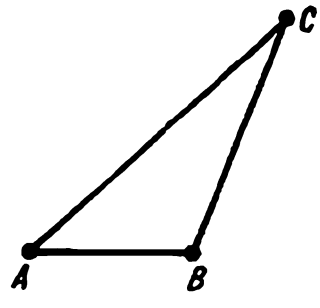


Рис.16.27

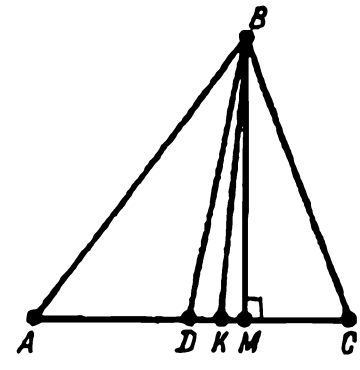


Рис.16.28

3.2. *Медіаною трикутника* називається відрізок, що сполучає його вершину з серединою протилежної сторони (рис. 16.28, відрізок *BD*). *Бісектрисою трикутника* називається відрізок бісектриси його кута, що лежить всередині трикутника (рис. 16.28, відрізок *BK*).

Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, яка містить протилежну сторону трикутника (рис. 16.28, відрізок *BM*).

3.3. *Ознаки рівності трикутників.*

I. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно рівні двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

II. Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно рівні стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

III. Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведемо другу ознаку рівності трикутників.

* Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, причому $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 16.29). Згідно з аксіомою 9 існує $\Delta A_1B_2C_2$, рівний ΔABC, у якого вершина B_2 лежить на промені A_1B_1, а вершина C_2 лежить в тій самій півплощині, що й вершина C_1, відносно прямої A_1B_1. Оскільки $A_1B_1 = AB = A_1B_2$, то точки B_2 і B_1 збігаються. Оскільки $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, то промені A_1C_2 і A_1C_1 збігаються. Промінь B_1C_2 збігається з променем B_1C_1, бо $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_2C_2$. Отже, точки C_1 і C_2 збігаються і $\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$. *

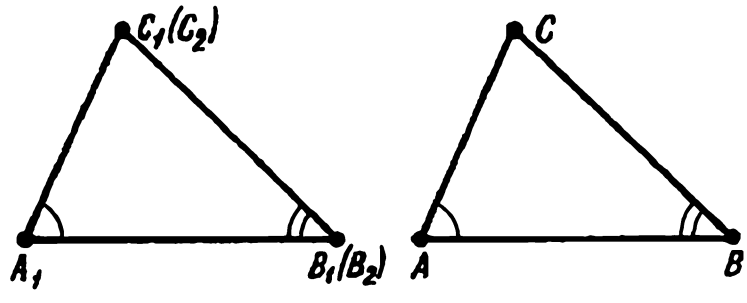


Рис.16.29

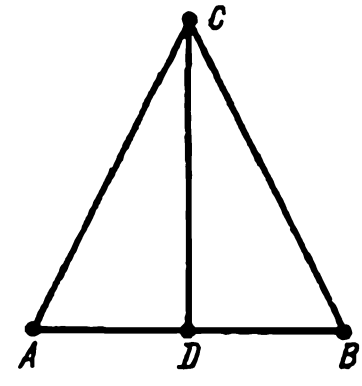


Рис.16.30

3.4. *Рівнобедрений трикутник має такі властивості.*

Теорема 1. *У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.*

* Нехай ΔABC рівнобедрений, причому $AC = BC$. Згідно з першою ознакою рівності трикутників маємо $\Delta CAB = \Delta CBA$, звідки $\angle B = \angle A$, що й треба було довести. *

Обернена теорема. *Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.*

* Нехай в ΔABC $\angle A = \angle B$, тоді $\Delta ABC = \Delta BAC$ за другою ознакою. Звідси випливає, що $AC = BC$, тобто ΔABC рівнобедрений.*

Наслідок. *Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.*

Теорема 2. *Медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є одночасно і бісектрисою і висотою.*

* Нехай CD — медіана рівнобедреного ΔABC (рис. 16.30). Згідно з першою ознакою рівності трикутників маємо $\Delta CAD = \Delta CBD$ ($CA = CB$, $AD = BD$, $\angle CAD = \angle CBD$). Отже, $\angle ACD = \angle BCD$ і CD — бісектриса кута C, $\angle CDA = \angle CDB = 90°$ (рівні суміжні кути), тобто CD — висота. *

Задачі

1. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($CA = CB$). На прямій AB розміщено точки M і N так, що $AN = BM$. Точка B лежить між точками A і M, точка A лежить між точками B і N. Довести, що: а) $\Delta ACM = \Delta BCN$. б) $\Delta CBM = \Delta CAN$ (рис. 16.31).

* а) Оскільки $BM = AN$, то $AM = BN$ і $\Delta ACM = \Delta BCN$ згідно з першою ознакою рівності трикутників ($AC = BC$, $AM = BN$, $\angle CAM = \angle CBN$);

б) $\angle CBM = \angle CAN$, бо кути CBM та CAN суміжні до рівних кутів A і B. Отже, $\Delta CBM = \Delta CAN$ за першою ознакою. *

2. На сторонах кута A розміщено точки B і C так, що $AB = AC$. З точок B і C проведено перпендикуляри до сторін кута. Довести, що точка перетину цих перпендикулярів лежить на бісектрисі кута A.

* Нехай $BD \perp AB$ і $CE \perp AD$ (рис. 16.32), $O = BD \cap CE$. За другою ознакою $\Delta ABD = \Delta ACE$ ($AB = AC$, $\angle DBA = \angle ECA = 90°$, кут A спільний). Отже, $AD = AE$ і $\angle ADB = \angle AEC$. Оскільки $AB = AC$, то $AD - AC = AE - AB$ або $CD = BE$. За другою ознакою $\Delta OCD = \Delta OBE$ ($CD = BE$, $\angle OCD = \angle OBE = 90°$, $\angle ODC = \angle OEB$). Звідси випливає, що $OC = OB$. За першою ознакою $\Delta AOC = \Delta AOB$ ($\angle ACO = \angle ABO = 90°$). Отже, $\angle CAO = \angle BAO$, тобто точка O лежить на бісектрисі кута A, що й треба було довести. *

§ 4. Кути трикутника і многокутника

4.1. Нехай прямі a та b перетинає пряма c (рис. 16.33), $A = a \cap c$, $B = b \cap c$. Пряма c називається *січною прямих* a та b. Виберемо на прямих a та b відповідно точки C і D, які лежать в різних півплощинах відносно прямої c. Точки F і M (рис. 16.33) також лежать в різних півплощинах відносно прямої c. Тоді кути CAB і DBA називаються внутрішніми різносторонніми. Кути FAB і MBA також *внутрішні різносторонні*. Кути CAB і MBA називаються *внутрішніми односторонніми*. Кути FAB і DBA

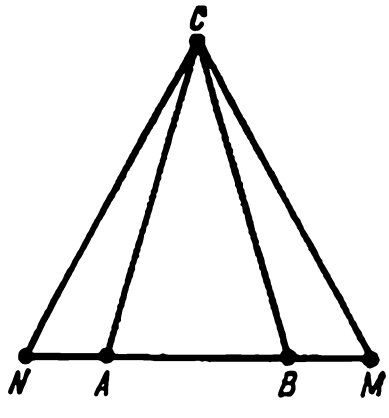


Рис.16.31

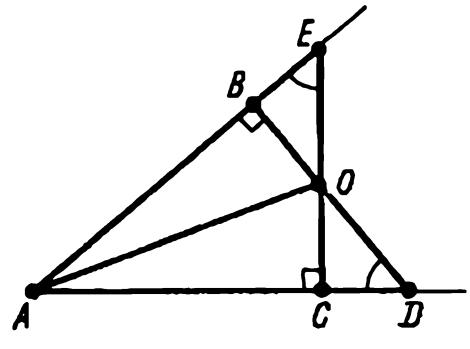


Рис.16.32

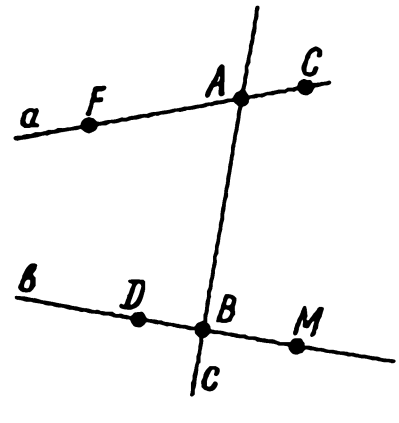


Рис.16.33

також внутрішні односторонні. На рис. 16.34 січна c перетинає прямі a і b. Кути 1, 2 або 3, 4 називаються *зовнішніми односторонніми*. Кути 1, 4 або 3, 2 називаються *зовнішніми різносторонніми*. Кути 1, 5 або 7, 2 називаються *відповідними* (кути 3, 6 або 8, 4 також відповідні).

Теорема 1 (ознака паралельності прямих). *Якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.*

* Нехай січна c перетинає прямі a і b відповідно у точках A та B (рис. 16.35), причому сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°. Припустимо, що прямі a і b непаралельні, тоді вони перетинаються в деякій точці C. На продовженні відрізка CB відкладемо відрізок $BD = AC$. Помітимо, що $\Delta ABD = \Delta BCA$ за першою ознакою (сторона AB спільна, $AC = BD$, $\angle ABD = 180° - \angle ABC = \angle BAC$, бо кути ABC та BAC внутрішні односторонні). Отже, $\angle ABC = \angle BAD$; помітимо, що $\angle CAD < 180°$, а з іншого боку, $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAB + \angle ABC = 180°$. Дійшли суперечності, тобто наше припущення неправильне, отже, прямі a і b паралельні. *

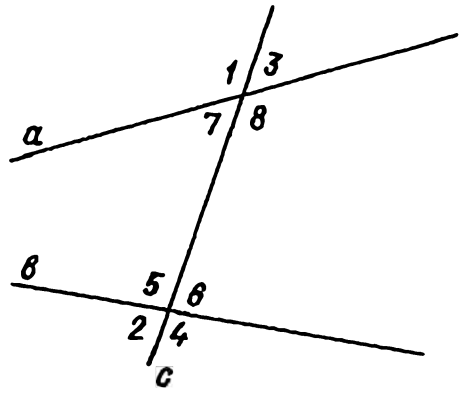


Рис.16.34

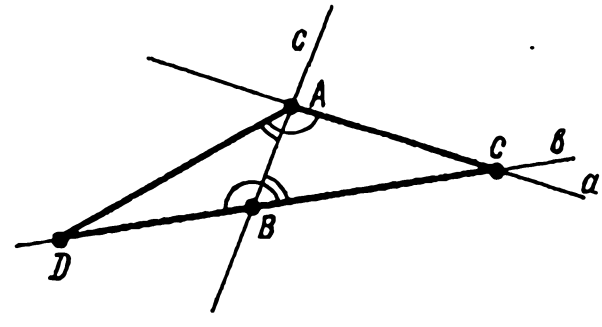


Рис.16.35

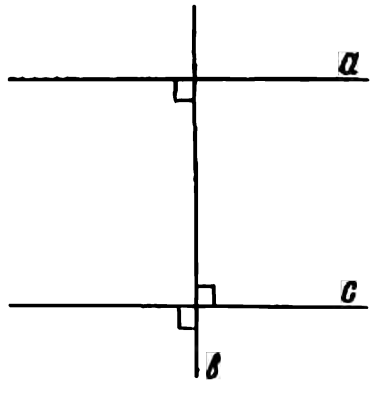


Рис.16.36

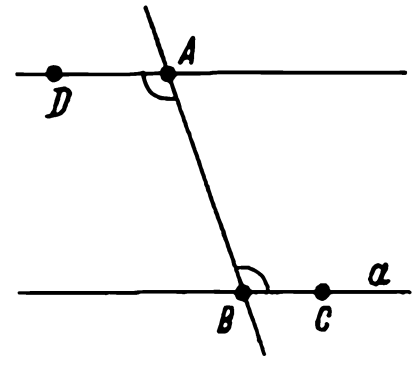


Рис.16.37

Існує ще *кілька ознак паралельності прямих*. Прямі паралельні, якщо:

а) внутрішні різносторонні кути рівні;

б) відповідні кути рівні;

в) сума зовнішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Окремо підкреслимо ознаку, що називається транзитивністю паралельних: якщо $a \parallel c$ і $b \parallel c$, то $a \parallel b$.

Теорема 2. *Якщо $a \perp b$ і $c \perp b$, то $a \parallel c$ (a і c — різні прямі,* рис. 16.36).

Теорема 3. *Якщо $a \parallel c$ і $b \perp a$, то $b \perp c$* (рис. 16.36).

Задачі

1. Через точку A, що не лежить на прямій a, провести пряму. паралельну прямій a.

* Нехай $A \notin a$ (рис. 16.37). Виберемо на прямій a довільні точки B і C. Відкладемо кут BAD, рівний куту ABC, від променя AB в півплощину, що не містить точки C, відносно прямої AB. Згідно з ознакою паралельності $DA \parallel BC$. Згідно з аксіомою 10 така пряма DA єдина. *

2. Різниця двох зовнішніх односторонніх кутів при паралельних прямих дорівнює α. Знайти ці кути.

* Нехай x, y — шукані кути (рис. 16.38). Ясно. що $x + y = 180°$, бо $a \parallel b$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 180^\circ, \\ x - y = \alpha. \end{cases} \quad \text{звідки} \quad x = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad y = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь: $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. *

3. На рис. 16.39 вказано значення кутів A, B, C. Чи паралельні прямі a і b?

* Проведемо через точку B пряму $c \parallel a$ (рис. 16.40), тоді $\angle ABD = 80°$, $\angle DBC = 22^\circ$, а $\angle DBC$ та $\angle ECB$ — внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180°, отже, $c \parallel b$. Прямі a та b паралельні. *

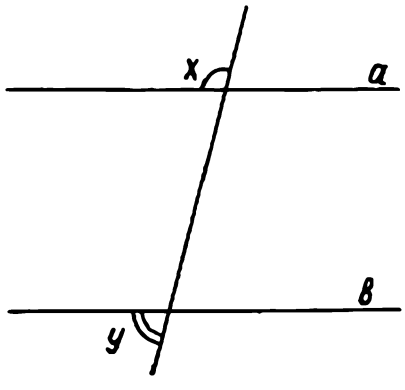


Рис.16.38

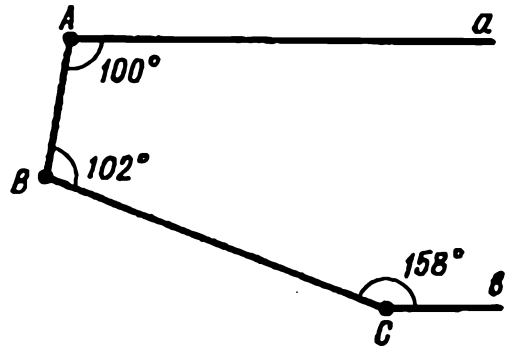


Рис.16.39

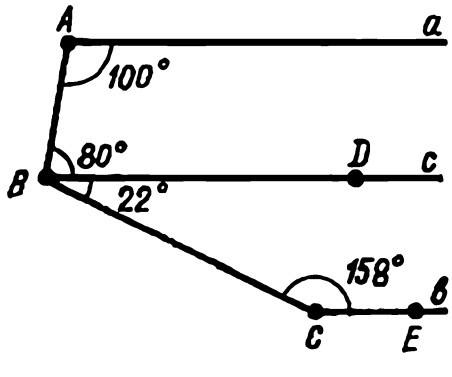


Рис.16.40

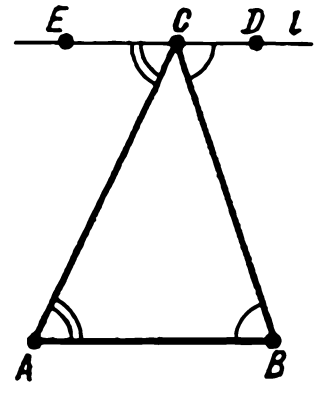


Рис.16.41

4.2. ***Теорема 1.*** *Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює* 180°.

* Проведемо через вершину C трикутника ABC пряму $l \parallel AB$ (рис. 16.41). Точки D і E лежать на прямій l по різні боки від точки C, тоді $\angle DCB = \angle CBA$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих l та AB. Аналогічно доведемо, що $\angle ECA = \angle CAB$. Таким чином, сума кутів трикутника ABC дорівнює розгорнутому куту C, тобто 180°. *

Із теореми 1 випливає, що будь-який трикутник має не менше двох гострих кутів.

Теорема 2. *Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним.*

* $\angle CBD$ — зовнішній кут ΔABC (рис. 16.42). Маємо: $\angle CBD = 180° - \angle B = \angle A + \angle C$, що й треба було довести. *

Наслідок. *Зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній, не суміжний з ним.*

4.3. ***Теорема 1.*** *Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника дорівнює* $180°\,(n-2)$, *де* n — *число його сторін.*

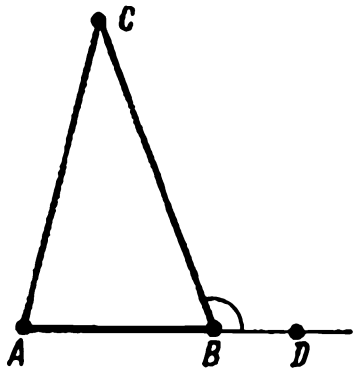


Рис.16.42

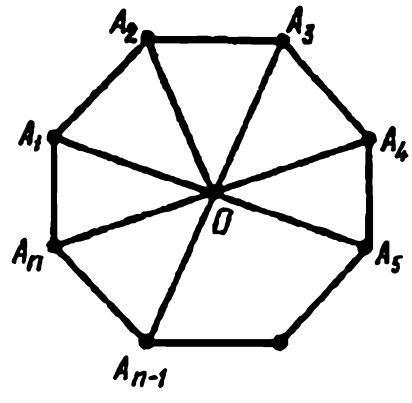


Рис.16.43

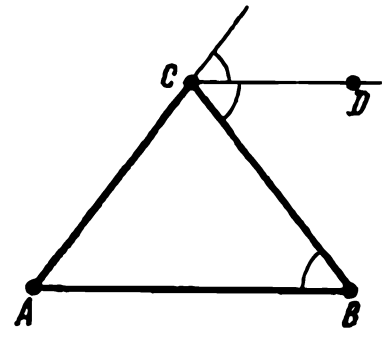


Рис.16.44

* Візьмемо всередині многокутника $A_1A_2\ldots A_n$ точку O (рис. 16.43). Сполучивши точку O з вершинами многокутника, дістанемо n трикутників: ΔA_1OA_2, ΔA_2OA_3, …, $\Delta A_{n-1}OA_n$, ΔA_nOA_1. Сума кутів усіх цих трикутників дорівнює $180°\,n$. До цієї суми входять кути при вершині O, які не є кутами многокутника. Сума всіх кутів з вершиною O дорівнює $360°$. Тому шукана сума дорівнює $180°n - 360° = 180°(n-2)$.

Доведемо цю саму теорему за допомогою методу математичної індукції.

1. $n = 3$; $S_3 = 180°\,(3-2) = 180°$, що справедливо.

2. $n = m$. Нехай $S_m = 180°\,(m-2)$ — сума внутрішніх кутів опуклого m-кутника. Розглянемо опуклий $(m+1)$-кутник $A_1A_2\ldots A_mA_{m+1}$. Сполучимо вершини A_1 і A_m:

$$S_{m+1} = S_1 + S_m, \qquad (16.1)$$

де S_{m+1} — сума внутрішніх кутів $(m+1)$-кутника, S_m — сума внутрішніх кутів m-кутника $A_1A_2\ldots A_m$, S_1 — сума внутрішніх кутів трикутника $A_1A_mA_{m+1}$. За припущенням індукції з рівності (16.1) маємо

$$S_{m+1} = 180°\,(m-2) + 180° = 180°\,(m-1),$$

що завершує індуктивне доведення. *

Теорема 2. *Сума зовнішніх кутів многокутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює* $360°$.

Задачі

1. Довести, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

* Нехай C — вершина рівнобедреного ΔABC (рис. 16.44). Тоді $\angle B = \frac{1}{2}(180° - \angle C)$ і $\angle BCD = \frac{1}{2}(180° - \angle C)$ (CD — бісектриса зовнішнього кута при вершині). Отже, $CD \parallel AB$. *

2. Бісектриси кутів A і B (рис. 16.45) трикутника ABC перетинаються в точці O. Довести, що сторону AB видно з точки O під кутом $90° + \frac{1}{2}\angle C$.

* Маємо $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle C) =$

$= 90° + \frac{1}{2}\angle C$. *

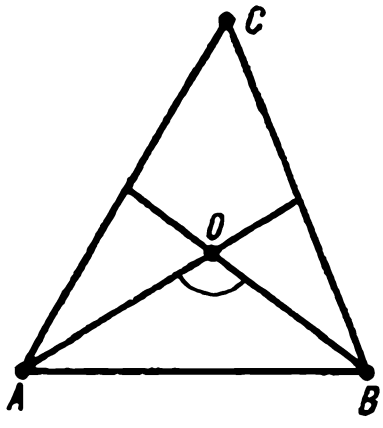


Рис.16.45

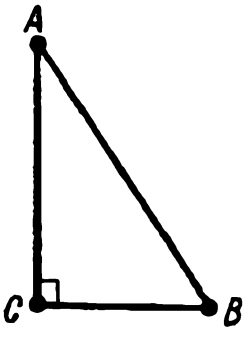


Рис.16.46

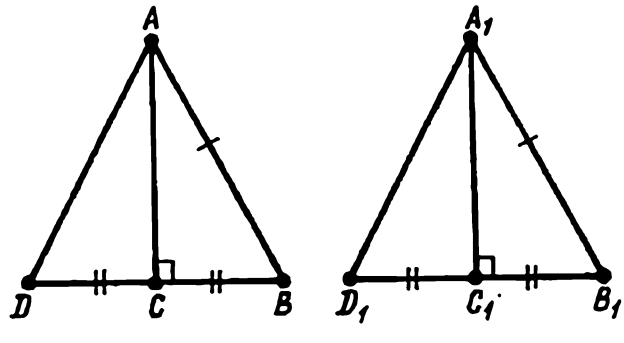


Рис.16.47

4.4. *Прямокутний* трикутник (рис. 16.46) має прямий кут при вершині, яку позначимо буквою C, тоді сторона AB, яка лежить проти цього кута, називається *гіпотенузою*, інші дві сторони називаються *катетами*. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°. Дійсно, $\angle A + \angle B = 180° - \angle C = 180° - 90° = 90°$.

Ознаки рівності прямокутних трикутників.

1. *Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.*

2. *Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.*

3. *Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні.*

4. *Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і катету другого, то такі трикутники рівні.*

* На рис. 16.47 зображено прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, де $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. На промені BC візьмемо точку D так, що $CD = CB$, на промені B_1C_1 візьмемо точку D_1 так, що $C_1D_1 = C_1B_1$. Маємо $\Delta ABC = \Delta ADC$, а $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_1D_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників. Отже, $AD = AB$ і $A_1D_1 = A_1B_1$. Оскільки $AB = A_1B_1$, то $AD = A_1D_1$ і $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, що $\angle B = \angle B_1$. Тепер можна твердити, що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ рівні ($BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle B = \angle B_1$). *

Задачі

1. Кут між бісектрисою і висотою, які виходять з однієї вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 9°. Знайти кути трикутника.

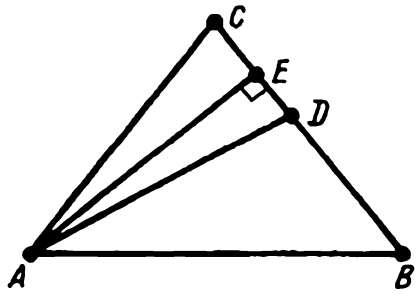


Рис.16.48

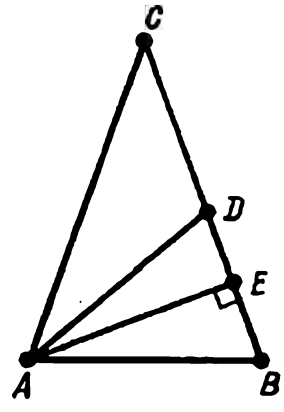


Рис.16.49

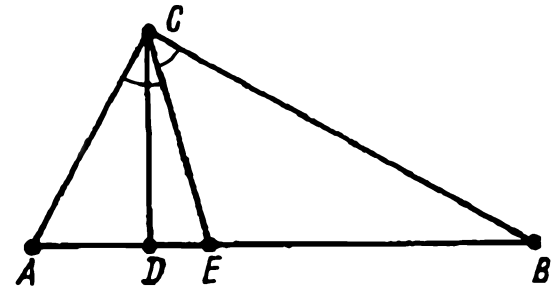


Рис.16.50

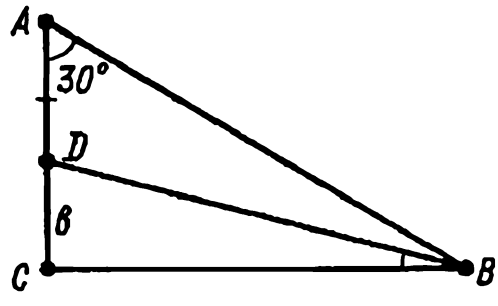


Рис.16.51

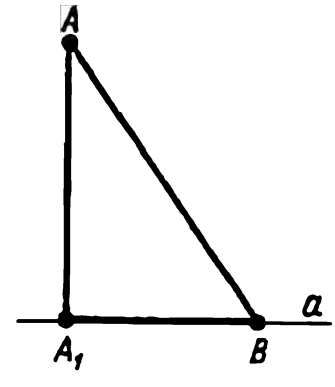


Рис.16.52

* Зрозуміло з умови, що висота і бісектриса проведені з вершини при основі рівнобедреного трикутника. Можливі два випадки.

1) Бісектриса AD проходить між висотою AE і основою AB (рис. 16.48). Нехай $\angle DAB = \alpha$, тоді $\angle B = 2\alpha$. З ΔABE маємо: $\angle B + \angle DAB + \angle DAE = 2\alpha + \alpha + 9° = 90°$.. звідки $\alpha = 27°$. Отже, $\angle B = 54° = \angle A$, а $\angle C = 72°$.

2) Бісектриса AD проходить між висотою AE і бічною стороною AC (рис. 16.49). Якщо $\angle DAB = \alpha$, то $\angle B = 2\alpha$. Отже, $\angle EAB = \angle DAB - \angle DAE = \alpha - 9°$. З ΔABE маємо $\angle B + \angle BAE = 90°$ або $2\alpha + \alpha - 9° = 90°$, звідки $\alpha = 33°$, $\angle B = 66° = \angle A$ і $\angle C = 48°$. Відповідь: 54°, 54°, 72° або 66°, 66°, 48°. *

2. У прямокутному трикутнику (рис. 16.50) проведено висоту CD, причому CE — бісектриса $\angle BCD$. Довести, що $AC = AE$.

* Нехай $\angle DCE = \alpha$, тоді $\angle BCE = \alpha$, $\angle AEC = \angle B + \alpha$, бо $\angle AEC$ — зовнішній кут ΔBCE. Оскільки $\angle ACD = \angle B$, то $\angle ACE = \angle AEC$ і $AC = AE$. *

3. У прямокутному трикутнику (рис. 16.51) катет довжиною b прилягає до кута 30°. Знайти бісектрису другого гострого кута.

* Нехай BD — бісектриса кута B і $AC = b$. Оскільки $\angle B = 60°$, то $\angle ABD = 30°$ і $BD = AD = x$, тоді $CD = \frac{1}{2}x$. Тепер маємо: $AC = x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$. Отже, $b = \frac{3}{2}x$, $x = \frac{2}{3}b$. Відповідь: $\frac{2}{3}b$. *

4.5. Нехай AA_1 — перпендикуляр, проведений з точки $A \notin a$ на пряму a (рис. 16.52), $B \in a$, $B \neq A_1$. Відрізок AB називається *похилою*, точка B — *основою похилої*. Відрізок A_1B — це *проекція похилої* AB на пряму a. Позначається так: $\text{Пр}_a AB = A_1B$.

Теорема 1. *Якщо із точки поза прямою проведено перпендикуляр і похилі до неї, то: 1) перпендикуляр менший від будь-якої похилої, 2) рівні похилі мають рівні проекції, 3) більшій похилій відповідає більша проекція і, навпаки, більшій проекції відповідає більша похила.*

Теорема 2. *З будь-якої точки можна провести один і тільки один перпендикуляр до даної прямої.*

Довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої, називається *відстанню від точки до прямої.*

Теорема 3. *Відстань від будь-якої точки прямої до паралельної їй прямої стала.* Довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки прямої до паралельної прямої, називається *відстанню між паралельними прямими.*

Вправи

1. Внутрішні кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. Як відносяться його зовнішні кути?

2. Бісектриси рівнобедреного трикутника, перетинаючись, утворюють кут 30°. Знайти кути трикутника.

3. Висоти рівнобедреного трикутника, перетинаючись, утворюють кут 30°. Знайти кути трикутника.

4. Трикутник ABC — рівнобедрений, причому $\angle A = 100°$. Знайти кут між бісектрисою кута C і стороною AB.

5. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює стороні цього трикутника. Знайти кути трикутника.

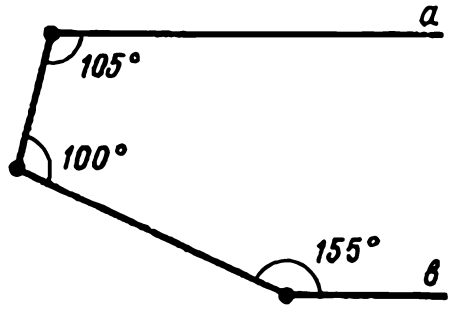


Рис.16.53

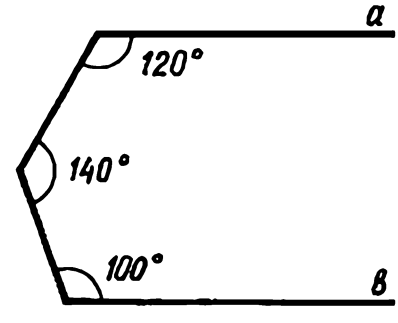


Рис.16.54

6. Бісектриса кута при вершині трикутника перетинає протилежну сторону під кутом 70°, а бісектрису одного з кутів при цій стороні — під кутом 60°. Знайти кути трикутника.

7. Бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O, причому $\angle AOC = 135°$. Довести, що трикутник ABC прямокутний.

8. Бісектриси кутів B і C трикутника ABC перетинаються в точці O; $\angle A = 60°$. Знайти $\angle BOC$.

9. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника в 3 рази більша за суму зовнішніх кутів. Скільки сторін має цей многокутник?

10. Різниця двох внутрішніх односторонніх кутів дорівнює α. Знайти ці кути, якщо прямі паралельні.

11. Визначити за рис. 16.53, чи паралельні прямі a і b.

12. Користуючись рис. 16.54, визначити, чи паралельні прямі a і b.

13. Один з кутів, утворених січною при перетині двох паралельних прямих, дорівнює 106°. Друга січна утворює з даною кут 75°. Які кути утворює друга січна з цими паралельними прямими?

14. Відомо, що AD — бісектриса ΔABC. На стороні AC вибрано точку E так, що $DE \parallel AB$. Довести, що $AE = DE$.

§ 5. Геометричні побудови

5.1. Фігура, що є геометричним місцем усіх тих і тільки тих точок площини, які однаково віддалені від даної точки (центра), називається *колом*. На рис. 16.55 показано коло з центром O і радіусом R. Позначається так: $\omega(O, R)$.

Відрізок, що сполучає центр кола з точкою на ньому, називається *радіусом кола*. Радіусом також називатимемо і довжину цього відрізка. Відрізок, що сполучає дві різні точки кола, називається *хордою*. На рис. 16.55 OA — радіус, BC — хорда, DE — діаметр.

Теорема 1. *Діаметр кола є найбільшою хордою.*

Теорема 2. *Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.*

* Нехай діаметр AB перпендикулярний до хорди MN (рис. 16.56). Розглянемо ΔMON. Він рівнобедрений. Отже, його висота OC є і медіаною, тобто $MC = CN$. *

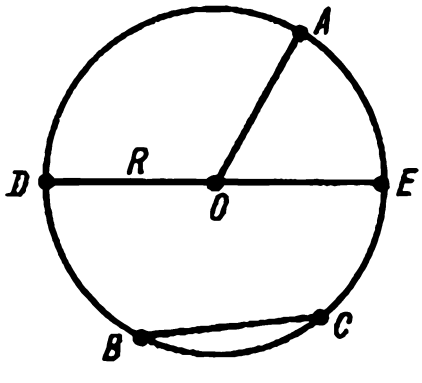


Рис.16.55

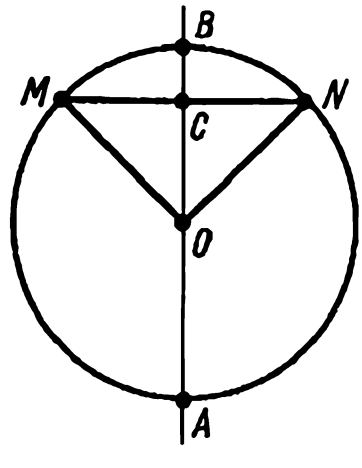


Рис.16.56

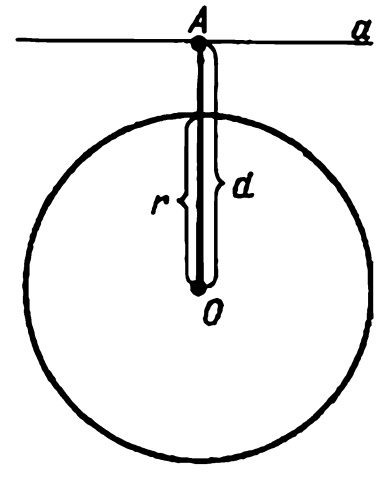


Рис.16.57

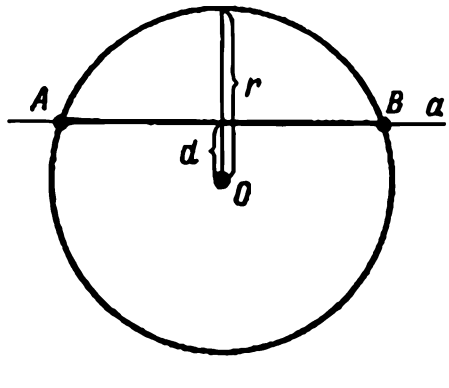


Рис.16.58

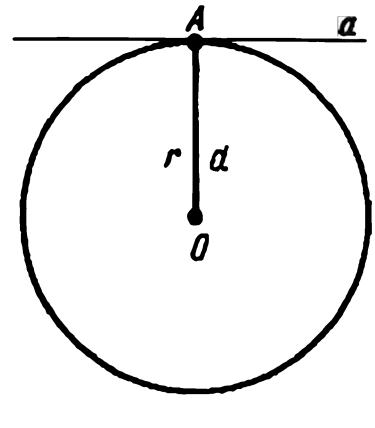


Рис.16.59

5.2. Нехай d — відстань від центра O кола радіуса r до прямої a. Можливі три випадки.

а) $d > r$ (рис. 16.57) — коло і пряма не перетинаються;

б) $d < r$ (рис. 16.58) — пряма перетинає коло в двох точках;

в) $d = r$ (рис. 16.59) — пряма і коло мають одну спільну точку. В цьому випадку пряма a називається дотичною до кола.

Теорема 1. *Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, який сполучає центр кола з точкою дотику.*

На рис. 16.60 зображено точки A, B, C, що не лежать на одній прямій. Точка M — середина відрізка AB. Пряма a, що проходить через точку M і перпендикулярна до прямої AB, називається *серединним перпендикуляром* відрізка AB. Візьмемо на прямій a довільну точку O і розглянемо ΔAOB. У ньому $OM \perp AB$, $AM = MB$, отже ΔAOB рівнобедрений, тобто $OA = OB$. Таким чином, будь-яка точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від його кінців. Ясно, що і навпаки, якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона лежить на серединному перпендикулярі до цього відрізка.

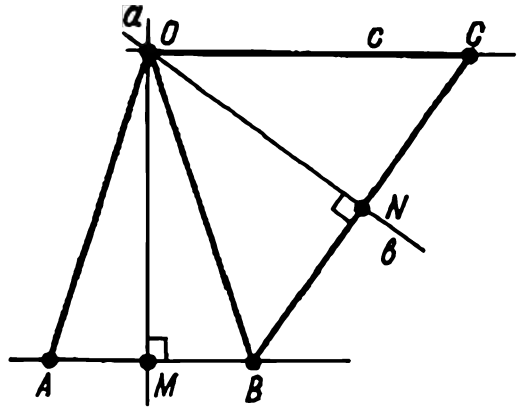


Рис.16.60

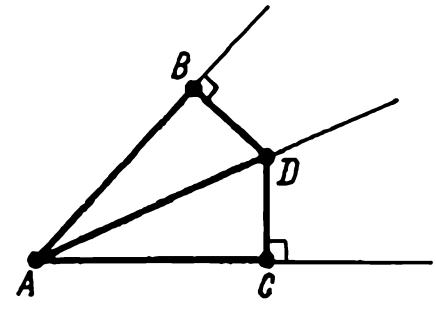


Рис.16.61

Геометричне місце точок (г. м. т.), що мають деяку властивість, — це фігура, що складається з усіх тих і тільки тих точок, які мають цю властивість. Наприклад, г. м. т., рівновіддалених від кінців відрізка, — це серединний перпендикуляр до цього відрізка. Нехай N — середина відрізка BC, b — серединний перпендикуляр до відрізка BC (рис. 16.60). Прямі a і b перетинаються в точці O, рівновіддаленій від точок A, B, C. Отже, точка O — центр кола, що проходить через точки A, B, C.

Теорема 2. *Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести коло і притому тільки одне.*

Коло називається *описаним* навколо трикутника, якщо воно проходить через всі його вершини. Із теореми 2 випливає, що будь-який трикутник має описане коло, центр якого лежить на перетині серединних перпендикулярів до сторін трикутника. Коло називається *вписаним* у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема 3. *У будь-який трикутник можна вписати коло.*

Лема (допоміжна теорема). *Будь-яка точка бісектриси кута однаково віддалена від його сторін.*

* На бісектрисі кута A візьмемо довільну точку D (рис. 16.61), B і C — проекції точки D на сторони кута A. Трикутники ABD і ACD рівні (спільна гіпотенуза AD, $\angle BAD = \angle CAD$). Отже, $BD = CD$, що й треба було довести. *

Нехай O — точка перетину бісектрис кутів A і B трикутника ABC (рис. 16.62). Згідно з лемою точка O однаково віддалена від сторін AC та AB і від сторін BC та AB, тобто перпен-

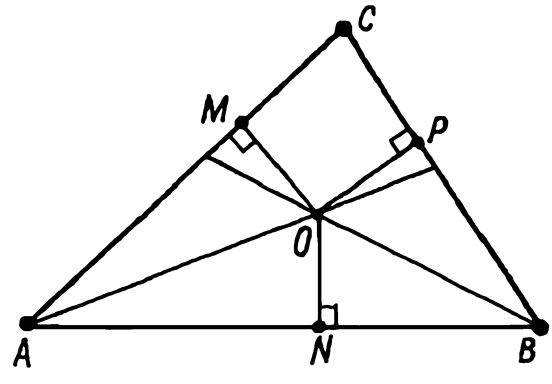


Рис.16.62

дикуляри OM, ON, OP, опущені з точки O на сторони трикутника, рівні і є радіусами вписаного кола з центром O.

5.3. Два кола, що мають єдину спільну точку, *дотикаються в цій точці*. Ці кола мають в спільній точці *спільну дотичну*. При цьому розрізняють *дотик внутрішній* (рис. 16.63, *а*) *та зовнішній* (рис. 16.63, *б*). Нехай відстань між центрами O_1 і O_2 двох кіл дорівнює d. Відрізок O_1O_2 називається *лінією центрів*. Розглянемо можливі випадки взаємного розміщення двох кіл залежно від їх радіусів R_1, R_2 та довжини d лінії центрів.

а) $d > R_1 + R_2$. Кола лежать одне поза другим і не мають спільних точок (рис. 16.64, *а*).

б) $d = R_1 + R_2$. Дотик кіл зовнішній (рис. 16,63, *б*).

в) $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$. Кола перетинаються в двох точках (рис. 16.64, *б*).

г) $d = |R_1 - R_2|$. Дотик кіл внутрішній (рис. 16.63, *а*).

д) $0 < d < |R_1 - R_2|$. Одне коло лежить всередині другого і не дотикається до нього (рис. 16.64, *в*).

е) $d = 0$. Центри кіл збігаються (рис. 16.64, *г*). Такі кола називаються *концентричними*.

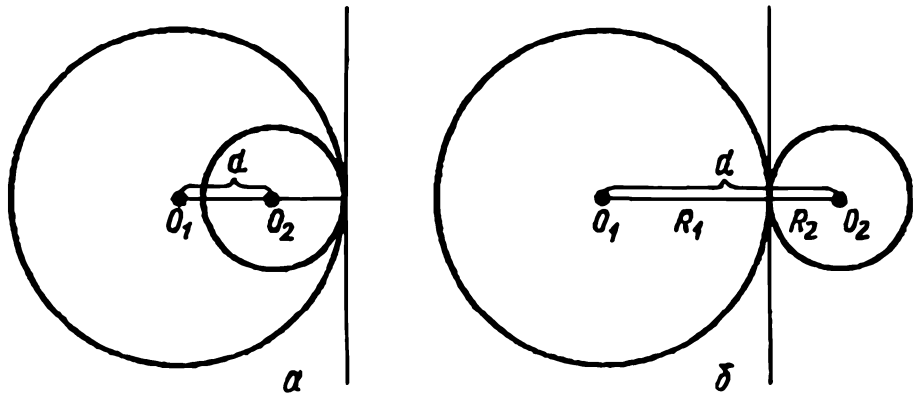


Рис.16.63

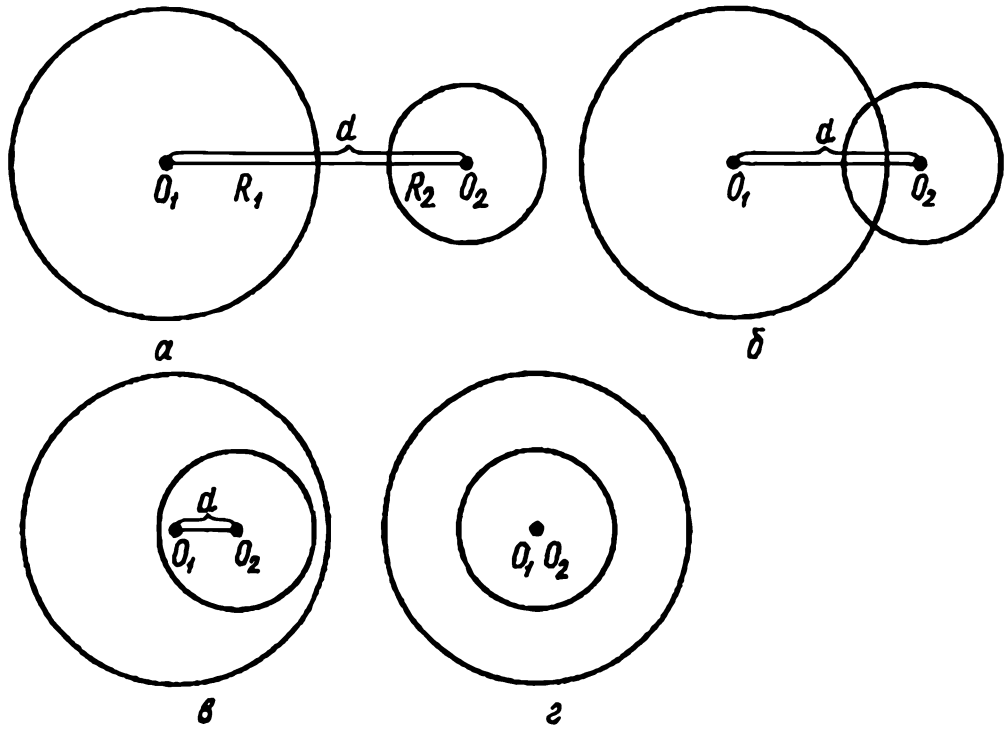


Рис.16.64

Теорема 1. *Якщо два кола дотикаються, то точка дотику лежить на прямій, що проходить через лінію центрів.*

Доведення випливає з того, що радіус, проведений в точку дотику, перпендикулярний до дотичної.

Задачі

1. З точки кола проведено дві хорди, рівні радіусу. Знайти кут між ними.

* На рис. 16.65 показано хорди AB і AC, кожна з яких дорівнює радіусу кола. Трикутники ABO і ACO рівносторонні, отже, матимемо: $\angle BAO = \angle CAO = 60°$, $\angle BAC = 120°$. Відповідь: 120°. *

2. У колі з центром O проведено хорду AB і продовжено її на відстань BC, рівну радіусу. Через точку C та центр кола O проведено пряму, яка перетинає коло в точках D і E (рис. 16.66). Довести, що $\angle AOE = 3\angle ACO$.

* Нехай $\angle ACO = \alpha$. Оскільки $BC = BO$, то $\angle BOC = \angle BCO = \alpha$; $\angle OBA$ — зовнішній кут ΔBOC, тому $\angle OBA = 2\alpha$. Оскільки ΔAOB рівнобедрений, то $\angle OAC = \angle OBA = 2\alpha$. $\angle AOE$ — зовнішній кут ΔAOC. Отже, $\angle AOE = \angle ACO + \angle OAC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. *

3. Точка M лежить зовні кола. Довести, що дотичні, проведені до кола з точки M, рівні.

* Нехай MA та MB — дотичні до кола з центром O (рис. 16.67). Прямокутні трикутники AOM і BOM рівні ($OA = OB$, OM — спільна гіпотенуза). Звідси випливає, що $MA = MB$. *

5.4. *Центральним* називається кут з вершиною в центрі кола. На рис. 16.68 показано центральний кут AOB. Частина кола, розміщена всередині плоского центрального кута, називається *дугою* кола. Градусна міра дуги дорівнює градусній мірі відповідного їй центрального кута і позначається так: $\cup AnB = \angle AOB$. На рис. 16.68 центральний кут AOB з градусною мірою α визначає дві дуги: $\cup AnB$ з градусною мірою α та $\cup AmB$ з градусною мірою $360° - \alpha$.

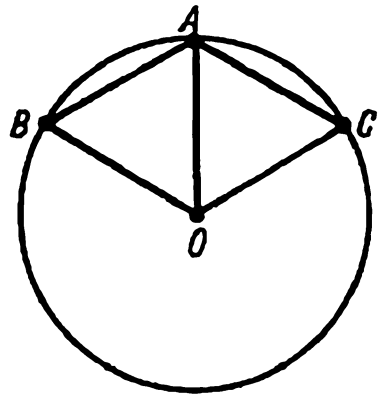


Рис.16.65

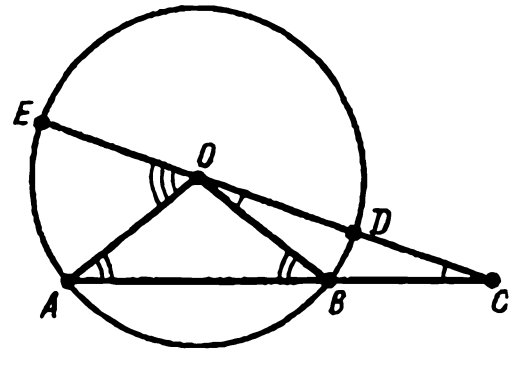


Рис.16.66

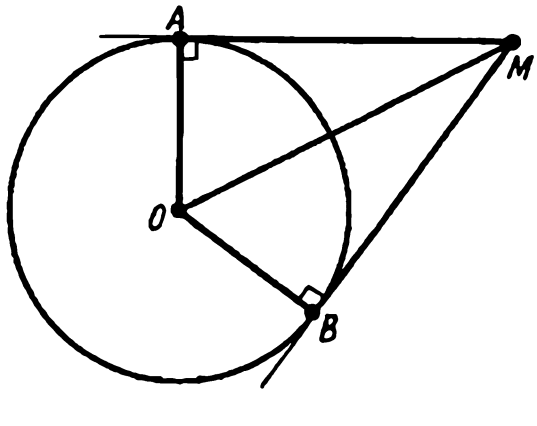


Рис.16.67

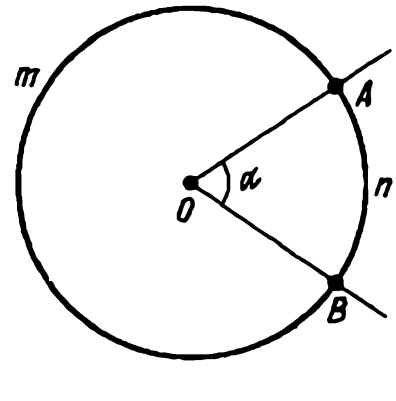


Рис.16.68

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається *вписаним*. На рис. 16.69 показано вписаний кут BAC. Цей кут спирається на дугу BnC.

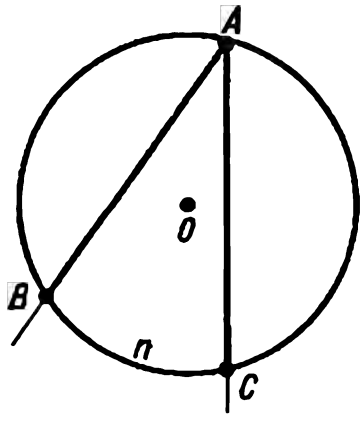


Рис.16.69

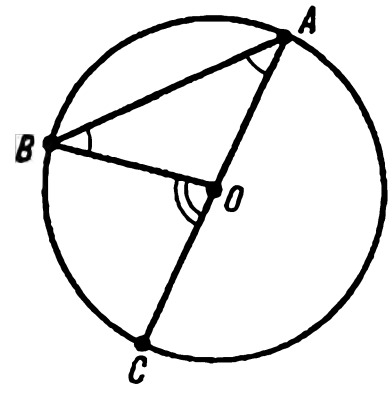


Рис.16.70

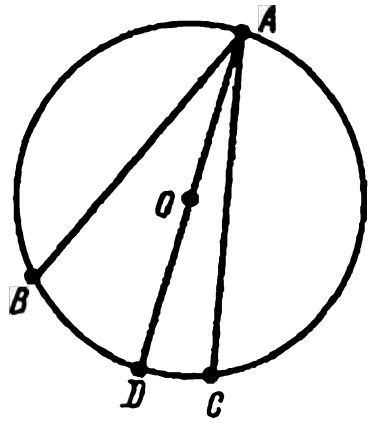


Рис.16.71

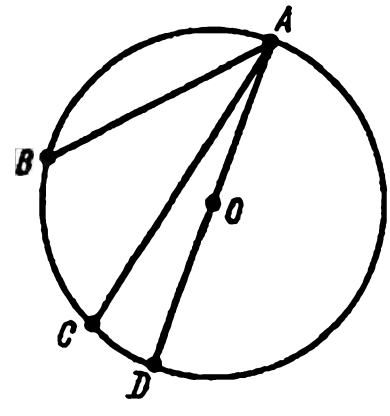


Рис.16.72

Теорема 1. *Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.*

* 1. Нехай центр O кола лежить на стороні вписаного кута BAC (рис. 16.70). Сполучивши точки O і B, дістанемо рівнобедрений ΔAOB. Нехай $\angle BAC = \alpha$, тоді $\angle ABO = \angle BAC = \alpha$ і $\angle BOC = 2\alpha$, бо $\angle BOC$ — зовнішній кут ΔBOA. Дуга BC відповідає центральному куту BOC і тому дорівнює 2α. Таким чином, $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$, що й треба було довести.

2. Нехай центр O кола лежить всередині вписаного кута (рис. 16. 71). Промінь AO перетинає коло в точці D. Згідно з випадком 1 маємо $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD$, $\angle DAC = \frac{1}{2} \cup DC$. Додавши почленно ці рівності, маємо

$$\angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2} \cup BD + \frac{1}{2} \cup \mathrm{DC},$$

$$\text{або } \angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC,$$

що й треба було довести.

3. Нехай центр O кола лежить зовні вписаного кута (рис. 16.72). Промінь AO перетинає коло в точці D. Згідно з випадком 1 маємо $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD$, $\angle CAD = = \frac{1}{2} \cup CD$.

Віднявши почленно другу рівність від першої, маємо

$$\angle BAD - \angle CAD = \frac{1}{2} \cup BD - \frac{1}{2} \cup CD,$$

$$\text{або } \angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC,$$

що й треба було довести. *

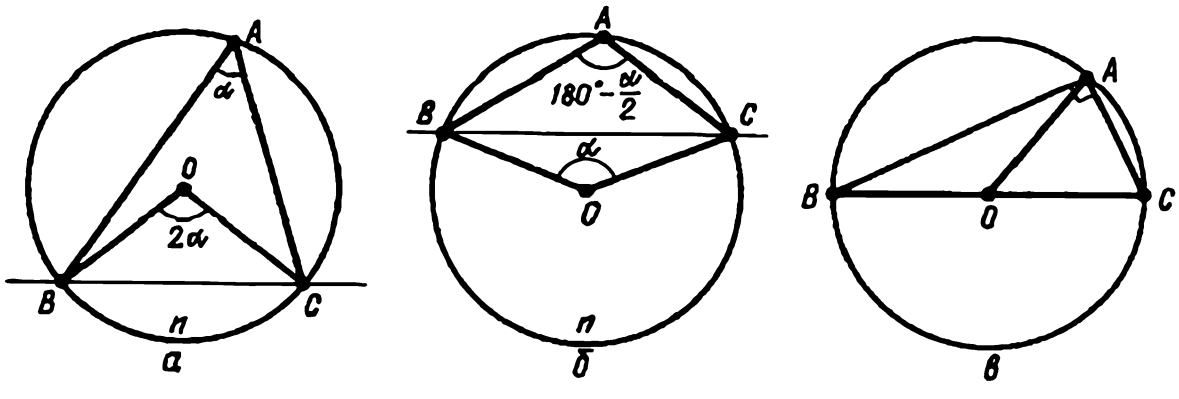


Рис.16.73

Зауважимо, що формулюючи теорему 1, можна показати зв'язок між вписаним і відповідним центральним кутом.

Нехай $\angle BAC$ — вписаний кут. Якщо цей кут гострий, то він дорівнює половині центрального кута BOC ($\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$) (рис. 16.73, *а*). Якщо ж вписаний кут тупий (рис. 16.73, *б*), то він доповнює половину центрального кута до 180° ($\angle BAC = 180° - \frac{1}{2} \angle BOC$). Дійсно,

$$\cup BnC = 360° - \alpha, \quad \angle BAC = \frac{1}{2} \cup BnC = (360° - \alpha) = 180° - \frac{\alpha}{2}.$$

Якщо кут BAC прямий (рис. 16.73, *в*), то $\cup BnC = 180°$, тобто у прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза BC є діаметром описаного кола, а $AO = BO = CO = \frac{1}{2} BC$.

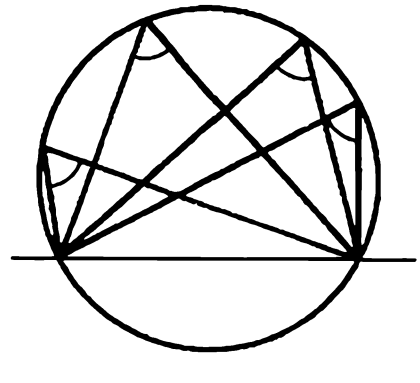


Рис.16.74

Теорема 2. *У прямокутному трикутнику центр описаного кола є серединою гіпотенузи, а медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині її.*

З теореми 1 маємо два наслідки.

Наслідок 1. *Всі вписані кути, що спираються на одну дугу, рівні між собою* (рис. 16.74). *Зокрема, всі вписані кути, що спираються на півколо, прямі.*

Наслідок 2. *Г. м. т., з яких даний відрізок AB видно під даним кутом* α, *— це дуга кола* (рис. 16.75). Тут *AB*— хорда, $\angle ATB = \alpha$ (точки належать одній півплощині).

Теорема 3. *Кут, утворений хордою і дотичною, проведеною через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, що лежить всередині цього кута.*

* На рис. 16.76 показано коло ω (O; OA). Кут BAC утворений хордою AB і дотичною AC, проведеною через кінець A хорди AB, AD — діаметр кола. Маємо $\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB = 90° - \frac{1}{2} \cup DB = \frac{1}{2} \cup DA - \frac{1}{2} \cup DB = \frac{1}{2} \cup AB$. Якщо кут між хордою і дотичною тупий ($\angle BAE > 90°$), то маємо

$$\angle BAE = \angle DAE + \angle BAD = 90° + \frac{1}{2} \cup BD = \frac{1}{2} \cup BDA. *$$

Зауваження. Теорема 3 означає, що кут між хордою і дотичною дорівнює вписаному куту, що спирається на відповідну дугу.

Теорема 4. *Кут, вершина якого лежить всередині кола, вимірюється півсумою дуг* ($\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AnC + \frac{1}{2} \cup DmE$) (рис. 16.77).

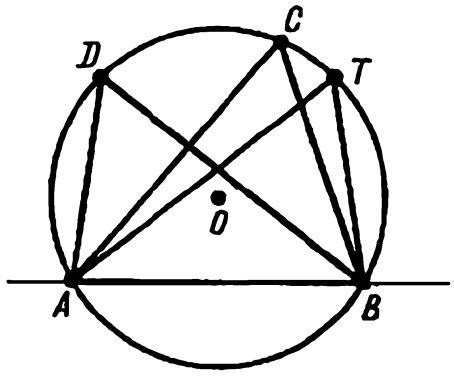


Рис.16.75

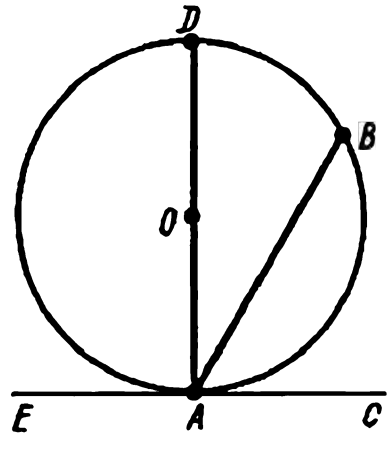


Рис.16.76

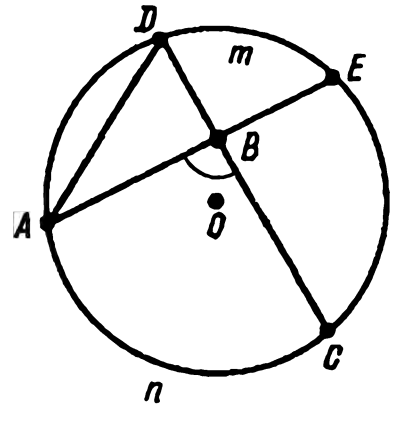


Рис.16.77

* Вершина B кута ABC лежить всередині кола. Кут ABC є зовнішнім кутом ΔADB, тому

$$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2} \cup AnC + \frac{1}{2} \cup DmE.*$$

Теорема 5. *Кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею дуг, що лежать між його сторонами.*

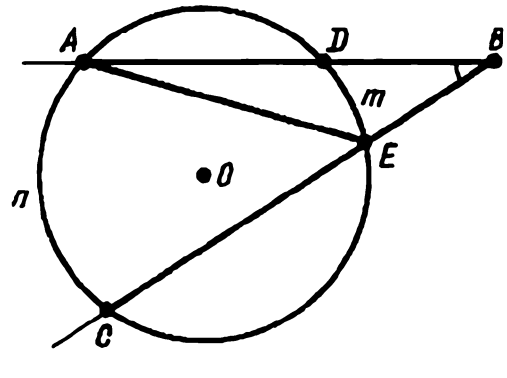


Рис.16.78

* Сторони кута B перетинають коло в точках A, D, E, C (рис. 16.78), $\angle AEC$ — зовнішній кут ΔABE. Тому $\angle AEC = \angle BAE + \angle ABE$, звідки

$$\angle ABE = \angle AEC - \angle BAE = \frac{1}{2} \cup AnC - \frac{1}{2} \cup DmE. *$$

Зауваження. Теорема залишається справедливою і в тому випадку, коли сторони кута дотикаються до кола (рис. 16.79). У цьому випадку, згідно з теоремою 3, маємо

$$\angle ABC = \angle ACD - \angle BAC = \frac{1}{2} \cup AnC - \frac{1}{2} \cup AmC.$$

Задачі

1. Хорди AD і BC кола перетинаються (рис. 16.80), $\angle ABC = 40°$, $\angle ACD = 90°$. Знайти $\angle CAD$.

* Використовуючи властивості вписаного кута, маємо $\angle ADC = 40°$, бо він спирається на дугу AnC. Отже, $\angle CAD = 50°$. Відповідь: 50°.

2. Дві рівні хорди AB і CD кола перетинаються в точці M. Довести, що $AM = MD$ і $BM = MC$ (рис. 16.81).

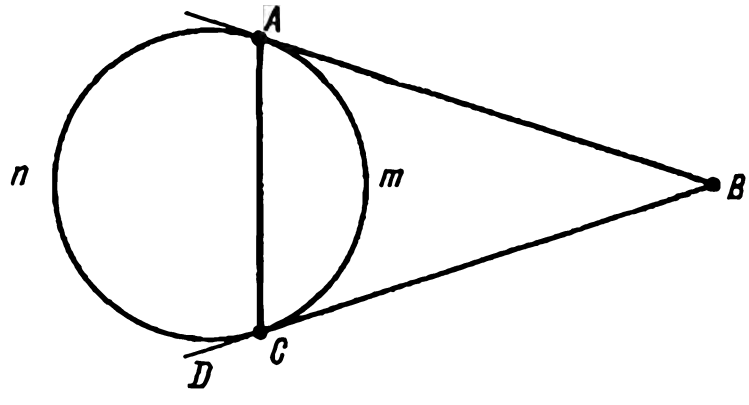


Рис.16.79

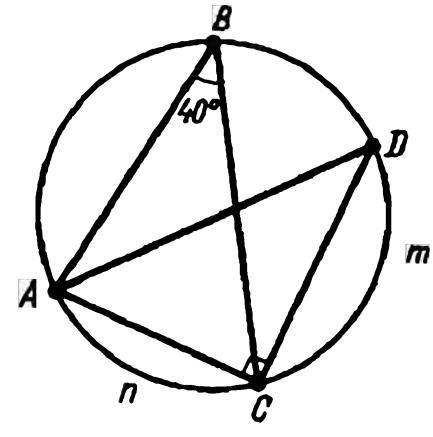


Рис.16.80

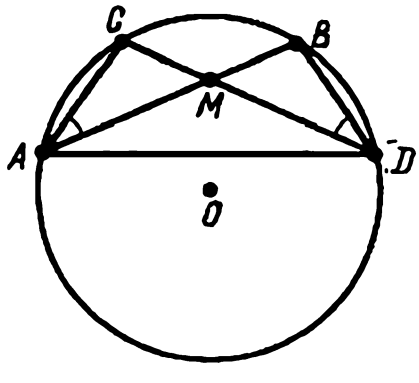


Рис.16.81

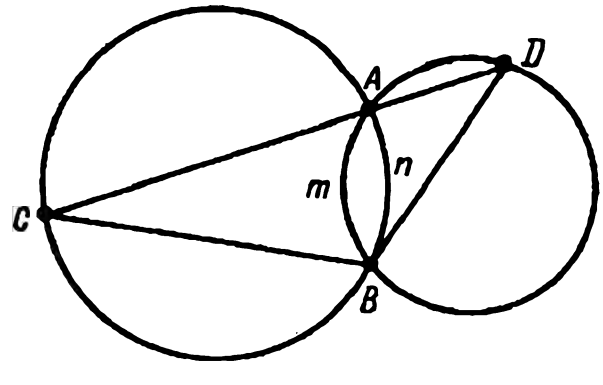


Рис.16.82

* Кути CAB і BDC вписані і спираються на дугу BC, тому

$$\angle CAB = \angle BDC. \qquad (П16.1)$$

Оскільки хорди AB і CD рівні, то і дуги, які вони стягують, рівні, тобто $\cup CBD = \cup ACB$, звідки

$$\angle CAD = \angle BDA. \qquad (П16.2)$$

Віднімаючи почленно рівність (П16.1) від рівності (П16.2), маємо $\angle BAD = \angle CDA$. Це означає, що ΔAMD рівнобедрений: $AM = MD$ і $BM = CM$. *

3. Два кола перетинаються в точках A і B (рис. 16.82). Через точку A проведено пряму, яка перетинає кола відповідно в точках C і D. Довести, що значення кута CBD є сталим для будь-якої прямої, що проходить через точку A.

* Маємо: $\angle CBD = 180° - \angle BCA - \angle BDA = 180° - \frac{1}{2} \cup AnB - \frac{1}{2} \cup AmB$. Оскільки дуги AnB та AmB сталі, то і значення кута CBD стале. *

5.5. Крім задач на обчислення та доведення, в геометрії є ще *задачі на побудову*, в яких треба побудувати деяку фігуру (відрізок, коло тощо) за допомогою деяких креслярських інструментів. Звичайно такими інструментами є циркуль і лінійка (трикутник). За допомогою цих інструментів можна провести коло даним радіусом,

відкласти даний відрізок від даної точки на даній прямій, провести будь-яку пряму або промінь, взаємно паралельні або перпендикулярні прямі тощо.

Проаналізуємо *типові найпростіші задачі на побудову.*

Зауваження. Задачу вважають розв'язаною, якщо вказано алгоритм побудови, що складається з виконання скінченного числа найпростіших побудов типу задач I—V. Крім того, має бути доведено, що внаслідок виконання цього алгоритму дійсно дістали фігуру з заданими властивостями.

I. *Побудувати трикутник за трьома сторонами: a, b, c* (рис. 16.83).

На довільній прямій l відкладаємо відрізок AB довжиною c. Проводимо кола $\omega_1 (A, b)$ та $\omega_2 (B, a)$. Нехай C— одна з точок перетину кіл ω_1 і ω_2. Сполучивши точку C з точками A і B, дістанемо шуканий трикутник ABC. Дійсно, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

II. *Побудувати кут, рівний даному куту A* (рис. 16.84).

Проведемо коло $\omega (A, R)$ довільним радіусом R. Це коло перетинає сторони кута в точках B і C. Проведемо довільний промінь l з початком A_1. Проводимо коло $\omega_1 (A_1, R)$. Це коло перетинає промінь l в точці C_1. Далі проводимо $\omega_2 (C_1, CB)$. Кола ω_1 і ω_2 перетинаються в даній півплощині в точці B_1. Кут $B_1A_1C_1$ — шуканий. Дійсно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників, отже, $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$.

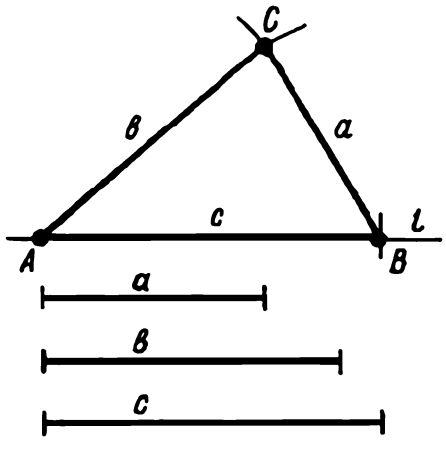


Рис.16.83

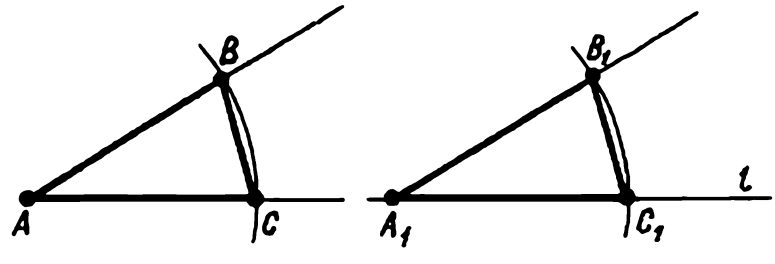


Рис.16.84

III. *Розділити даний кут A навпіл* (рис. 16.85).

Проведемо коло $\omega (A; R)$ довільним радіусом R. Це коло перетне сторони кута в точках B і C. Проводимо кола $\omega_1 (B, R)$ та $\omega_2 (C; R)$, D — точка перетину цих кіл, відмінна від A. Промінь AD — бісектриса кута A. Для доведення сполучимо точку D з точками B і C. Маємо $\Delta ABD = \Delta ACD$ за третьою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle BAD = \angle CAD$.

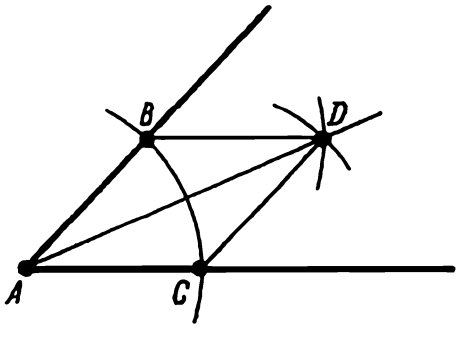


Рис.16.85

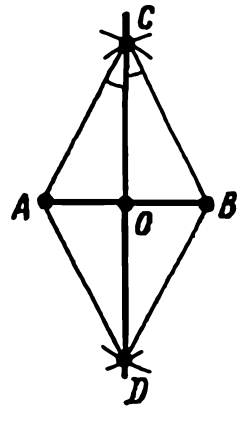


Рис.16.86

IV. *Розділити даний відрізок AB навпіл* (рис. 16.86).

Проведемо кола $\omega_1 (A; AB)$ та $\omega_2 (B; AB)$. Вони перетинаються в точках C і D. Пряма CD ділить відрізок AB навпіл. Дійсно, $\Delta ACD = \Delta BCD$ за третьою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle ACD = \angle BCD$. На прямій CD лежать бісектриса, висота і медіана рівнобедреного

трикутника ACB. Тому точка O перетину прямих CD і AB — середина відрізка AB. Зауважимо, що пряма CD — серединний перпендикуляр відрізка AB.

V. *Через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої.*

Можливі два випадки.

а) *Точка A не лежить на прямій a* (рис. 16.87, *а*). Проводимо коло з центром A, що перетинає пряму a в точках B і C. Проводимо кола ω_1 (B, BA) та ω_2 (C, CA), D — точка перетину цих кіл, відмінна від точки A. AD — серединний перпендикуляр відрізка BC (див. задачу IV).

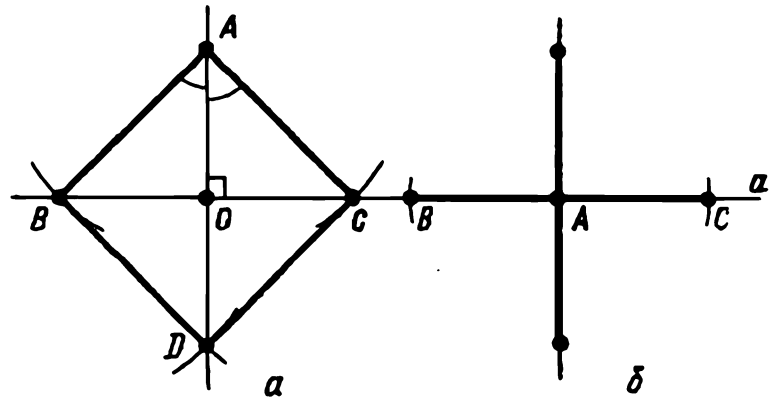


Рис.16.87

б) *Точка A лежить на прямій a* (рис. 16.87, *б*). Проводимо довільним радіусом R коло ω (A, R), яке перетне пряму a у точках B і C. Далі будуємо серединний перпендикуляр відрізка BC (див. задачу IV).

VI. *Побудувати трикутник, знаючи його сторону c, прилеглий до неї кут і різницю d двох інших сторін* (рис. 16.88).

Припустимо, що задачу розв'язано і ΔABC шуканий. На більшій стороні AC відкладемо відрізок $CD = CB$. Тоді $AD = CA - CB = d$ і ΔABD можна побудувати за двома сторонами AB і AD і кутом між ними. Оскільки ΔCDB рівнобедрений, точка C лежить на серединному перпендикулярі відрізка BD. Тепер зрозуміло, як побудувати ΔABC:

а) будуємо кут A, рівний даному (задача II);

б) на сторонах кута A відкладаємо відрізки $AB = c$ та $AD = d$;

в) проводимо серединний перпендикуляр відрізка BD (задача IV). Точка C лежить на перетині цього перпендикуляра з прямою AD. Доведемо, що трикутник ABC шуканий. Дійсно, $AB = c$, кут A дорівнює даному куту за побудовою. Оскільки ΔCBD рівнобедрений, то $CA - CB = CA - CD = d$, тобто різниця сторін CA і CB дорівнює даному відрізку d.

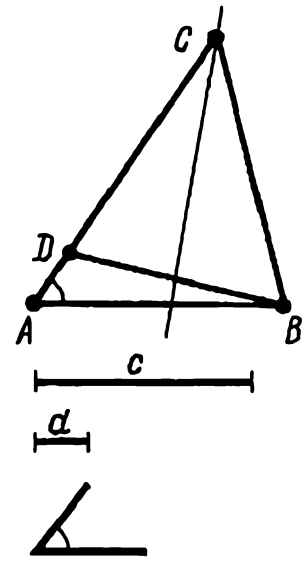


Рис.16.88

Легко помітити, що така побудова можлива не при будь-яких даних, а тільки при $d < c$, тобто при $AC - BC < AB$. У цьому випадку задача має єдиний розв'язок, оскільки серединний перпендикуляр відрізка BD перетинає промінь AD в єдиній точці C.

Ми розглянули випадок, коли даний кут A є меншим з двох кутів, що прилягають до сторони AB. А якщо цей кут буде більшим з двох прилеглих до сторони AB (рис. 16.89), то відрізок $BD = d$ треба відкласти на промені, доповняльному до променя BC. Точка C знаходиться на перетині променя DB і серединного перпендикуляра відрізка AD. Розв'язання можливе лише при $d < c$, причому складається воно з чотирьох етапів:

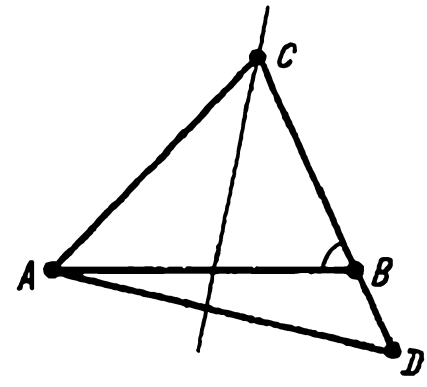


Рис.16.89

1) аналіз: припускаємо, що задачу розв'язано і шукаємо (на рисунку) деякі особливості побудованої фігури, які б дали змогу звести задачу до простіших побудов;

2) побудова: задається послідовність простих побудов (кроків);

3) доведення: доводиться, що побудована таким чином фігура задовольняє всі умови задачі;

4) дослідження: з'ясовується, при яких даних можлива побудова, скільки розв'язків має задача тощо. В простих задачах, звичайно, можна обійтися без аналізу, а зразу дати алгоритм побудов. Крім того, ми вважаємо дослідження не обов'язковим і, як правило, не будемо його проводити. При розв'язуванні задач на побудову *іноді використовують г. м. т.* Наведемо кілька з них.

1. Г. м. т., віддалених на відстань R від даної точки O, є коло $\omega(O, R)$.

2. Г. м. т., рівновіддалених від точок A і B, є серединний перпендикуляр відрізка AB.

3. Г. м. т., рівновіддалених від сторін даного кута, є бісектриса цього кута (маємо на увазі внутрішні точки кута).

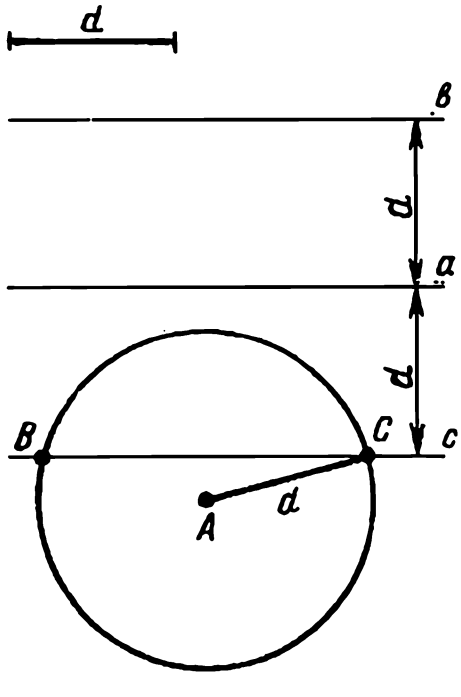


Рис.16.90

Метод г. м. т. при розв'язуванні задач на побудову полягає в тому, що будують кілька г. м. т., перетином яких є шукана точка (див., наприклад, задачу 1).

Задачі

1. Дано пряму a і точку A поза цією прямою. Знайти точку, віддалену на однакову відстань d від прямої a і даної точки A.

* Г. м. т., віддалених на відстань d від точки A, — це коло $\omega(A, d)$. Г. м. т., віддалених на відстань d від даної прямої a,— це пара паралельних прямих b і c (рис. 16.90). Відстань від кожної з цих прямих до заданої прямої a дорівнює d. Дістаємо дві точки перетину цих двох г. м. т.: B і C, тобто в даному випадку є два розв'язки. *

2. Побудувати трикутник за стороною і медіаною, проведеною до цієї сторони, та радіусом описаного кола.

* Нехай $\omega(O, R)$ — коло даного радіуса R (рис. 16.91). Візьмемо на цьому колі довільну точку A.

Проведемо коло ω_1 (A, AB) (AB — дана сторона, B — точка перетину кіл ω_1 та ω, D — середина відрізка AB). Оскільки дано медіану m, проведену до сторони AB, то точка C (третя вершина ΔABC) віддалена від точки D на відстань m. Отже, точка C лежить на колі ω_2 (D, m). Проводимо це коло. Воно перетинає коло ω в точках C_1 і C_2. Відповідно до цього маємо два розв'язки: ΔABC_1 та ΔABC_2. *

3. Знайти г. м. т., з яких даний відрізок AB (рис. 16.92) видно під прямим кутом.

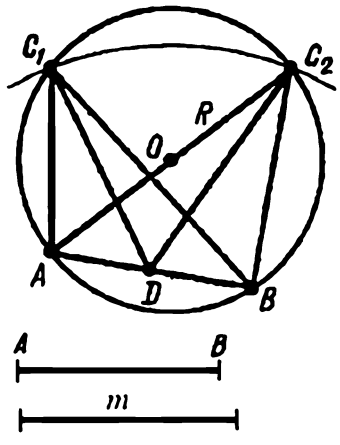


Рис.16.91

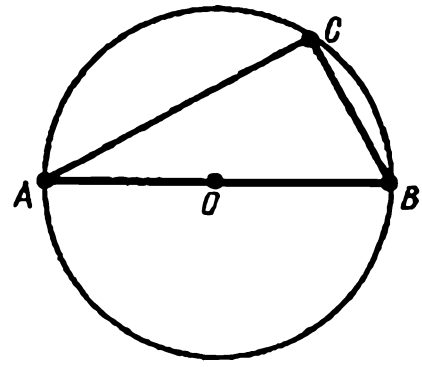


Рис.16.92

* Шукане г. м. т. — це коло, діаметром якого є даний відрізок AB, причому кінці відрізка не належать цьому г. м. т. *

4. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та висотою, проведеною до гіпотенузи.

* Нехай задачу розв'язано (рис. 16.93). З одного боку, дана вершина C трикутника лежить на колі з діаметром AB (див. задачу 3). З другого боку, точка C віддалена від AB на h. Отже, точка C належить до г. м. т., що складається з пари паралельних прямих, кожна з яких віддалена від прямої AB на відстань h. У даному випадку перетин цих г. м. т. складається з чотирьох точок. Отже, задача має чотири розв'язки. *

Доведіть, що задача може мати також два розв'язки або не мати розв'язків.

5. Провести дотичну до даного кола через дану точку (рис. 16.94).

* Нехай дано коло ω (O, R) і точку A поза колом, AB — дотична до кола ω. Відомо, що $\angle ABO = 90°$. Відрізок OA (фактично заданий) видно з точки B під прямим кутом. Отже, точка B належить колу діаметра OA (без точок O і A (див. задачу 3)). Це коло ω_1 (O_1, $\frac{1}{2}OA$), де O_1 — середина відрізка OA. У перетині кіл ω та ω_1 дістаємо точки B і C, які дають два розв'язки. Якщо точка A належить колу ω, задача має єдиний розв'язок — пряму, що проходить через точку A перпендикулярно до радіуса OA. *

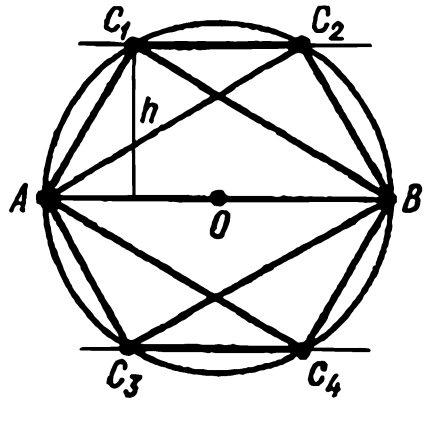


Рис.16.93

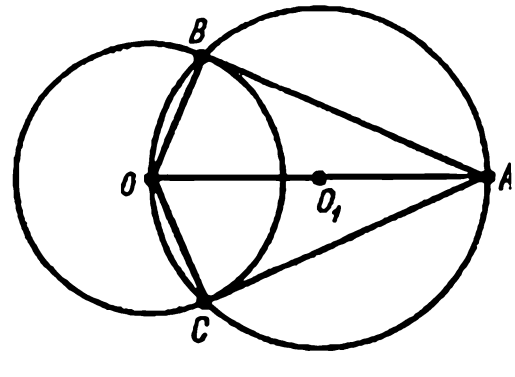


Рис.16.94

Вправи

1. З точки на колі проведено діаметр і хорду, що дорівнює радіусу. Знайти кут між ними.

2. Які кути утворює хорда AB з дотичною в точці B, якщо довжина хорди дорівнює радіусу?

3. Радіус кола дорівнює 4 см. Чи можна трикутник з сторонами 5, 6 та 9 см розмістити всередині кола?

4. Радіус кола дорівнює 5,1 см. Чи можна трикутник з сторонами 6, 8 і 10 см розмістити всередині кола?

5. Довести, що дві хорди кола, які не проходять через його центр, перетинаючись, не можуть ділитися навпіл.

6. Пряма l дотикається в точці M до кола з центром O. Хорда AB паралельна прямій l. Довести, що пряма OM ділить хорду AB навпіл.

7. Два кола дотикаються зовні в точці A. Спільна дотична дотикається до цих кіл відповідно в точках B і C. Точка D — середина відрізка BC. Довести, що $\angle BAC = \angle O_1DO_2$, де O_1 і O_2 — центри даних кіл.

8. Довести рівність $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, де a, b — катети, c — гіпотенуза, r — радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник.

9. У коло вписано трикутник з кутом 30°. Довести, що сторона, протилежна даному куту, дорівнює радіусу кола.

10. Довести, що рівні хорди одного кола мають такі властивості:

а) однаково віддалені від його центра;

б) стягують рівні дуги.

11. У колі з центром O проведено дві рівні хорди: AB і CD, що не перетинаються. Прямі AB і CD перетинаються в точці T. Довести, що пряма TO утворює з прямими AB і CD рівні кути.

12. Побудувати: а) суму і б) різницю двох даних кутів.

13. Розділити кут на 4 рівні частини.

14. Розділити відрізок на 4 рівні частини.

15. Побудувати трикутник за двома сторонами і кутом між ними.

16. Побудувати трикутник за стороною і двома прилеглими кутами.

17. Побудувати прямокутний трикутнику за гіпотенузою і катетом.

18. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і основою.

19. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при основі.

20. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.

21. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

22. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.

23. Побудувати трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.

24. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою і радіусом описаного кола.

25. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

§ 6. Чотирикутники

6.1. *Паралелограм* — це чотирикутник, у якого протилежні сторони лежать на паралельних прямих (рис. 16.95).

Теорема 1. *Для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі в точці перетину ділилися навпіл.*

Теорема 2. *Протилежні сторони паралелограма рівні.*

* Справедливість теореми випливає з двох рівностей: $\Delta DOA = \Delta BOC$ і $\Delta BOA = \Delta DOC$ (рис. 16.96). *

Теорема 3. Протилежні кути паралелограма рівні.

* Справедливість теореми випливає з двох рівностей: $\Delta ABC = \Delta CDA$ і $\Delta DAB = \Delta BCD$ (рис. 16.96).

Теорема 4. *Якщо у чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і лежать на паралельних прямих, то цей чотирикутник — паралелограм.*

Точку O перетину діагоналей називають *центром паралелограма.*

6.2. Паралелограм, у якого всі кути прямі, називається *прямокутником.*

Теорема 1. *Діагоналі прямокутника рівні.*

* Нехай $ABCD$ — прямокутник (рис. 16.97); $\Delta ABD = \Delta BAC$ (катети DA і CB рівні, катет AB спільний). Отже, $BD = AC$. *

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається ромбом.

Теорема 2. *Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і лежать на бісектрисах його кутів.*

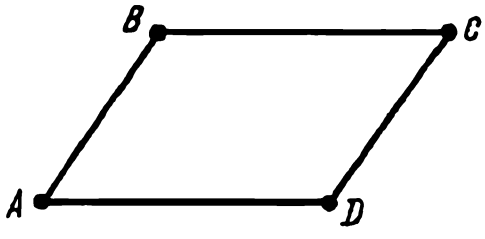


Рис.16.95

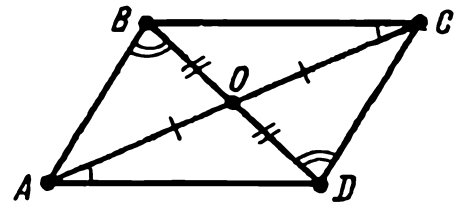


Рис.16.96

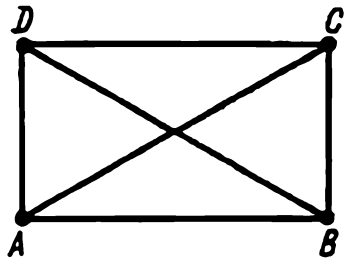


Рис.16.97

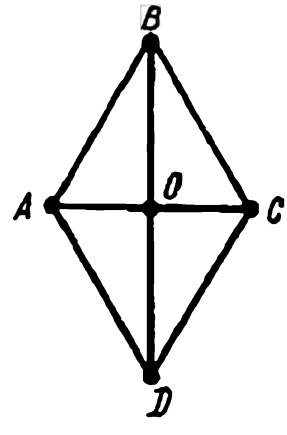


Рис.16.98

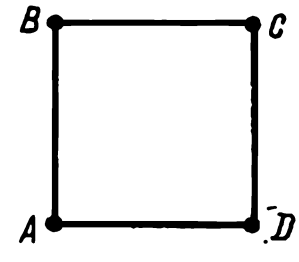


Рис.16.99

* Нехай діагоналі ромба AC і BD перетинаються в точці O (рис. 16.98). Оскільки ромб — це паралелограм, то $AO = CO$. У рівнобедреному трикутнику ABC відрізок BO є медіаною, отже, це його бісектриса і висота. Звідси випливає справедливість теореми. *

Прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається *квадратом* (рис. 16.99).

Квадрат є також ромбом і тому має властивості як прямокутника, так і ромба.

Задачі

1. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ відкладено точки E і F так, що $AE = FC$ і точка E лежить між точками A і F. Довести, що чотирикутник $BFDE$ — паралелограм.

* Трикутники ABE і CDF рівні за першою ознакою рівності трикутників (рис. 16.100). Отже, $BE = DF$ і $\angle BEA = \angle DFC$. Звідси знаходимо, що $\angle BEF = \angle DFE$, отже, $BE \parallel DF$. Згідно з теоремою 4 $BFDE$ — паралелограм. *

2. У рівнобедреному трикутнику сума відстаней будь-якої точки основи від бічних сторін є величина стала і дорівнює висоті, проведеній до бічної сторони. Довести.

* D — довільна точка основи AB рівнобедреного трикутника ABC (рис. 16.101), DE і DF — перпендикуляри, проведені з точки D до бічних сторін. Через точку A проведемо пряму $l \parallel BC$. DG — перпендикуляр, проведений з точки D до прямої l. Із прямокутних трикутників BED і AFD маємо $\angle BDE = 90° - \angle B$, $\angle ADF = 90° - \angle A = \angle BDE$, бо $\angle A = \angle B$; $\angle ADG = \angle BDE$. бо кути ADG і BDE вертикальні. Отже, $\angle ADG = \angle ADF$ і $\Delta ADG = \Delta ADF$.

Звідси $DG = DF$ і $DF + DE = GE$, AH — висота ΔABC. Оскільки $AG \parallel CB$, то $AH = GE = DF + DE$, що й треба було довести. *

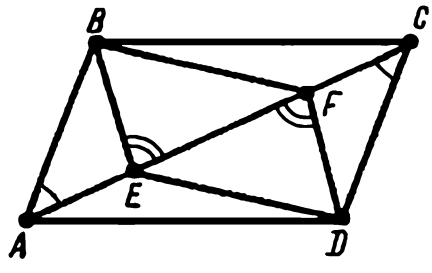


Рис.16.100

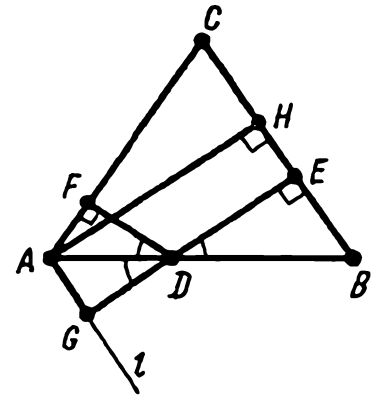


Рис.16.101

6.3. ***Теорема 1 (Фалеса).*** *Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на іншій його стороні.*

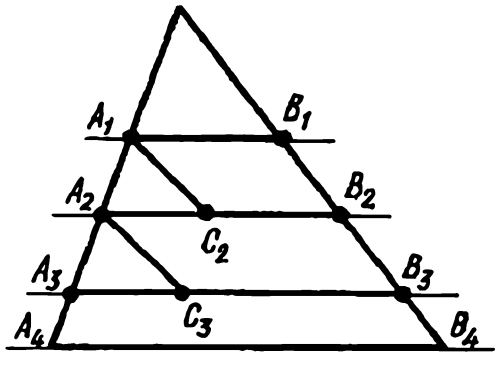


Рис.16.102

* Нехай три паралельні прямі перетинають одну сторону кута в точках A_1, A_2, A_3, а іншу — в точках B_1, B_2, B_3 (рис. 16.102). Відомо, що $A_1A_2 = A_2A_3$. Проводимо допоміжні відрізки A_1C_2 та A_2C_3 паралельно стороні B_1B_2. $\Delta A_1A_2C_2 = \Delta A_2A_3C_3$, бо $A_1A_2 = A_2A_3$, $\angle A_2A_1C_2 = \angle A_3A_2C_3$, $\angle A_1A_2C_2 = \angle A_2A_3C_3$. Отже, $A_1C_2 = A_2C_3$. Чотирикутник $A_1B_1B_2C_2$ — паралелограм, тому $B_1B_2 = A_1C_2$. Із паралелограма $A_2B_2B_3C_3$ маємо $B_2B_3 = A_2C_3$. З останніх двох рівностей випливає, що $B_1B_2 = B_2B_3$. *

Теорема 2 (узагальнена теорема Фалеса). Відрізки, які відтинаються паралельними прямими на сторонах кута, пропорційні, тобто (рис. 16.102):

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \cdots \qquad (16.2)$$

Задачі

1. Розділити даний відрізок на 5 рівних частин.

* Дано відрізок AB (рис. 16.103). З точки A проведемо промінь і відкладемо на ньому п'ять рівних відрізків: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5. Сполучимо точки B і A_5. Через точки A_1, A_2, A_3, A_4 проводимо прямі, паралельні прямій BA_5. Ці прямі перетинають відрізок AB відповідно у

точках B_1, B_2, B_3, B_4. За теоремою Фалеса відрізки AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 та B_4B рівні між собою. Ясно, що так само можна розділити даний відрізок на будь-яке рівне число частин. *

2. Точка D лежить на стороні AC трикутника ABC і ділить її у відношенні $m : n$, починаючи від вершини A. В якому відношенні пряма BD ділить медіану AO цього трикутника?

* Проведемо відрізок $OE \parallel BD$ (рис. 16.104). За умовою $AD : DC = m : n = 2m : 2n$. Оскільки $CO = BO$, то $CE = DE$ за теоремою Фалеса. Отже, $AD : DE : EC = 2m : n : n$. За узагальненою теоремою Фалеса $AM : MO = AD : DE = 2m : n$. Відповідь: $2m : n$. *

Зауваження. З розв'язку задачі 2 випливає, що медіани трикутника діляться точкою перетину у відношенні 2 : 1, починаючи від вершин. Дійсно, якщо $AD = DC$ (рис. 16.104), то $m = n = 1$ і $AM : MO = 2 : 1$.

3. У паралелограмі $ABCD$ точки M і N — відповідно середини сторін AB та AD. Довести, що прямі CM і CN ділять діагональ BD на три рівні частини (рис. 16.105).

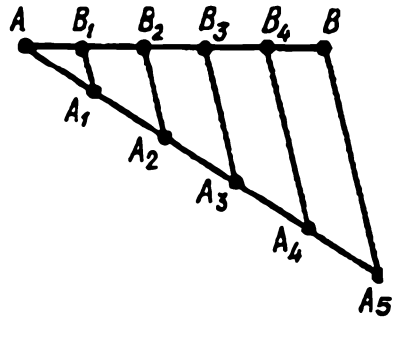


Рис.16.103

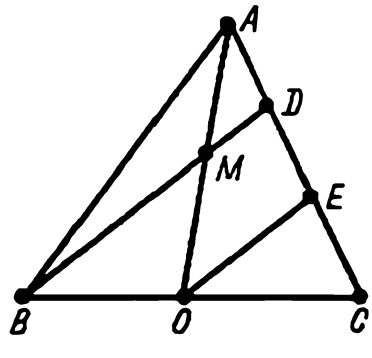


Рис.16.104

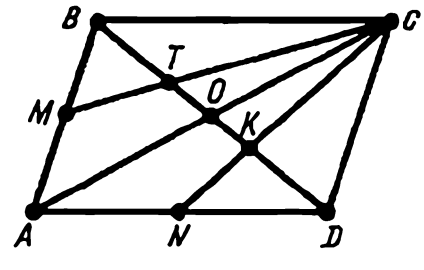


Рис.16.105

* Нехай O — центр паралелограма, DO та CN — медіани ΔADC, K — точка перетину цих медіан, тоді

$$DK = \frac{2}{3} DO = \frac{1}{3} DB \text{ (див. зауваження після задачі 2).}$$

Нехай T — точка перетину прямих CM та BD, тоді

$$BT = \frac{1}{3} DB, \text{ бо } BO \text{ та } CM \text{ — медіани } \Delta ACB.$$

Таким чином, $BT = TK = KD$. *

6.4. *Середньою лінією трикутника* називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін. Трикутник має три середні лінії.

Теорема 1. *Середня лінія трикутника паралельна його стороні і дорівнює половині цієї сторони.*

* Нехай D — середина сторони AC трикутника ABC (рис. 16.106). Проведемо через D пряму, паралельну прямій AB. За теоремою Фалеса ця пряма перетне сторону BC в її середині E. Отже, якщо DE — середня лінія, то $DE \parallel AB$. Далі проведемо середню лінію EF. Чотирикутник $ADEF$ — паралелограм, і тому $DE = AF = \frac{1}{2} AB$. *

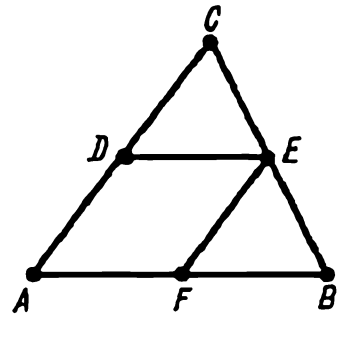


Рис.16.106

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні (рис. 16.107). Паралельні сторони трапеції називаються її основами, а дві інші — бічними сторонами.

Якщо бічні сторони трапеції рівні, то вона називається *рівнобічною*. Якщо одна з бічних сторін трапеції перпендикулярна до основ, трапеція називається *прямокутною*.

Середньою лінією трапеції називається відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції.

Теорема 2. *Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює півсумі їх.*

* Нехай EF — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 16.108). Проведемо пряму BE. Вона перетне пряму AD у точці G. Маємо $\Delta BCE = \Delta GDE$ ($CE = DE$, $\angle BEC = \angle DEG$, $\angle BCE = \angle GDE$). Отже, $DG = BC$ і $BE = GE$. Відрізок FE — це середня лінія трикутника ABG. Отже, $FE \parallel AD$ і $FE = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AD + DG) = \frac{1}{2}(AD + BC)$. *

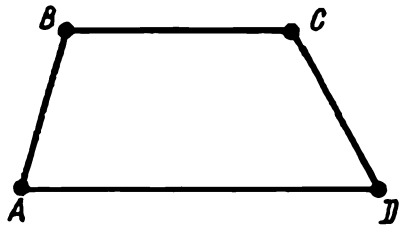


Рис.16.107

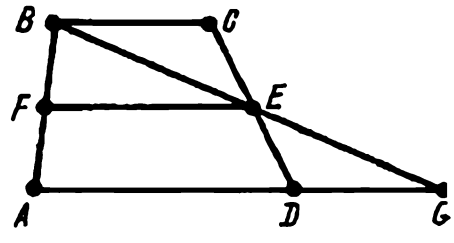


Рис.16.108

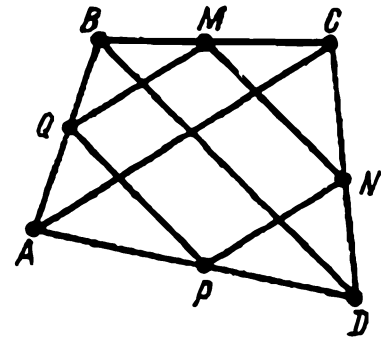


Рис.16.109

Задачі

1. Довести, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

* Точки Q, M, N, P відповідно є серединами сторін AB, BC, CD, DA чотирикутника $ABCD$ (рис. 16.109). Тобто QM — середня лінія ΔABC, PN — середня лінія ΔADC, тому $QM \parallel AC$ і $PN \parallel AC$. Отже, $QM \parallel PN$. Крім того, $QM = \frac{1}{2}AC = PN$. Чотирикутник $QMNP$ — паралелограм. *

Помітимо такі особливості:

1) якщо $ABCD$ — ромб, то $AC \perp BD$ і $QM \perp MN$, отже, $QMNP$ — прямокутник;

2) якщо $ABCD$ — прямокутник, то $AC = BD$ і $QM = MN = NP = PQ$, отже, $QMNP$ — ромб.

2. Бічну сторону CD (рис. 16.110) трапеції поділено на три рівні частини і з точок поділу N і Q паралельно основам проведено відрізки NM і QP. Знайти довжини їх, якщо основи трапеції дорівнюють a і b ($a < b$).

* Проводимо відрізок $CL \parallel BA$, який перетинає MN і PQ в точках K і I відповідно. Маємо $LD = b - a$, оскільки $ABCL$ — паралелограм і $AL = BC = a$. Нехай $KN = x$, тоді $IQ = 2x$, бо KN — середня лінія ΔCIQ. Відрізок IQ — середня лінія трапеції $LKND$, тому $IQ = \frac{1}{2}(KN + LD)$, звідки

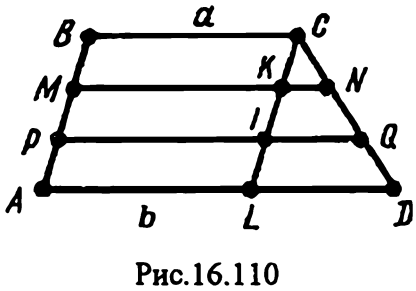


Рис.16.110

$$2x = \frac{1}{2}(x + b - a),\quad x = \frac{1}{3}(b - a),\quad MN = MK + KN = a + \frac{1}{3}(b - a) = \frac{1}{3}(2a + b),\quad PQ = PI + IQ = a + \frac{2}{3}(b - a) = \frac{1}{3}(2b + a).$$

Відповідь: $\frac{1}{3}(2a + b)$, $\frac{1}{3}(2b + a)$. *

3. Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх піврізниці.

* Нехай EF — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 16.111). За теоремою Фалеса точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD трапеції. Отже, $MN \parallel BC$. Нехай $BC = a$, $AD = b$. Відрізки EM і NF — середні лінії трикутників ABC і DBC відповідно. Тому $EM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a = NF$;

$MN = EF - 2NF = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$, що й треба було довести. *

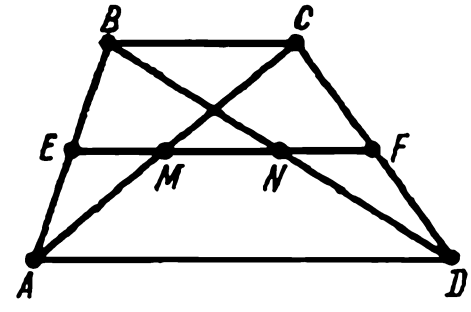


Рис.16.111

6.5. Чотирикутник називається *вписаним*, якщо всі його вершини лежать на колі. Чотирикутник називається *описаним*, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

Теорема 1. *Для того щоб чотирикутник був вписаним, необхідно і достатньо, щоб сума його протилежних кутів дорівнювала* 180°.

* Необхідність. На рис. 16.112, *а* показано вписаний чотирикутник $ABCD$. Маємо $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup BAD = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = 180°$.

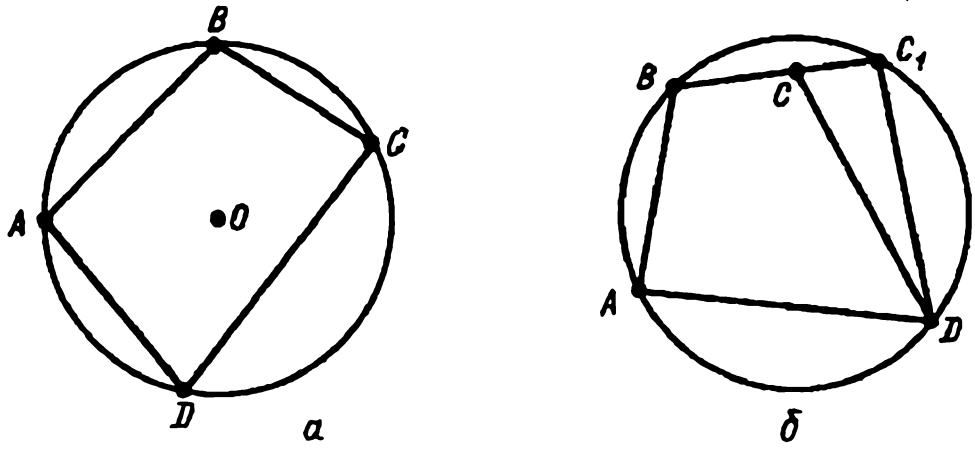


Рис. 16.112

Достатність. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Проведемо коло через точки A, B, D. Якщо воно пройде через точку C, то чотирикутник вписаний. Нехай точка C лежить усередині цього кола (рис. 16.112, *б*). Пряма BC перетинає коло в точці C_1, причому $\angle A + \angle C_1 = 180°$ (див. необхідність); $\angle C > \angle C_1$, бо $\angle C$ — зовнішній кут трикутника CC_1D. Тобто $\angle A + \angle C > \angle A + \angle C_1 = 180°$ і ми дійшли суперечності. Аналогічне доведення й у випадку, коли точка C лежить поза колом. *

З теореми 1 випливає, що паралелограм вписаний лише тоді, коли він є прямокутником, а трапеція вписана лише тоді, коли вона рівнобічна.

Теорема 2. *Для того щоб чотирикутник був описаним, необхідно і достатньо, щоб суми його протилежних сторін були рівні.*

* Необхідність. Нехай чотирикутник $ABCD$ описаний (рис. 16.113, *а*) і M, P, L, N — точки дотику. Маємо $BM = BN$, $CM = CP$, $DP = DL$, $AN = AL$ (дотичні, проведені до кола з однієї точки, рівні). Отже, $BM + CM + DL + AL = BN + AN + CP + DP$ і $BC + AD = CD + AB$, що й треба було довести.

Достатність. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ виконується рівність

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (16.3)$$

Бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O. Точка O однаково віддалена від прямих AB, BC і AD. Отже існує коло $\omega\,(O, r)$, що дотикається до сторін AB, BC і AD

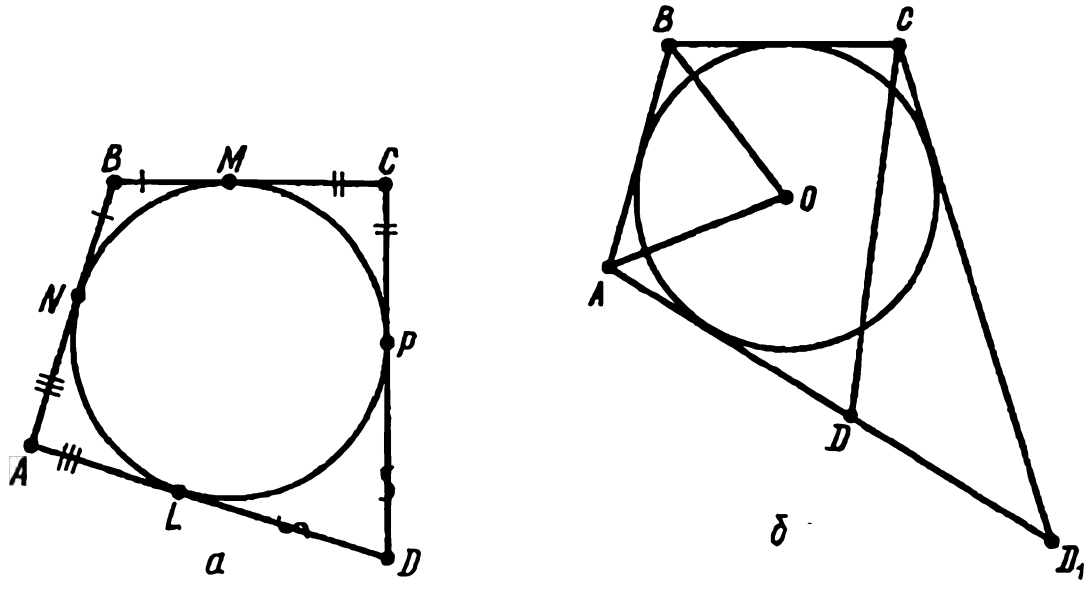


Рис. 16.113

(рис. 16.113, *б*). Якщо це коло дотикається ще й до сторони CD, то чотирикутник $ABCD$ описаний. Нехай сторона CD перетинає коло ω. Проведемо дотичну до кола ω через точку C і нехай ця дотична перетне пряму AD з точки D_1 (рис. 16.113, б), тоді

$$AB + CD_1 = BC + AD_1. \qquad (16.4)$$

Віднімаючи почленно рівність (16.3) від рівності (16.4), маємо

$$CD_1 - CD = AD_1 - AD$$

або

$$CD_1 - CD = DD_1,$$

$$CD_1 = CD + DD_1.$$

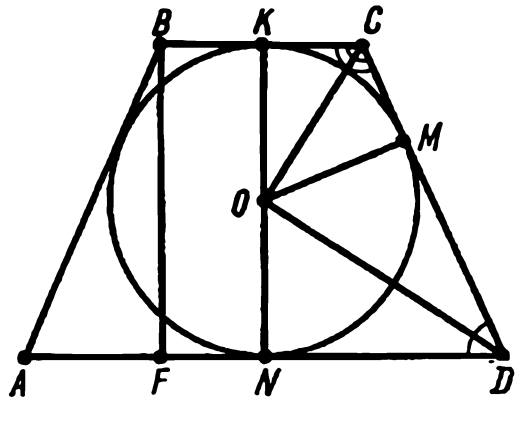


Рис.16.114

Ми дійшли суперечності, бо $CD_1 < CD + DD_1$. Для випадку, коли пряма CD не перетинає коло ω, доведення аналогічне. * З теореми 2 випливає, що паралелограм описаний лише тоді, коли він є ромбом. Описана трапеція (рис. 16.114) має такі дві властивості:

1) сума основ дорівнює сумі бічних сторін:

$$BC + AD = AB + CD;$$

2) $\angle COD = 90°$.

Властивість 1 випливає з теореми 2. Для доведення властивості 2 зауважимо, що CO та DO відповідно бісектриси кутів C і D. Оскільки $\angle C + \angle D = 180°$, то $\angle OCM + \angle ODM = 90°$, $\angle COD = 90°$.

Якщо описана трапеція рівнобічна, то бічна сторона дорівнює середній лінії трапеції.

Вправи

1. Відомо, що $\angle ABD = \angle ACD$. Довести, що чотирикутник $ABCD$ вписаний.

2. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і BB_1, які перетинаються у точці H. Довести, що чотирикутник CA_1HB_1 вписаний.

3. Для того щоб трапеція була вписаною, необхідно і достатньо, щоб вона була рівнобічною. Довести.

4. Коло, вписане в ΔABC, дотикається до сторони AB у точці M, до сторони BC — у точці N, до сторони AC — у точці P, O — центр кола. Довести, що чотирикутники $AMOP$, $BMON$ та $CPON$ вписані і описані одночасно.

5. Дельтоїдом називають чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні, причому одна з них поділяє іншу навпіл. Довести, що дельтоїд є описаним чотирикутником.

6. Чотирикутник $ABCD$ описаний. Відомо, що прямі AB і CD перетинаються в точці M, а прямі AD і BC — в точці N. Довести, що $MD + BN = ND + MB$.

§ 7. Подібні фігури. Подібність

Геометричне перетворення, внаслідок якого змінюється відстань між точками в одне і те саме число разів, називається *подібністю*.

Нехай $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ (рис. 16.115), причому $A'B' = kAB$, де k — одне і те саме число ($k \neq 0$) для будь-яких точок A, B; тоді f — перетворення подібності.

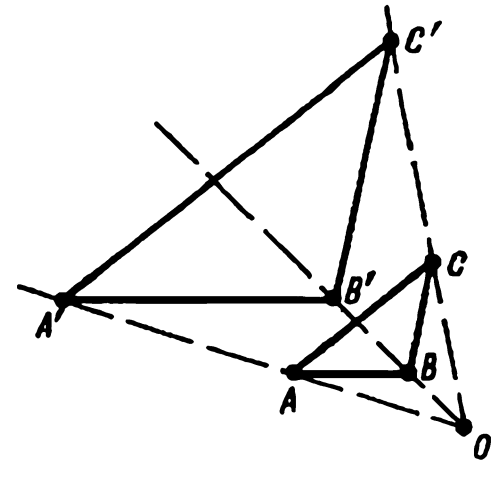


Рис.16.115

Число k називається *коефіцієнтом подібності*. Подібність широко застосовують в інженерній практиці при виконанні креслень, виконуючи їх у масштабі. Фігури Ф і Ф′ називаються подібними (позначення Ф′ ~ Ф), якщо існує подібність, яка переводить фігуру Ф у фігуру Ф′. Відповідні кути подібних фігур рівні, а відповідні сторони (і будь-які відповідні відрізки) пропорційні. В запису подібних фігур важливий порядок запису літер. Скажімо, запис $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ означає, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, причому вершині A відповідає вершина A_1, вершині B — вершина B_1, вершині C — вершина C_1. Крім того, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$

Ознаки подібності трикутників:

1. *Якщо два кути одного трикутника відповідно рівні двом кутам другого, то такі трикутники подібні.*

2. *Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.*

3. *Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого, то такі трикутники подібні.*

Оскільки два прямокутні трикутники мають по одному рівному куту, то вони мають такі ознаки подібності:

а) *якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого, то вони подібні;* б) *якщо катети одного прямокутного трикутника пропорційні катетам другого, то вони подібні.*

Ці дві ознаки подібності прямокутних трикутників випливають з перших двох ознак подібності трикутників. Сформулюємо ще одну ознаку: в) *якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника пропорційні катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники подібні.*

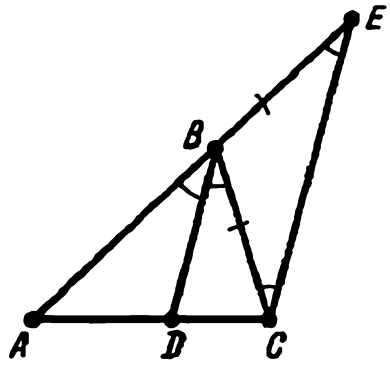


Рис.16.116

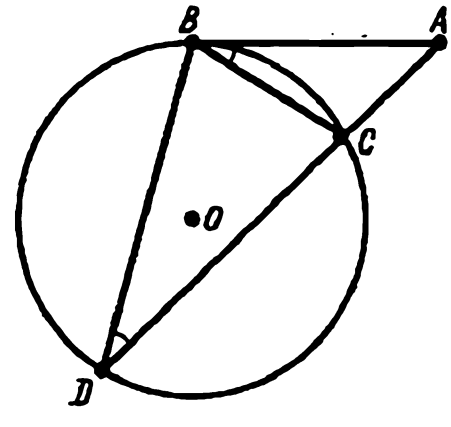


Рис.16.117

Задачі

1. Довести властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника: бісектриса кута трикутника поділяє його сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.

* Нехай BD — бісектриса кута B трикутника ABC (рис. 16.116). Доведемо, що $AD : CD = AB : BC$. Через вершину C проведемо пряму, паралельну BD, до перетину з прямою AB в точці E. Помітимо, що $\angle BCE = \angle CBD$, а $\angle BEC = \angle ABD$. Оскільки $\angle ABD = \angle CBD$, то і $\angle BCE = \angle BEC$, тобто ΔBCE — рівнобедрений. Далі помітимо, що $\Delta ABD \sim \Delta AEC$, звідки

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC} = \frac{BC}{DC}, \text{ отже, } \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}. *$$

2. З точки A, що лежить поза колом, проведено до нього дотичну AB і пряму, яка перетинає це коло в точках C і D (рис. 16.117). Довести, що

$$AB^2 = AD \cdot AC.$$

* $\angle ADB = \angle ABC$, бо кожен із цих кутів вимірюється половиною дуги BC. За першою ознакою подібності трикутників $\Delta ABC \sim \Delta ADB$, тобто

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}, \text{ або } AB^2 = AD \cdot AC *$$

3. Довести ***теорему Птолемея***: якщо $ABCD$ — *вписаний чотирикутник, то*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

* Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний (рис. 16.118). На діагоналі AC візьмемо точку E таку, що $\angle CBE = \angle ABD$, тоді $\Delta ABD \sim \Delta EBC$, звідки

$$\frac{AD}{CE} = \frac{BD}{BC} \text{ і } AD \cdot BC = BD \cdot CE. \qquad (П16.3)$$

Далі помітимо, що $\Delta ABE \sim \Delta DBC$, звідки

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} \text{ і } AB \cdot CD = BD \cdot AE. \qquad (П16.4)$$

Додавши почленно рівності (П16.3) і (П16.4), маємо

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC.*$$

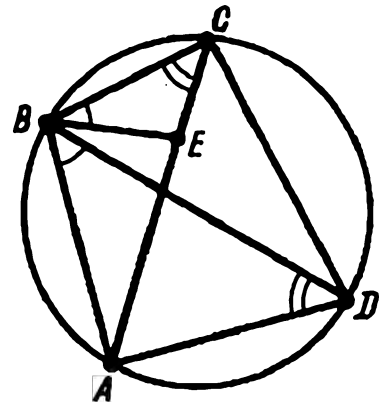


Рис.16.118

Вправи

1. Пряма проходить через центр O паралелограма і перетинає його протилежні сторони в точках A і B. Довести, що $AO = BO$.

2. Пряма, що проходить через центр паралелограма $ABCD$, перетинає сторону BC в точці E, а сторону AD — в точці F. Відомо, що $BE = a$, $AF = b$. Знайти AD.

3. Різниця двох кутів паралелограма дорівнює γ. Знайти кути паралелограма.

4. Сума двох кутів паралелограма дорівнює α. Знайти його кути.

5. Дано паралелограм $ABCD$, в якому $AB = a$, $AD = b$, бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці E. Знайти BE і EC.

6. Дві сторони паралелограма відносяться як $m : n$, а периметр його дорівнює P. Знайти сторони паралелограма.

7. Менша сторона паралелограма дорівнює a. Бісектриса одного з кутів поділяє сторону паралелограма навпіл. Знайти периметр паралелограма.

8. Периметр трикутника дорівнює P. Сполучивши серединні точки його сторін, дістанемо новий трикутник. Знайти периметр нового трикутника.

9. Бічну сторону трапеції поділено на 4 рівні частини і з точок поділу проведено до іншої бічної сторони відрізки, паралельні основам. Знайти довжини цих відрізків, якщо основи трапеції дорівнюють a і b ($a < b$).

10. Відстані від кінців діаметра до дотичної до кола дорівнюють a і b. Знайти діаметр.

11. Дві середні лінії трикутника рівні і утворюють кут α. Знайти кути трикутника.

12. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Довести, що її висота дорівнює півсумі основ.

13. Нехай CD — бісектриса ΔABC. Відомо, що $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Знайти відрізки AD і BD.

14. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M. Довести, що $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

§ 8. Метричні співвідношення в трикутнику

8.1. Для будь-якого трикутника ABC приймаємо такі позначення: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $CK = h_c$, $\angle BAC = A$, $\angle ABC = B$, $\angle ACB = C$, $AK = b_c$, $BK = a_c$ (проекції сторін AC і BC на сторону AB).

Нехай ΔABC — прямокутний (рис. 16.119), $\angle C = 90°$. За означенням

$$\cos A = \frac{b}{c}, \ \sin A = \frac{a}{c}, \ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Теорема 1. *Для прямокутного трикутника ABC виконуються такі співвідношення:*

$$a^2 = c \cdot a_c,\ b^2 = c \cdot b_c,\ h_c^2 = a_c \cdot b_c. \qquad (16.5)$$

* Трикутники BCK і BAC подібні, отже, $\frac{BC}{AB} = \frac{BK}{BC}$ і $BC^2 = AB \cdot BK$, або $a^2 = c \cdot a_c$. Аналогічно з подібності трикутників ACK і ABC маємо $b^2 = c \cdot b_c$.

Трикутники AKC і CKB подібні, тому $\frac{AK}{CK} = \frac{CK}{BK}$ і $CK^2 = AK \cdot BK$, або $h_c^2 = a_c \cdot b_c$. *

Теорема 2 (Піфагора). *Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

* Додавши перші дві рівності (16.5), маємо

$$a^2 + b^2 = c\,(a_c + b_c) = c \cdot c = c^2. \ *$$

8.2. ***Теорема синусів.*** *У довільному трикутнику ABC виконується рівність*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де R — радіус кола, описаного навколо ΔABC.

Лема. *Сторона трикутника дорівнює добутку діаметра описаного кола на синус протилежного кута .*

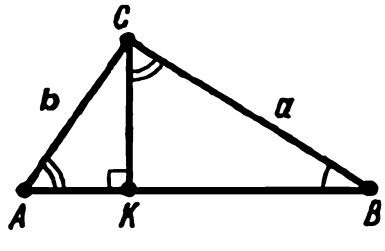


Рис.16.119

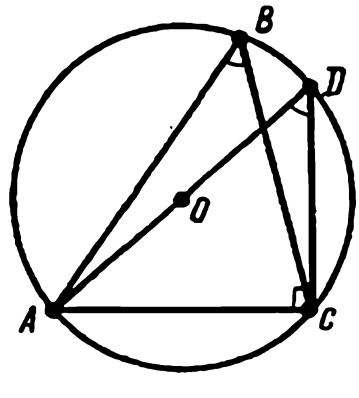


Рис.16.120

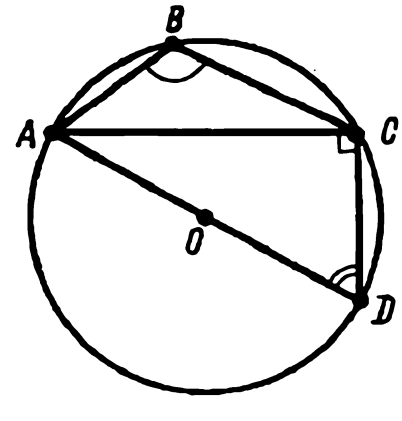


Рис.16.121

* Нехай $\omega\,(O;\ R)$ — описане коло ΔABC (рис. 16.120). Проведемо діаметр AD. Помітимо, що $\angle ADC = B$, $\angle ACD = 90°$. З прямокутного трикутника ACD маємо

$$AC = AD \sin \angle ADC = 2R \sin B.$$

Якщо кут B тупий (рис. 16.121), то $\angle ADC = 180° - B$. З прямокутного трикутника ADC маємо $AC = AD \sin (180° - B) = 2R \sin B$, тобто $b = 2R \sin B$.

Аналогічно доведемо, що $a = 2R \sin A$ і $c = 2R \sin C$. Із цих рівностей випливає, що

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \ *$$

Теорема косинусів. *У будь-якому* ΔABC *виконується рівність* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

* З рис. 16.122 видно, що $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, звідки

$$(\vec{BC})^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = (\vec{AC})^2 + (\vec{AB})^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{або } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.*$$

Зауважимо, що теорему косинусів іноді записують так:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Задачі

1. Довести, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін (рис. 16.123).

* Нехай $\angle BAD = \alpha$ (рис. 16.123). Із ΔABD за теоремою косинусів маємо $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos\alpha$. Із ΔABC, враховуючи, що $\angle ABC = 180° - \alpha$, маємо $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC\,(-\cos\alpha)$, звідки $BD^2 + AC^2 = 2(BC^2 + AB^2)$, що й треба було довести. *

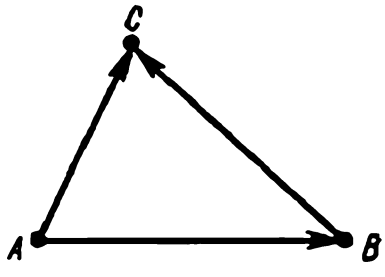


Рис.16.122

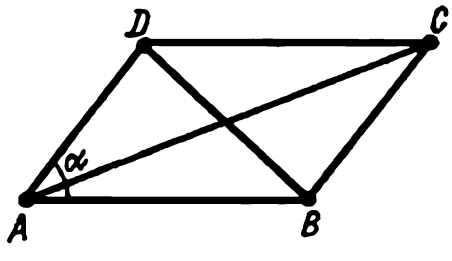


Рис.16.123

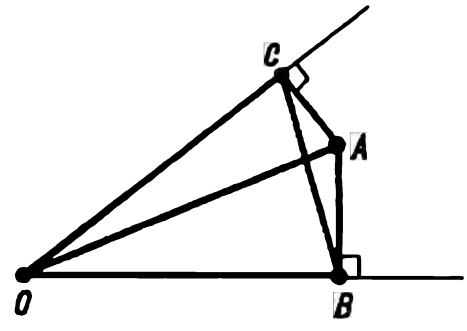


Рис.16.124

2. Дано трикутник ABC, в якому $AB = c, AC = b, \angle A = \alpha$. Знайти медіану, проведену до сторони BC.

* Нехай AD — шукана медіана. Відомо, що $\vec{AD} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)$. Підносимо до квадрату обидві частини цієї рівності: $AD^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + b^2 + 2bc\cos\alpha\right)$. Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2 + 2bc\cos\alpha}$. *

3. Дано $\angle O = 60°$; відстані від сторін цього кута до точки A, яка лежить усередині його, дорівнюють a та b. Знайти відстань від точки A до вершини кута O (рис. 16.124).

* У чотирикутнику $OBAC$ маємо $\angle BAC = 180° - 60° = 120°$. З ΔABC за теоремою косинусів дістанемо:

$$BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120° = a^2 + b^2 + ab.$$

Чотирикутник $OBAC$ вписаний в коло діаметра OA. В це саме коло вписаний і ΔOBC. За лемою (див. теорему синусів) $BC = OA \cdot \sin 60° = OA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $OA = \frac{2}{\sqrt{3}}BC = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$. *

8.3. Будь-який трикутник має шість основних елементів: три сторони і три кути. *Розв'язати трикутник* — значить знайти всі його основні елементи. Звичайно три

елементи задано, а три інші треба знайти. Розглянемо три основні випадки розв'язування трикутників.

1. *Дано дві сторони і кут між ними.* Дано: a, b, $\angle C$. Знайти c, $\angle A$, $\angle B$.

* За теоремою косинусів маємо $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$. Знаючи сторони трикутника, знаходимо за теоремою косинусів

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{і} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

а потім за таблицею косинусів і кути. *

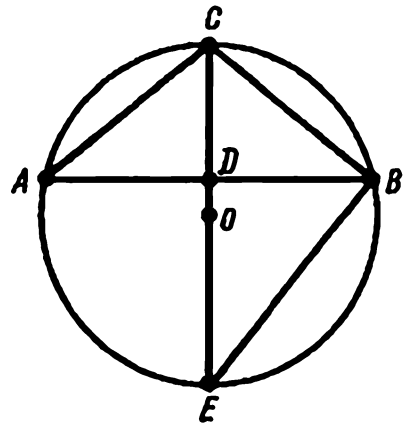


Рис.16.125

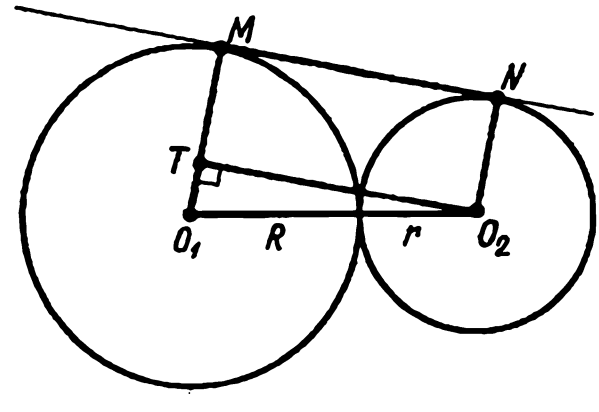


Рис.16.126

2. *Дано сторону і два кути.* Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Знайти b, c, $\angle A$.

* $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. За теоремою синусів знаходимо $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$. *

3. *Дано три сторони.* Дано: a, b, c. Знайти $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

* За теоремою косинусів знаходимо: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, а потім знаходимо і самі кути. *

Іноді дано не основні елементи трикутника, а деякі інші, наприклад R, r тощо.

Задачі

1. Знайти радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC (рис. 16.125) з основою a і бічною стороною b.

* Нехай CE — діаметр кола, описаного навколо ΔABC. Оскільки $\angle CBE$ спирається на діаметр кола, то $\angle CBE = 90°$. З прямокутного трикутника CBE маємо $CB^2 = CE \cdot CD$, або $b^2 = 2R\sqrt{b^2 - (a/2)^2}$, звідки $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$. *

2. Кола радіусів R і r (рис.16.126) дотикаються зовні. Пряма дотикається до цих кіл у точках M і N. Знайти MN.

* Нехай O_1M і O_2N — радіуси, проведені в точки дотику, $O_2T \perp O_1M$. Помітимо, що $TMNO_2$ — прямокутник, тому $TM = r$ і $TO_1 = R - r$. $O_1O_2 = R + r$. З прямокутного трикутника O_1O_2T маємо $O_1T^2 + O_2T^2 = O_1O_2^2$ або $(R-r)^2 + MN^2 = (R+r)^2$, звідки $MN^2 = 4Rr$. Відповідь: $MN = 2\sqrt{Rr}$. *

3. Гіпотенуза прямокутного трикутника ABC (рис. 16.127) дорівнює c, а гострий кут α. Знайти бісектрису прямого кута.

* Нехай CD — бісектриса прямого кута ACB. Помітимо, що $BC = c \cdot \cos\alpha$, $\angle CDB = 180° - 45° - \alpha = 180° - (45° + \alpha)$. За теоремою синусів із ΔCDB маємо

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(45° + \alpha)} \text{ або } CD = \frac{c\cos\alpha\sin\alpha}{\sin(45° + \alpha)}.$$

Відповідь: $\dfrac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(45° + \alpha)}$. *

4. Дано: r, $\angle A$, $\angle B$ (рис. 16.128). Розв'язати трикутник ABC.

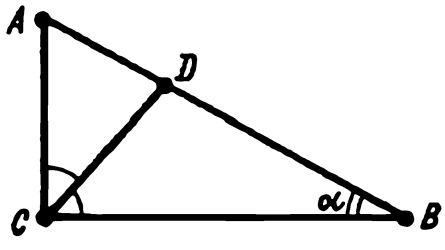


Рис.16.127

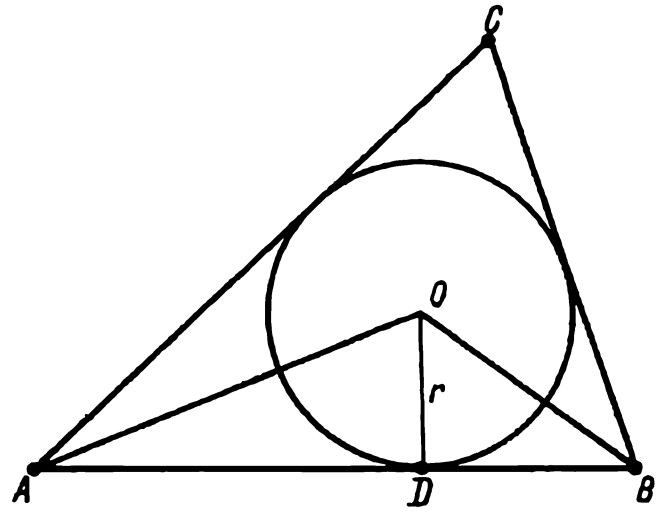


Рис.16.128

Маємо: $\angle C = 180^c - (A + B)$. Нехай D — точка дотику вписаного кола $\omega(O, r)$ із стороною AB, тоді

$$BD = r\operatorname{ctg}(B/2),\ AD = r\operatorname{ctg}(A/2),\ c = AD + BD = r(\operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2)).$$

За теоремою синусів $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$, звідки

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{r\left(\operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2)\right)\sin A}{\sin(A+B)}.$$

$$b = \frac{r\left(\operatorname{ctg}(A/2) + \operatorname{ctg}(B/2)\right)\sin B}{\sin(A+B)}. *$$

Вправи

1. Розв'язати трикутник, якщо дано:

а) $a = 9$, $b = 8$, $\angle C = 60°$; б) $b = 7{,}3$, $c = 8{,}4$, $\angle A = 39°14'$; в) $a = 17{,}3$, $\angle B = 11°$, $\angle C = 44°$; г) $b = 8{,}6$, $\angle B = 51°$, $\angle C = 27°$; д) $a = 14$, $b = 13$, $c = 12$; е) $a = 7{,}1$, $b = 3{,}2$, $c = 9{,}6$.

2. Розв'язати трикутник, якщо дано: $r = 2$, $c = 16$, $\angle B = 40°$.

3. Дано сторону трикутника a і прилеглі до неї кути β і γ. Знайти периметр трикутника.

4. Різниця двох сторін трикутника дорівнює d. Знайти ці сторони, якщо відомо, що вони лежать проти кутів 45° та 30°.

5. Дано катети a і b прямокутного трикутника. Довести, що бісектриса прямого кута дорівнює $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

6. Знайти бісектрису кута α при основі a рівнобедреного трикутника.

7. Розв'язати прямокутний трикутник:

а) $a = 3{,}5$, $A = 34°$; б) $b = 4{,}6$, $B = 61°$;

в) $c = 1{,}8$, $A = 48°$; г) $c = 3{,}2$, $a = 1{,}6$;

д) $a = 4{,}2$, $b = 3{,}1$.

8. Сторона AB прямокутника $ABCD$ дорівнює a, $\angle BDA = \alpha$. Знайти радіус кола, описаного навколо цього прямокутника.

§ 9. Довжина кола

9.1. Опуклий многокутник називається *правильним*, якщо всі його сторони рівні і всі його кути рівні між собою. Наприклад, правильний трикутник — це рівносторонній трикутник, правильний чотирикутник — це квадрат.

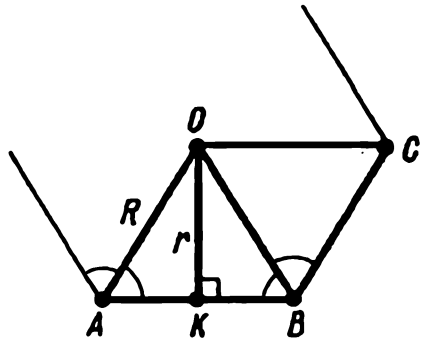


Рис.16.129

Теорема 1. *Правильний многокутник є одночасно і вписаним і описаним.*

На рис 16.129 показано частину правильного многокутника. Проведемо бісектриси кутів A і B до перетину в точці O. Точка O є одночасно центром описаного і вписаного кіл многокутника. Точку O називають центром правильного многокутника.

Виведемо *залежність між радіусами вписаного r і описаного R кіл.*

* Нехай $AB = a_n$ — сторона правильного n-кутника (рис. 16.129). $OA = R$, $OK \perp AB$, $OK = r$, $\angle AOB = 360°/n$, $\angle AOK = 180°/n$. З прямокутного трикутника AOK знаходимо

$$R = \frac{a_n}{2\sin(180°/n)}, \quad r = \frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}(180°/n), \quad R = \frac{r}{\cos(180°/n)}.$$

Зокрема, маємо

$$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}, \quad R = 2r \qquad \text{при } n = 3;$$

$$R = \frac{a_4}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{a_4}{2}, \quad R = r\sqrt{2} \qquad \text{при } n = 4;$$

$$R = a_6, \quad r = a_6\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad R = \frac{2r}{\sqrt{3}} \qquad \text{при } n = 6. \ *$$

Теорема 2. *Правильні n-кутники подібні. Коефіцієнт подібності двох правильних n-кутників дорівнює відношенню їх сторін:*

$$k = \frac{a_n}{a_n'} = \frac{P_n}{P_n'} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{r'}.$$

9.2. ***Теорема.*** *Відношення довжини C кола до його діаметра 2R стале, тобто не залежить від радіуса кола.*

Відношення $\frac{C}{2R}$ позначають грецькою буквою π (пі): $\frac{C}{2R} = \pi$, звідки $C = 2\pi R$. Число $\pi \approx 3{,}14159\ldots$ ірраціональне.

Знайдемо довжину дуги кола, що відповідає центральному куту α. Куту в 1° відповідає дуга довжиною $\frac{C}{360^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$ Тому куту α відповідає дуга $l_\alpha = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$.

Радіанною мірою центрального кута називається відношення відповідної дуги до радіуса кола. Радіанна міра кута дорівнює $\frac{l_\alpha}{R} = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}$, отже, радіанну міру кута дістаємо з градусної, помноживши її на $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Якщо центральний кут дорівнює α радіан, то відповідна дуга має довжину $l = R\,\alpha$.

Задачі

1. Зовнішній кут правильного многокутника дорівнює 18°. Знайти число сторін многокутника.

* Оскільки внутрішній кут правильного *n*-кутника дорівнює $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, то його зовнішній кут дорівнює $180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{360^\circ}{n}$. З умови $\frac{360^\circ}{n} = 18^\circ$ знаходимо $n = 20$.

Відповідь: 20. *

2. У коло радіуса *R* вписано правильний *n*-кутник із стороною a_n. Знайти довжину сторони a_{2n} правильного 2*n*-кутника, вписаного в це саме коло, тобто знайти формулу подвоєння.

* Нехай A_1A_2 — сторона правильного *n*-кутника, вписаного в коло ω (*O*, *R*) (рис. 16.130), *B* — середина дуги A_1A_2, тоді $A_1B = a_{2n}$ — сторона правильного вписаного 2*n*-кутника, *BD* — діаметр кола ω, *C* — точка перетину прямих A_1A_2 і *BD*, $\angle BA_1D = 90^\circ$, тому $A_1B^2 = BD \cdot BC$ або $a_{2n}^2 = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}\right)$. *

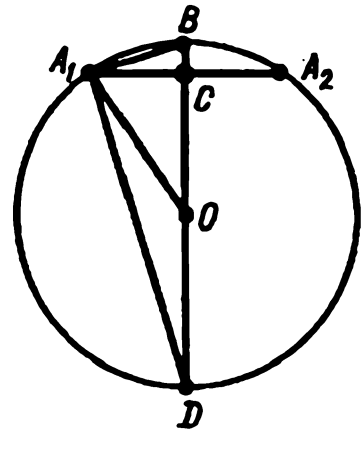


Рис.16.130

Ця формула називається формулою подвоєння. Зокрема, враховуючи, що $a_4 = R\sqrt{2}$, маємо $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

3. Сторони трикутника відповідно дорівнюють 13; 14 і 15 см. Знайти довжину описаного кола (рис. 16.131).

* Легко помітити, що $h_c = a\sin B$, звідки

$$2Rh_c = 2Ra\sin B = ab,\quad R = \frac{ab}{2h_c}.$$

Нехай $a = 15$ см, $b = 13$ см, $c = 14$ см. Проведемо висоту $h_c = CD$. Нехай $BD = x$, тоді $AD = 14 - x$. $CD^2 = 15^2 - x^2 = 13 - (14 - x)^2$, звідки $28x = 252$, $x = 9$, $CD = 12$ см. Отже, $R = \frac{13\cdot 15}{2\cdot 12} = \frac{65}{8}$ см.

Довжина описаного кола $C = 2\pi\frac{65}{8} = 16{,}25\,\pi$ см. *

4. Знайти довжину кола, яке проходить через точку $M(2; 1)$ і дотикається до координатних осей.

* Якщо коло ω дотикається до координатних осей і проходить через $M(2; 1)$, то його центр O однаково віддалений від координатних осей і лежить у першій чверті, тобто $O(x; x)$. Радіус кола дорівнює x, тому $OM = x$ і $OM^2 = x^2$, $(x-2)^2 + (x-1)^2 = x^2$, звідки $x = 1$ або $x = 5$. Відповідь: $C_1 = 2\pi$, $C_2 = 10\pi$. *

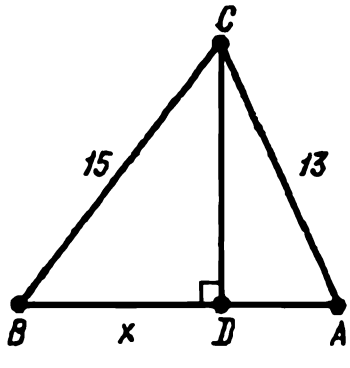


Рис.16.131

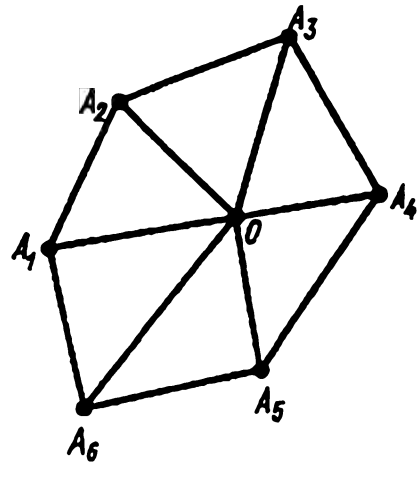


Рис.16.132

Вправи

1. Довести, що внутрішній кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

2. Діагоналі ромба дорівнюють 6 і 8 см. Знайти довжину вписаного кола.

3. Дано прямокутний трикутник з катетами a і b. Знайти довжину описаного кола.

4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8 см. Знайти довжину вписаного кола.

5. Дано рівнобічну трапецію із сторонами $2a, a, a, a$. Знайти довжину описаного кола.

§ 10. Площі фігур

10.1. Простою називається така плоска фігура, яку можна розбити на скінченне число плоских трикутників (нагадаємо, що плоским трикутником називається частина площини, обмежена трикутником). Наприклад, будь-який плоский опуклий многокутник є простою фігурою (рис. 16.132).

Площею простою фігури є додатна величина, що має такі властивості:

1) *рух не змінює площу фігури;*

2) *якщо просту фігуру розбито на кілька частин, що є простими фігурами, то площа фігури дорівнює сумі площ її частин;*

3) *площа одиничного квадрата дорівнює одиниці.*

Теорема 1. *Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його суміжних сторін:*

$$S = a\,b.$$

Теорема 2. *Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:* $S = a\,h$.

* Проведемо перпендикуляри BE і CF на пряму AD (рис. 16.133). Прямокутник $BCFE$ і паралелограм $ABCD$ складаються з трапеції $BCDE$ та трикутника CFD і BEA відповідно. Оскільки $\Delta\, CFD = \Delta\, BEA$, то прямокутник $BCFE$ і паралелограм $ABCD$ мають однакові площі.

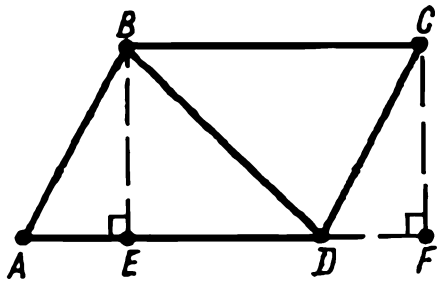


Рис.16.133

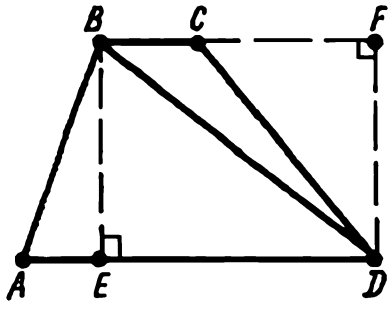


Рис.16.134

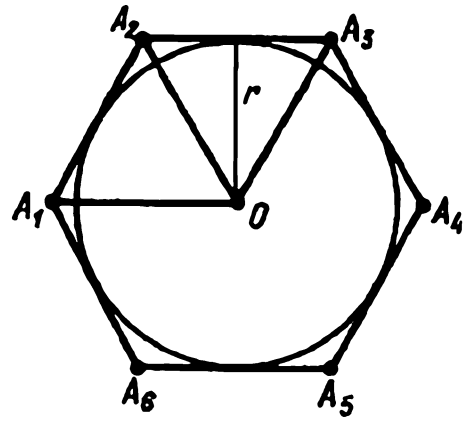


Рис.16.135

Дві фігури з рівними площами називаються рівновеликими. У даному випадку паралелограм $ABCD$ і прямокутник $BCFE$ рівноскладені, а отже, і рівновеликі. *

Теорема 3. *Площа трикутника дорівнює половині добутку сторони на висоту, проведену до цієї сторони:*

$$S = \frac{1}{2} a h_a.$$

* Доповнимо даний $\Delta\, ABD$ до паралелограма $ABCD$, як показано на рис. 16.133. Дістанемо: $\Delta\, ABD = \Delta\, CDB$, отже, площа $\Delta\, ABD$ дорівнює половині площі паралелограма, тобто

$$S_{\Delta\, ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE. \ *$$

Теорема 4. *Площа трапеції дорівнює половині добутку її висоти на суму її основ:* $S = \frac{1}{2}\, h(a + b)$.

* Проведемо діагональ BD трапеції $ABCD$ (рис. 16.134). Ця діагональ розбиває трапецію на трикутники ABD і DBC з площами S_1 і S_2 відповідно: $S_1 = \frac{1}{2} ah$, $S_2 = \frac{1}{2}\, bh$, де $a = AD$, $b = BC$, тобто $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} h(a + b)$. *

Теорема 5. *Площа описаного многокутника дорівнює* $S_n = P_n \cdot r$; *де* P_n *— півпериметр,* r *— радіус вписаного кола.*

* Сполучимо центр O вписаного кола з вершинами $A_1, \ldots, A_n$ (рис. 16.135). При цьому многокутник розіб'ється на n трикутників, в кожному з яких висота дорівнює r. Отже,

$$S_n = \frac{1}{2} r \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2} r \cdot A_2A_3 + \ldots + \frac{1}{2} r \cdot A_nA_1 = \frac{1}{2} r (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) = r \cdot P_n. \ *$$

10.2. Виведемо кілька формул для знаходження площі трикутника S_Δ. Помітимо, що $h_a = b \sin C$, тому

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Аналогічно можна довести, що

$$S_\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Щоб вивести формулу Герона, помітимо, що $h_a = b \sin C = b\sqrt{1 - \cos^2 C}$. Використаємо теорему косинусів:

$$h_a = b\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)} = \frac{1}{2a}\sqrt{\left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a-b)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}.$$

Нехай $a + b + c = 2p$, тоді $a + b - c = 2(p - c)$, $c + a - b = 2(p - b)$, $c - a + b = 2(p - a)$. Отже,

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{2^4 p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

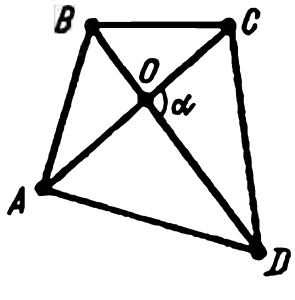


Рис.16.136

Тепер маємо $S_\Delta = \frac{1}{2} a h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Виведемо формулу для знаходження площі трикутника за трьома сторонами і радіусом описаного кола: оскільки $c = 2R \sin C$, то

$$\sin C = \frac{c}{2R}, \text{ тобто } S_\Delta = \frac{1}{2} ab \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Розглянемо довільний опуклий чотирикутник $ABCD$ (рис. 16.136). Нехай O — точка перетину його діагоналей, $AC = d_1$, $BD = d_2$. Якщо S — площа чотирикутника, то

$$S = S_{OCD} + S_{ODA} + S_{OAB} + S_{OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \sin\alpha + \frac{1}{2} OD \cdot OA \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} OA \times$$

$$\times OB \sin\alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} \sin\alpha (OD \cdot AC + OB \cdot AC) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha,$$

отже $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$.

Зокрема, площа ромба дорівнює $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Для знаходження площі довільного многокутника можна розбити його на трикутники, а потім додати площі всіх цих трикутників.

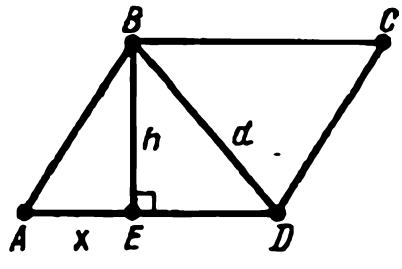


Рис.16.137

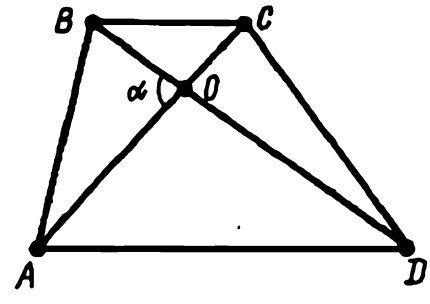


Рис.16.138

Задачі

1. Знайти діагональ прямокутника, якщо його периметр дорівнює P, а площа S.

* Якщо a і b — сторони, а d — діагональ прямокутника, то

$$P = 2a + 2b, \quad S = ab, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Помітимо, що $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = \left(\frac{1}{2}P\right)^2 - 2S$, отже $d = \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - 2S}$. Відповідь: $\sqrt{\frac{1}{4}P^2 - 2S}$. *

2. Висота і менша діагональ ромба дорівнюють відповідно h і d. Знайти площу ромба.

* Нехай BE — висота ромба $ABCD$ (рис. 16.137), $BE = h$, $BD = d$ — менша діагональ ромба.

З ΔBDE маємо $ED = \sqrt{d^2 - h^2}$. Нехай $AE = x$. Тоді $AB = AD = x + ED = x + \sqrt{d^2 - h^2}$.

З ΔABE маємо $AB^2 - AE^2 = BE^2$, $\left(x + \sqrt{d^2 - h^2}\right)^2 - x^2 = h^2$, звідки $x = \frac{2h^2 - d^2}{2\sqrt{d^2 - h^2}}$,

$AD = \frac{d^2}{2\sqrt{d^2 - h^2}}$. Позначивши площу ромба через S, маємо $S = AD \cdot BE = \frac{d^2 h}{2\sqrt{d^2 - h^2}}$. Відповідь: $\frac{d^2 h}{2\sqrt{d^2 - h^2}}$. *

3. Знайти площу трапеції $ABCD$ (рис. 16.138), якщо $S_{\Delta BOC} = S_1$, $S_{\Delta AOD} = S_2$.

* Оскільки $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$, то $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$. Нехай $S_{\Delta AOB} = S_3$ і $\angle AOB = \alpha$, тоді

$$\angle BOC = \pi - \alpha, \quad S_3 = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha, \quad S_1 = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin\alpha.$$

Звідси маємо $\frac{S_3}{S_1} = \frac{AO}{CO}$. Аналогічно дістанемо: $\frac{S_3}{S_2} = \frac{CO}{AO}$. Перемноживши почленно останні дві рівності, маємо $\frac{S_3^2}{S_1 S_2} = 1$, звідки $S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$. Площа трапеції $S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$. Відповідь: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. *

4. Сторони вписаного в коло чотирикутника $ABCD$ дорівнюють 1; 4; 7 і 8. Знайти його площу (рис. 16.139).

* Нехай $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 7$, $AD = 8$. Покладемо $\angle A = \alpha$, тоді $\angle C = 180° - \alpha$. Знаходимо відрізок BD за теоремою косинусів із трикутників ABD і CBD: $BD^2 = 1 + 64 - 2 \cdot 8\cos\alpha = 16 + 49 + 2 \cdot 4 \cdot 7\cos\alpha$, звідки $\cos\alpha = 0$ і $\alpha = 90°$, тобто $\angle A = \angle C = 90°$.

Маємо $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 4$, $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$, отже $S_{ABCD} = 4 + 14 = 18$. Відповідь: 18. *

10.3. Розглянемо *знаходження площі круга і його частин.*

Означення. Дана фігура має площу S, якщо існують прості фігури, що містяться в ній, і прості фігури, що містять її, причому площі цих простих фігур як завгодно мало відрізняються від S.

Внутрішні точки кола $\omega(O, R)$ разом з точками самого кола утворюють круг з центром O і радіусом R (рис. 16.140).

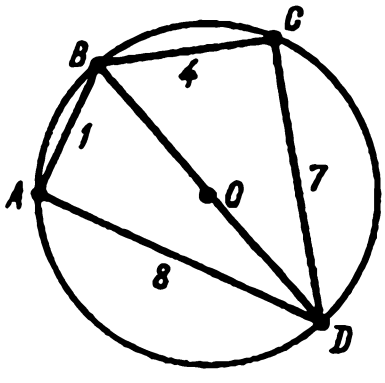


Рис.16.139

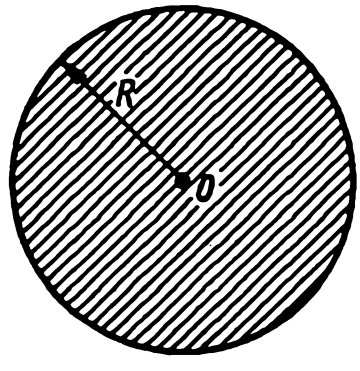


Рис.16.140

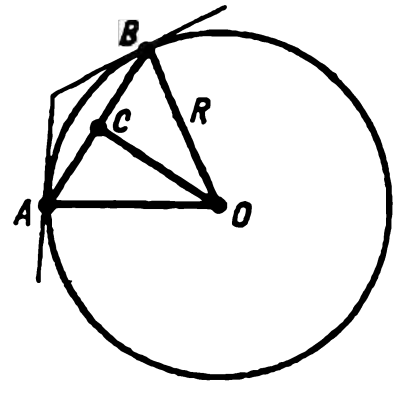


Рис.16.141

Теорема 1. *Площа круга дорівнює половині добутку довжини кола на радіус*: $S = \frac{1}{2} C \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R$, тобто $S = \pi R^2$.

* Нехай P_1 і P_2 — відповідно периметри, а S_1 і S_2 — площі вписаного і описаного правильних n-кутників (рис. 16.141), S — площа круга. Тоді $S_1 < S < S_2$. Помітимо, що $S_1 = \frac{1}{2} P_1 \cdot OC = \frac{1}{2} P_1 \cdot R\cos\frac{\pi}{n}$, $S_2 = \frac{1}{2} P_2 R$; при $n \to \infty$ маємо $\cos\frac{\pi}{n} \to 1$, $P_1 \to C$, $P_2 \to C$, отже, $S_1 \to \frac{1}{2} C \cdot R$, $S_2 \to \frac{1}{2} C \cdot R$, разом з тим і $S \to \frac{1}{2} C \cdot R$, що й треба було довести. *

Круговим сектором називається частина круга, що лежить всередині плоского центрального кута (рис. 16.142). Площа кругового сектора з центральним кутом в 1° дорівнює $\frac{\pi R^2}{360°}$, тому площа кругового сектора з центральним кутом $\alpha°$ дорівнює $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$. Зауважимо, що коли центральний кут має α радіан, то

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

Якщо круг перетнути прямою, він ділиться на два *кругових сегменти* (рис. 16.143). Для того щоб знайти площу сегмента AmB, треба від площі кругового сектора AOB відняти площу трикутника AOB.

Круговим кільцем називається частина площини, обмежена двома концентричними колами. *Площа кругового кільця* дорівнює різниці площ зовнішнього і внутрішнього кругів.

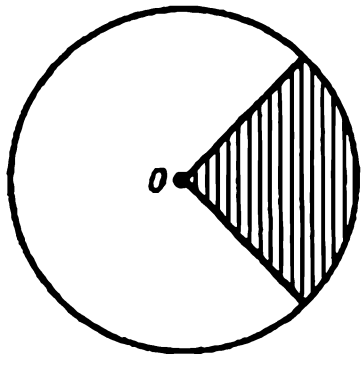


Рис.16.142

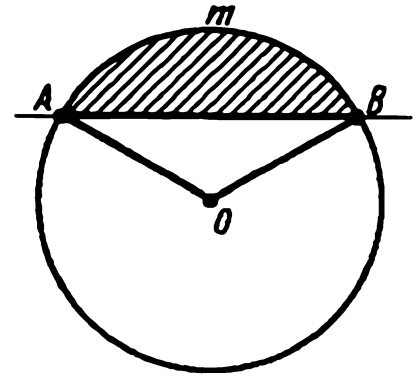


Рис.16.143

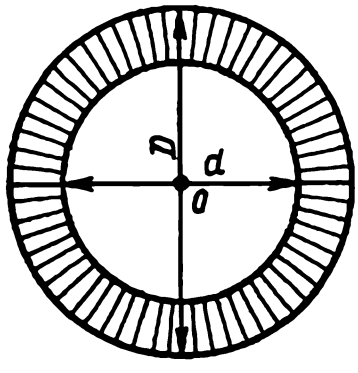


Рис.16.144

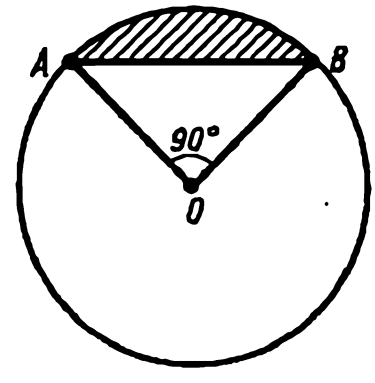


Рис.16.145

Задачі

1. Знайти площу кругового кільця (рис. 16.144), якщо його внутрішній і зовнішній діаметри відповідно дорівнюють d і D.

* Площа зовнішнього круга дорівнює $\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$, а внутрішнього — $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$. Тому площа кругового кільця $S = \frac{1}{4}\pi (D^2 - d^2)$. *

2. Радіус круга дорівнює 10 см. Визначити площу кругового сегмента, дуга якого містить 90°.

* Нехай S — площа сегмента, S_1 — площа кругового сектора, S_2 — площа ΔAOB (рис. 16.145), тоді

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi R^2 \, 90}{360} - \frac{1}{2} R^2 \sin 90° = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2).$$

Враховуючи, що $R = 10$ см, маємо $S = 100\left(\frac{\pi - 2}{4}\right) \approx 28{,}6$ см^2. Відповідь: 28,6 см^2. *

3. Круговий сектор має центральний кут 60° і радіус R. Знайти площу круга, вписаного в цей сектор.

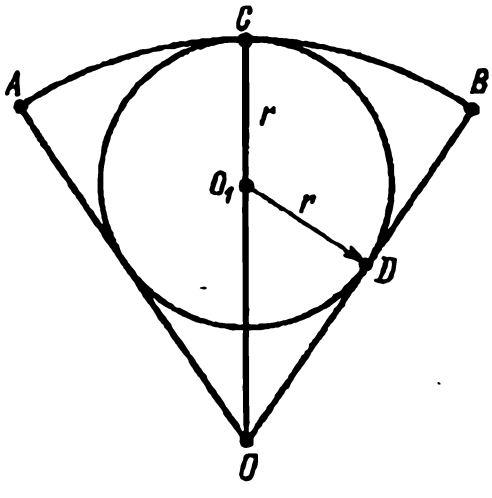


Рис.16.146

* Нехай радіус круга, вписаного в круговий сектор, дорівнює r (рис. 16.146), O_1 — центр вписаного круга, D — точка дотику кола $\omega(O_1, r)$ радіуса OB кругового сектора. Тоді $\angle O_1OD = 30°$, $O_1D = \frac{1}{2} OO_1 =$ $= \frac{1}{2}(R - r) = r$, звідки $r = \frac{1}{3}R$. Отже, площа вписаного круга $S = \frac{1}{9}\pi R^2$. Відповідь: $\frac{1}{9}\pi R^2$.*

Вправи

1. Довести, що відношення площ подібних простих фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

2. Дано правильний трикутник із стороною a. Знайти площі вписаного й описаного кругів.

3. Площа прямокутника S, а його сторони відносяться як $m : n$. Знайти діагональ прямокутника.

4. Діагоналі ромба відносяться як $m : n$, а його площа дорівнює S. Знайти периметр ромба.

5. Пряма, паралельна одній стороні трикутника, ділить його площу навпіл. В якому відношенні ця пряма ділить дві інші сторони трикутника?

6. Дано правильний n-кутник із стороною a. Знайти площі вписаного й описаного кругів.

7. Знайти площу круга, якщо довжина його кола рівна C.

8. Радіус кола дорівнює R. Знайти площу кругового сектора з центральним кутом $\pi/3$.

9. Дано трикутник із сторонами 3, 4, 5. Знайти площу вписаного круга.

10. Дано трикутник із сторонами 5, 12, 13. Знайти площу описаного круга.

11. Центральний кут кругового сектора дорівнює α, а радіус його R. Знайти площу круга, вписаного в цей круговий сектор.

12. Трапеція є одночасно і вписаною і описаною. Довести, що площа цієї трапеції дорівнює добутку висоти на бічну сторону.

13. Довести, що площа трикутника дорівнює $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$.

§ 11. Координати і вектори на площині

11.1. Ми вже навчились задавати точки на координатній площині (див. тему 4, § 1). Покажемо, що за допомогою координат можна також задавати *геометричні перетворення*.

Нехай $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ — дві довільні точки координатної площини (рис.16.147). Проектуючи ці точки на осі координат, знаходимо $AC = |x_2 - x_1|$, $BC = |y_2 - y_1|$. Із ΔABC маємо

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ми вивели формулу відстані між двома точками.

Геометричне перетворення однієї фігури в іншу називається *рухом*, якщо воно зберігає відстань між двома точками. Якщо $A' = f(A)$ і $B' = f(B)$, то в результаті руху маємо $A'B' = AB$. Прикладами руху є *осьова симетрія*, *центральна симетрія*, *паралельне перенесення*, *поворот*.

Перетворення фігури, при якому довільна її точка $A(x; y)$ переходить у точку $A'(x; -y)$, називається *осьовою симетрією* відносно осі Ox і позначається так: $A' = S_{Ox}(A)$. Отже, осьова симетрія відносно осі Ox задається рівностями $x' = x$, $y' = -y$, де x', y' — координати точки A', в яку переходить точка $A(x; y)$ при цій симетрії.

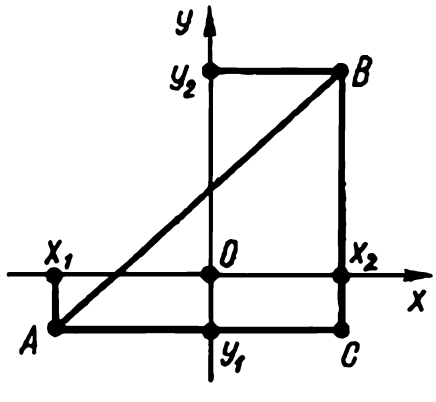


Рис.16.147

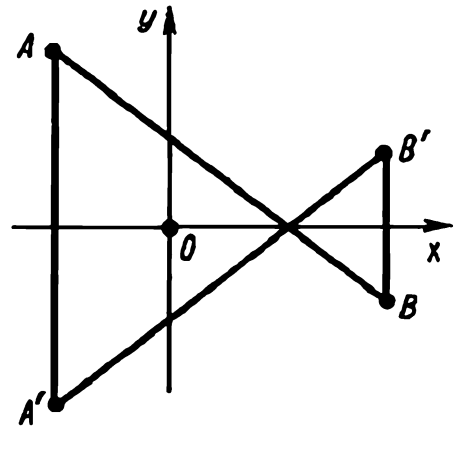


Рис.16.148

Теорема 1. *Осьова симетрія є рухом.*

* Нехай $A'B' = S_{Ox}(AB)$ (рис. 16.148), $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ $A'(x_1; -y_1)$, $B'(x_2; -y_2)$, то

$$A'B' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (-y_1 + y_2)^2} = AB.$$

Перетворення фігури, при якому довільна її точка $A(x; y)$ переходить у точку $A'(-x; -y)$, називається *центральною симетрією* відносно початку координат і позначається так: $A' = Z_0(A)$. Центральна симетрія відносно початку координат задається рівностями $x' = -x$, $y' = -y$.

Теорема 2. *Центральна симетрія є рухом.*

Доведення аналогічне.

Перетворення фігури, при якому довільна її точка $A(x; y)$ переходить у точку $A'(-y; x)$, називається *поворотом на* 90° *відносно початку координат* O і позначається так:

$$A' = R_o^{90^\circ}(A).$$

Поворот на 90° відносно початку координат O задається рівностями $x' = -y$, $y' = x$.

Теорема 3. *Поворот відносно точки є рухом.*

Доведення аналогічне.

Перетворення фігури, при якому довільна її точка $A(x; y)$ переходить у точку $A'(kx; ky)$, де $k \neq 0$ — дійсне число, називається *гомотетією* з коефіцієнтом k і центром $O(0; 0)$. Позначається так: $A' = H_o^k(A)$.

Зрозуміло, що при $k \neq \pm 1$ гомотетія не є рухом, бо $A'B' = k \mid AB \mid$ і $A'B' \neq AB$.

Перетворення фігури, при якому довільна її точка $A(x; y)$ переходить у точку $A'(x + a; y + b)$ (a, b — деякі числа), називається *паралельним перенесенням* (*зсувом*). Це перенесення задається рівностями $x' = x + a, y' = y + b$.

Теорема 4. *Паралельне перенесення є рухом. Воно має такі властивості:*

1) всі точки переміщуються по паралельних прямих на однакову відстань;

2) пряма переходить у паралельну пряму (або в себе);

3) перетворення, обернене до паралельного перенесення, є паралельним перенесенням;

4) композиція двох паралельних перенесень є паралельним перенесенням.

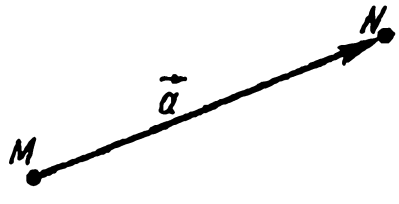


Рис.16.149

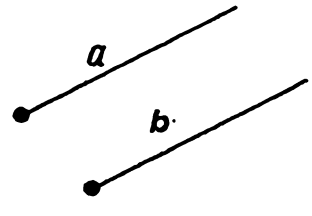


Рис.16.150

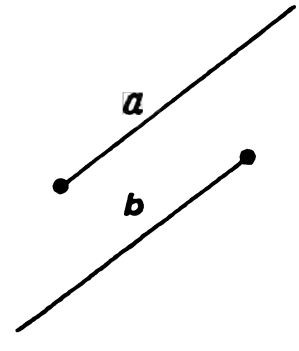


Рис.16.151

Задачі

1. Пряму l, яка описана рівнянням $3x - 4y = 2$, відображено симетрично відносно осі Ox. Скласти рівняння відображеної прямої l'.

* Осьова симетрія відносно осі Ox задається рівностями $x' = x$, $y' = -y$. Звідси $x = x'$, $y = -y'$. Підставляючи ці значення x і y в рівняння прямої l, маємо $3x' + 4y' = 2$. Отже, пряма l' описується рівнянням $3x + 4y = 2$. Відповідь: $3x + 4y = 2$. *

2. Коло ω описане рівнянням $x^2 + (y + 1)^2 = 9$. Знайти рівняння кола ω', яке симетричне колу ω відносно початку координат.

* Центральна симетрія відносно початку координат задається рівностями $x' = -x$, $y' = -y$. Звідки $x = -x'$, $y = -y'$. Підставляючи ці значення в рівняння кола ω, маємо $(x')^2 + (-y' + 1)^2 = 9$, отже шукане рівняння $x^2 + (y - 1)^2 = 9$. Відповідь: $x^2 + (y - 1)^2 = 9$. *

11.2. *Вектором* називається напрямлений відрізок (рис. 16.149). Позначення: $\vec{a}$ або $\vec{MN}$, M — початок вектора, N — його кінець.

Два промені a і b називаються однаково напрямленими (рис. 16.150), якщо вони суміщаються внаслідок паралельного зсуву. Два промені a і b називаються протилежно напрямленими (рис. 16.151), якщо кожен з них однаково напрямлений з променем, доповняльним до другого.

Вектори $\vec{MN}$ і $\vec{PQ}$ називаються однаково (протилежно) напрямленими, якщо промені MN і PQ однаково (протилежно) напрямлені. Вектори $\vec{A_1B_1}$ і $\vec{A_2B_2}$ однаково напрямлені (рис. 16.152). Позначення: $\vec{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{A_2B_2}$. Вектори $\vec{M_1N_1}$ і

$\vec{M_2N_2}$ протилежно напрямлені (рис. 16.153). Позначення: $\vec{M_1N_1} \uparrow\downarrow \vec{M_2N_2}$. Модулем вектора $\vec{AB}$ називається довжина відрізка AB. Два вектори називаються рівними, якщо вони суміщаються внаслідок паралельного зсуву. Рівні вектори мають рівні модулі і однаково напрямлені. Нульовим вектором $\vec{O}$ називається вектор, у якого початок і кінець збігаються.

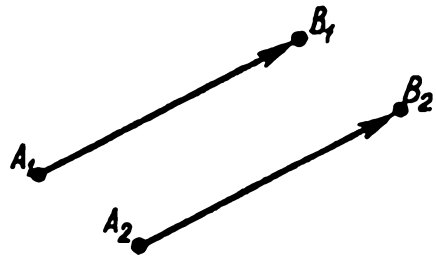


Рис.16.152

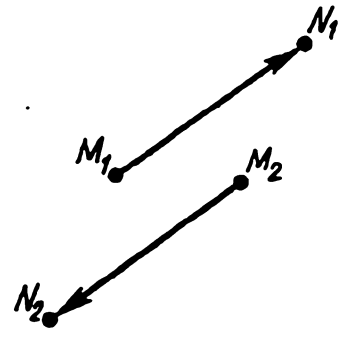


Рис.16.153

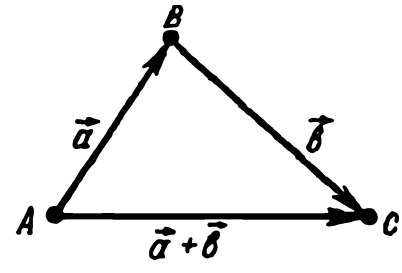


Рис.16.154

Координати вектора $\vec{AB}$ дорівнюють різниці відповідних координат його кінців: нехай $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, тоді $\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, маємо

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Теорема. *Для того щоб два вектори були рівні, необхідно і достатньо, щоб їх координати були рівні.*

11.3. Нехай є вектори $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$; сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

Теорема 1. *Для довільних точок A, B, C площини виконується рівність*

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Ця рівність дає змогу додавати вектори за правилом трикутника (рис. 16.154). Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$. Якщо $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$, то $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

Властивості суми векторів:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

3) $\vec{a} + 0 = \vec{a}$.

Добутком вектора $\vec{a} = \{x; y\}$ *на число* m *називається вектор* $m\vec{a} = \{mx; my\}$.

Властивості добутку вектора на число:

1) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$;

2) $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$;

3) $m(n\vec{a}) = mn\vec{a}$;

4) $m \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Теорема 2. *$|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|$; якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $m\vec{a}$ однаково (протилежно) напрямлений з вектором $\vec{a}$ при $m > 0$ ($m < 0$).*

Два ненульових вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на паралельних прямих, або на одній прямій.

Теорема 3. *Для того щоб ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ були колінеарні, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\vec{a} = m\vec{b}$, де m — деяке число. Звідси випливає, що координати колінеарних векторів пропорційні.*

Нульовий вектор за означенням вважається колінеарним до будь-якого вектора.

Вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ називаються протилежними, $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$. Якщо $|\vec{a}| = 1$, то вектор $\vec{a}$ називається *одиничним*.

Теорема 4. *Нехай $\vec{a}$ — довільний ненульовий вектор, тоді вектор $\vec{b} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — одиничний.*

* Нехай $\vec{a} = \{x; y\}$, тоді $\vec{b} = \left\{\dfrac{x}{|\vec{a}|}; \dfrac{y}{|\vec{a}|}\right\}$, отже, $|\vec{b}| = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. *

Одиничні вектори $\vec{i} = \{1; 0\}$ та $\vec{j} = \{0; 1\}$ називаються ортами.

Теорема 5. *Будь-який вектор $\vec{a} = \{x; y\}$ можна подати у вигляді*

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Теорема 6. *Нехай $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — неколінеарні вектори, $\vec{a}$ — довільний вектор, тоді вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді $\vec{a} = x\vec{m} + y\vec{n}$, де x, y — деякі числа.*

Наприклад, $\vec{m} = \{1; 3\}$, $\vec{n} = \{2; -1\}$, $\vec{a} = \{2; 4\}$. Вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ неколінеарні, бо їх координати не пропорційні, $\vec{a} = x\vec{m} + y\vec{n}$, $\{2; 4\} = x\{1; 3\} + y\{2; -1\}$, $\{2; 4\} = \{x + 2y; 3x - y\}$, звідки $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 3x - y = 4, \end{cases}$ $x = \dfrac{10}{7}$, $y = \dfrac{2}{7}$. Отже, $\vec{a} = \dfrac{10}{7}\vec{m} + \dfrac{2}{7}\vec{n}$.

Нехай точка C (рис. 16.155) поділяє відрізок у відношенні m (тобто $AC : CB = m$), O — довільна точка, тоді

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{m}{1+m}\vec{AB} = \vec{OA} + \frac{m}{1+m}\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) = \frac{1}{1+m}\vec{OA} + \frac{m}{1+m}\vec{OB}.$$

Ми вивели формулу поділу відрізка у даному відношенні

$$\vec{OC} = \frac{1}{1+m}\left(\vec{OA} + m\vec{OB}\right).$$

Зокрема, якщо C — середина відрізка AB, то $m = 1$ і $\vec{OC} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)$.

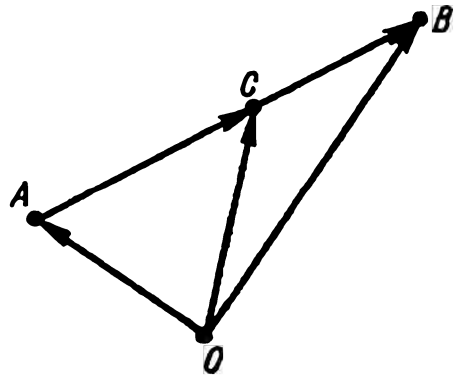


Рис.16.155

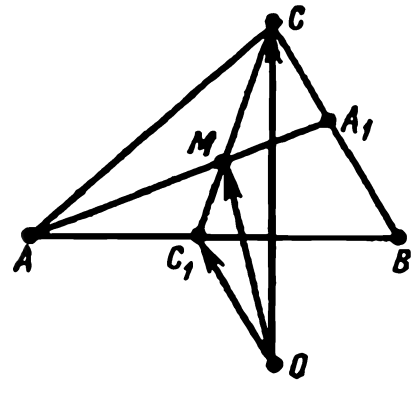


Рис.16.156

Задачі

1. Дано $ABCD$ — довільний чотирикутник, M — середина сторони AB, N — середина сторони CD. Довести, що $\vec{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{BC} + \vec{AD}\right)$.

* За формулою віднімання маємо: $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$ (O — довільна точка). Далі за формулою ділення відрізка у даному відношенні маємо $\vec{ON} = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} + \vec{OD}\right)$ та $\vec{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)$, отже.

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} + \vec{OD}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{OC} - \vec{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{OD} - \vec{OA}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{BC} + \vec{AD}\right),$$ що й треба було довести. *

Зауважимо, що з одержаного результату випливає теорема про середню лінію трапеції.

2. Дано: M — точка перетину медіан ΔABC (рис. 16.156), O — довільна точка. Довести, що

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right).$$

* Маємо AA_1 та CC_1 — медіани ΔABC. Відомо, що $C_1M : MC = 1 : 2$. За формулою поділу відрізка у даному відношенні

$$\vec{OM} = \frac{2}{3}\vec{OC_1} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) + \frac{1}{3}\vec{OC} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right),$$

що й треба було довести. *

3. Дано вектори $\vec{a} = \{1; 3\}$ та $\vec{b} = \{-1; 2\}$. Знайти $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

* $2\vec{a} - \vec{b} = 2\{1; 3\} - \{-1; 2\} = \{3; 4\}$. Отже, $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Відповідь: 5. *

4. Знайти одиничний вектор, однаково напрямлений з вектором $\vec{a} = \{4; -2\}$.

* Вектор $\vec{b} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ одиничний і однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, то $\vec{b} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\vec{a} = \left\{\dfrac{2}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$. Відповідь: $\left\{\dfrac{2}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

5. Дано вектори $\vec{a} = \{1; 2\sqrt{2}\}$ та $\vec{b} = \{-3; 4\}$. Знайти одиничний вектор, що лежить на бісектрисі кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

* Вектори $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ та $\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ одиничні. Отже, паралелограм, побудований на векторах $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ — ромб. Діагональ цього ромба лежить на бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отже, вектор $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ лежить на бісектрисі згаданого кута:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{3} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right\}, \quad \vec{e}_2 = \left\{-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right\},$$

$$\vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left\{\frac{1}{3} - \frac{3}{5}; \frac{\sqrt{8}}{3} + \frac{4}{5}\right\} = \left\{-\frac{4}{15}; \frac{5\sqrt{8} + 12}{15}\right\}.$$

Шуканий вектор $\vec{c}_0 = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left\{\dfrac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{7{,}5}}; \dfrac{\sqrt{8} + 1}{\sqrt{15}}\right\}$.

6. Довести, що з медіан довільного трикутника можна скласти трикутник.

* Нехай AA_1, BB_1 та CC_1 — медіани ΔABC:

$$\vec{AA}_1 = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right), \quad \vec{BB}_1 = \frac{1}{2}\left(\vec{BA} + \vec{BC}\right), \quad \vec{CC}_1 = \frac{1}{2}\left(\vec{CA} + \vec{CB}\right),$$

отже, $\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 = 0$. Якщо три неколінеарних вектори в сумі дають $\vec{0}$, то з них можна скласти трикутник. *

11.4. *Скалярним добутком векторів* $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$ та $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$ називається число $x_1x_2 + y_1y_2$. Позначається так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Отже, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. Наприклад, якщо $\vec{a} = \{1; 4\}$, $\vec{b} = \{-2; 3\}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 10.$$

Добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називається *скалярним квадратом вектора* $\vec{a}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

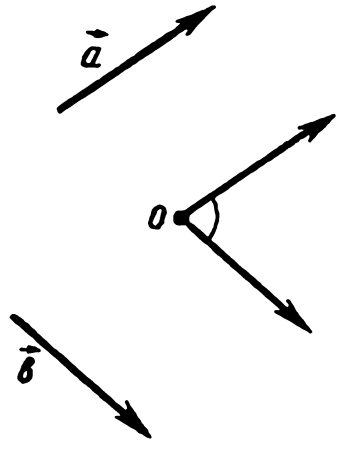


Рис.16.157

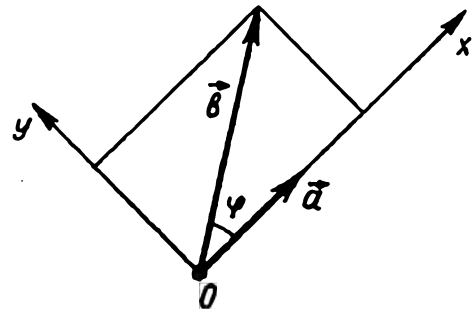


Рис.16.158

Властивість 3 називається *дистрибутивністю* скалярного добутку. Доведемо її.

Нехай $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3\}$. Властивість 3 випливає з тотожності

$$x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3.$$

Кутом між векторами $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$ називається кут BAC. *Кут між векторами* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — це кут між рівними їм векторами, що мають спільний початок (рис. 16.157). Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0°, а кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°.

Теорема. *Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ $(0° \le \varphi \le 180°)$.

* Згідно з властивостями 1 — 3 маємо

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2).$$

Звідси видно, що скалярний добуток векторів не залежить від вибору системи координат, бо величини $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ та $|\vec{a} + \vec{b}|$ не залежать від вибору системи координат.

Введемо систему координат так, щоб вектор $\vec{a}$ лежав на осі Ox (рис. 16.158). У цій системі координат маємо

$$\vec{a} = \{|\vec{a}|; 0\}, \quad \vec{b} = \{|\vec{b}|\cos\varphi; |\vec{b}|\sin\varphi\},$$

$$\text{тому } \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi. *$$

Із щойно доведеної теореми випливає таке твердження: *щоб ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю*. Крім того, маємо формулу для знаходження кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{16.6}$$

Задачі

1. Відомо, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 60°$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

$$* |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 2\vec{a}\vec{b} + (\vec{b})^2} = \sqrt{1 + 2\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 9} = \sqrt{13}.$$

Відповідь: $\sqrt{13}$. *

2. Відомо, що $\vec{a}$ {2; –5}, $\vec{b}$ {–1; 1}. Знайти кут між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$.

* Послідовно знаходимо $\vec{a}\,\vec{b} = -2 - 5 = -7$, $|\vec{a}| = \sqrt{29}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$. Отже, $\cos\varphi = -\frac{-7}{\sqrt{29}\sqrt{2}} = -\frac{7}{\sqrt{58}}$. Відповідь: $\varphi = \arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{58}}\right)$. *

3. Знайти площу ΔABC, якщо A (1; 3), B (– 1; – 2), C (– 3; 1).

* Знаходимо вектори $\vec{AB}$ = {– 2; – 5}, $\vec{AC}$ = {– 4; – 2}. Далі маємо $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 8 + 10 = 18$. За формулою (16.6) маємо $\cos A = \frac{18}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{18}{\sqrt{29}\sqrt{20}}$. $\sin A = \frac{8}{\sqrt{145}}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}| \times$

$\times |\vec{AC}|\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{29}\sqrt{20}\frac{8}{\sqrt{145}} = 8$. Відповідь: 8. *

4. Дано точки A (–2; 1), B (1; 4), C (5; 0). Довести, що ΔABC прямокутний.

* $\vec{BA}$ = {–3; –3}, $\vec{BC}$ = {4; –4}, отже, $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = -12 + 12 = 0$, $\vec{BA} \perp \vec{BC}$, що й треба було довести. *

5. Дано квадрат $ABCD$, M і N відповідно середини сторін BC і AB. Довести, що $AM \perp DN$.

* Нехай $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$. Помітимо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (рис. 16.159). $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{DN} = \vec{AN} - \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{AM}\cdot\vec{DN} = (\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a})\cdot(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b})^2 - \frac{1}{2}(\vec{a})^2 =$

$= 0$, бо $\vec{a}\,\vec{b} = 0$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Отже, $\vec{AM} \perp \vec{DN}$, що треба було довести. *

11.5. Виведемо *рівняння прямої і кола*. Нехай на координатній площині задано пряму l (рис. 16.160), $\vec{n} = (a;\ b\} \perp l$. Вектор $\vec{n}$ називається нормальним вектором прямої l. Візьмемо на прямій точку $A\ (x_0;\ y_0)$ і довільну точку $B\ (x;\ y)$, $\vec{AB} \perp \vec{n}$, отже, $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$ або $\{x - x_0;\ y - y_0\} \cdot \{a;\ b\} = 0$, звідки $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$, тобто $ax + by = ax_0 + by_0$. Ми дістали рівняння прямої, яке має назву рівняння прямої, що проходить через точку $(x_0;\ y_0)$ і має даний нормальний вектор $\vec{n} = \{a;\ b\}$.

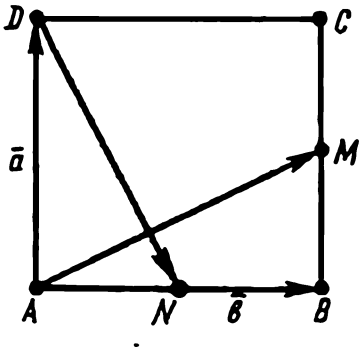


Рис.16.159

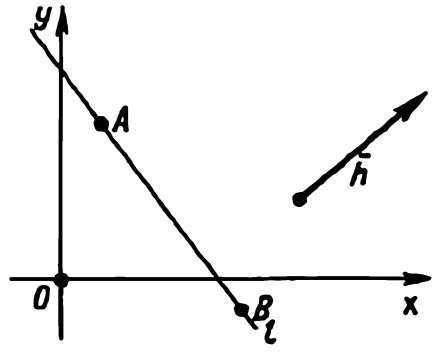


Рис.16.160

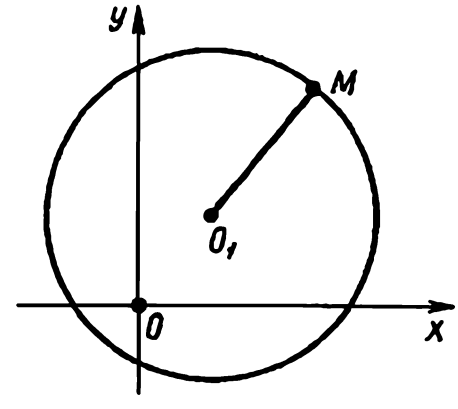


Рис.16.161

Покажемо, що рівняння

$$ax + by = c \tag{16.7}$$

— це рівняння прямої. Візьмемо якусь пару чисел $(x_0;\ y_0)$, що задовольняє це рівняння, тоді

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{16.8}$$

Віднявши почленно рівність (16.8) від (16.7), дістанемо рівняння

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0,$$

тобто рівняння прямої. Помітимо окремі випадки рівняння (16.7):

а) $a = 0,\ b \neq 0$ — пряма паралельна осі Ox;

б) $b = 0,\ a \neq 0$ — пряма паралельна осі Oy;

в) $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$ — пряма проходить через початок координат. Нехай $ab \neq 0$. Покладемо $x = 0$ в рівнянні (16.7), тоді $y = c/b$, отже, точка $(0;\ c/b)$ — це точка перетину прямої з віссю Oy. Покладемо $y = 0$ в рівнянні (16.7), тоді $x = c/a$, отже, $(c/a;\ 0)$ — точка перетину прямої з віссю Ox. З рівняння (16.7) маємо

$$\frac{x}{c/a} + \frac{y}{c/b} = 1 \text{ або } \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \tag{16.9}$$

Рівняння (16.9) називається рівнянням прямої у відрізках на осях.

Точки $(m;\ 0)$ та $(0;\ n)$ — відповідно точки перетину прямої з осями Ox та Oy.

Розглянемо коло $\omega\ (O_1,\ r)$ на координатній площині (рис. 16.161). Нехай O_1 має координати $(x_0;\ y_0)$, $M\ (x;\ y)$ — довільна точка кола, тоді

$$O_1M^2 = r^2, \text{ або } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Ми одержали рівняння кола з центром $O_1(x_0; y_0)$ і радіусом r. Зокрема, якщо центр кола збігається з початком координат, воно має рівняння $x^2 + y^2 = r^2$.

Задачі

1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1; 2)$ та $B(2; 0)$.

* Оскільки точки A та B лежать на прямій, їх координати задовольняють рівняння цієї прямої. З рівняння (16.9) прямої у відрізках на осях маємо

$$\begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1, \\ \frac{2}{m} + \frac{0}{n} = 1. \end{cases}$$

звідки $m = 2$, $n = 4$. Шукане рівняння $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, або $2x + y = 4$. Відповідь: $2x + y = 4$. *

2. Пряма має рівняння $2x - y = 3$. Знайти точки перетину цієї прямої з осями координат.

* Подамо рівняння прямої у відрізках на осях: $\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1$. Отже, шукані точки $A(3/2; 0)$, $B(0; -3)$. *

3. Знайти площу трикутника, який відтинає пряма $3x + 2y = 5$ від осей координат.

* Запишемо рівняння прямої у відрізках на осях: $\frac{x}{5/3} + \frac{y}{5/2} = 1$. Отже, точки $A(5/3; 0)$ та $B(0; 5/2)$ — точки перетину прямої з осями координат. Площа трикутника AOB $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{12}$.

Відповідь: $\frac{25}{12}$. *

4. Знайти відстань прямої $3x - y = 1$ до початку координат.

* Запишемо рівняння прямої у вигляді $\frac{x}{1/3} + \frac{y}{-1} = 1$. Звідси видно, що $A(1/3; 0)$ та $B(0; -1)$ — точки перетину прямої з осями координат. Трикутник AOB має катети $OA = 1/3$, $OB = 1$. Позначимо через h висоту цього трикутника, проведену до гіпотенузи, h — шукана відстань: $h = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{1/3 \cdot 1}{\sqrt{1/9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{10}}$. *

5. Дано точку $M(x_0; y_0)$ та пряму $ax + by = c$, яку позначимо через l. Знайти відстань від точки M до прямої l.

* Проведемо перпендикуляр MA з точки M до прямої l. Точка $A(x; y)$ лежить на прямій l: $\vec{n} = \{a; b\}$. Оскільки вектори $\vec{MA}$ і $\vec{n}$ колінеарні, то

$$|\vec{MA} \cdot \vec{n}| = |\vec{MA}| \cdot |\vec{n}|, \qquad (П16.5)$$

$$\vec{MA} = \{x - x_0; y - y_0\}.$$

З рівняння (П16.5) маємо

$$|\vec{MA}| = \frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Оскільки $A \in l$, то $ax + by = c$ і

$$|\vec{MA}| = \frac{|c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Відповідь: $\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. *

6. Знайти відстань між паралельними прямими l_1 і l_2, які задано рівняннями $3x - 2y = 6$ та $3x - 2y = 10$.

* Точка A (2; 0) лежить на прямій l_1. Відстань h від точки A до прямої l_2 — це шукана відстань. Згідно з результатом задачі 18 $h = \frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{9+4}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$. Відповідь: $\frac{4}{\sqrt{13}}$. *

7. Коло ω задано рівнянням $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Знайти центр, радіус кола та точки його перетину з осями координат.

* Центр кола O (–3; 1), радіус $r = 2$. Точка перетину кола з віссю Ox має координати $(x_0; 0)$. Отже, $(x_0 + 3)^2 + 1 = 4$, звідки $x_0 = -3 \pm \sqrt{3}$. Коло перетинає вісь Ox у точках A $(-3 - \sqrt{3}\ ; 0)$ і B $(-3 + \sqrt{3}\ ; 0)$. Точка перетину кола з віссю Oy має координати $(0; y_0)$, отже, $3^2 + (y_0 - 1)^2 = 4$, звідки $(y_0 - 1)^2 = -5$. Немає розв'язків. Отже, коло не перетинає вісь Oy. *

8. Знайти взаємне розміщення кола $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4$ і прямої $4x - y = 2$.

* Рівняння кола запишемо так: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$, або $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$. Отже, центр кола O (1; –2), радіус $r = 3$. Нехай h — відстань від точки O до даної прямої:

$$h = \frac{|4 \cdot 1 - (-2) - 2|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} < 3.$$

Отже, пряма перетинає коло. *

Вправи

1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки A (1; 3) і B (–2; 4).

2. Пряма проходить через точки A (–2; 5) і B (3; –1). Знайти площу трикутника, який дана пряма відтинає від координатних осей.

3. Знайти відстань між прямою $5x - 3y = 4$ і початком координат.

4. Знайти відстань між прямими $4x - 3y = 5$ і $4x - 3y = 8$.

5. Дано рівняння кола $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$. Знайти точки перетину кола з координатними осями.

6. Визначити точки перетину кола $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ і прямої $y = -3 + x\sqrt{8}$.

7. Чи перетинаються кола з рівняннями $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ і $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$?

8. Дано точки A (–2; 1), B (2; 5), C (6; 1), D (2; –3). Довести, що $ABCD$ — квадрат.

9. Дано точки A (2; 3), B (4; 1), C (–2; –1). Довести, що ABC — прямокутний трикутник.

10. Дано точки A (1; 5), B (7; 3), C (6; 0), D (0; 2). Довести, що $ABCD$ — прямокутник.

11. Знайти косинус кута між діагоналями чотирикутника $ABCD$, де A (1; 6), B (9; 2), C (6; –2), D (2; –3).

12. Дано точки A (1; 4), B (5; 2), C (3; –1). Знайти площу ΔABC.

13. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = 30°$. Знайти $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.

14. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 60°$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

15. Довести за допомогою векторів, що:

а) діагоналі ромба перпендикулярні;

б) сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

16. У прямокутнику $ABCD$ сторона $AD = 2AB$. Точку E взято на AD так, що $AE : ED = 1 : 3$. Довести, що $AC \perp BE$.

17. Довести справедливість формули

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{AB}\right|^2 \left|\vec{AC}\right|^2 - \left(\vec{AB}\cdot\vec{BC}\right)^2}.$$

Відповіді до вправ

§ 2. 1. 36°, 144°. **2.** 82,5°, 97,5°. **3.** 40°, 40°, 140°, 140°. **4.** 12. **7.** 35.

§ 4. 1. 7 : 6 : 5. **2.** 30°, 30°, 120°. **3.** 30°, 75°, 75°, або 15°, 15°, 150°. **4.** 60°. **5.** 72°, 72°, 36° або 360°/7, 360°/7, 540°/7. **6.** 20°, 60°, 100°. **8.** 120°. **9.** 8. **10.** $90° + \alpha/2$, $90° - \alpha/2$. **11.** Так. **12.** Так. **13.** 31^c і 149°.

§ 5. 1. 60°. **2.** 30^c і 150°. **3.** Так. **4.** Так.

§ 7. 2. $a + b$. **3.** $90° + \gamma/2$ і $90° - \gamma/2$. **4.** $\alpha/2$ і $180° - \alpha/2$. **5.** a; $b - a$. **6.** $P\dfrac{m}{2(m+n)}$ і $P\dfrac{n}{2(m+n)}$.

7. $6a$. **8.** $\dfrac{1}{2}P$. **9.** $\dfrac{3a+b}{4}$, $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a+3b}{4}$. **10.** $a + b$. **11.** α, $90° - \alpha/2$, $90° - \alpha/2$. **13.** $\dfrac{cb}{a+b}$, $\dfrac{ca}{a+b}$.

§ 8. 1. а) $c = 8{,}54$, $\angle A = 66°$, $\angle B = 54°$; б) $a = 5{,}37$, $\angle B = 59°16'$, $\angle C = 81°30'$: в) $\angle A = 125°$, $b = 4{,}01$, $c = 14{,}67$; г) $\angle A = 102°$, $a = 10{,}82$, $c = 5{,}02$; д) $\angle A = 68°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 52°$; е) $\angle A = 32°12'$, $\angle B = 13°54'$, $\angle C = 133°54'$. **2.** $\angle A = 21°32'$, $\angle C = 118°28'$, $a = 6{,}8$, $b = 11{,}7$. **3.** $a\left(1+\dfrac{\cos\left((\beta-\gamma)/2\right)}{\sin\left((\beta+\gamma)/2\right)}\right)$. **4.** $d(2+\sqrt{2})$; $d(\sqrt{2}+1)$. **6.** $a\sin\alpha/\sin 1{,}5\alpha$. **7.** а) $\angle B = 56°$, $b = 5{,}2$, $c = 6{,}3$; б) $\angle A = 29°$, $a = 2{,}55$, $c = 5{,}26$; в) $\angle B = 42°$, $a = 1{,}38$, $b = 1{,}2$; г) $\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$, $b = 2{,}77$; д) $\angle A = 53°34'$, $\angle B = 36°26'$, $c = 5{,}22$. **8.** $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

§ 9. 2. 4,8 π см. **3.** $\pi\sqrt{a^2+b^2}$. **4.** 4π см. **5.** $2\pi a$.

§ 10. 2. $\dfrac{\pi a^2}{12}$, $\dfrac{\pi a^2}{3}$. **3.** $\sqrt{S\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)}$. **4.** $2\sqrt{2S\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)}$. **5.** $\sqrt{2}+1$. **6.** $\dfrac{\pi}{4}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{n}\right)^2$, $\dfrac{\pi}{4}\left(a\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{n}\right)^2$ **7.** $c^2/4\pi$. **8.** $\dfrac{1}{6}\pi R^2$. **9.** π. **10.** $42\dfrac{1}{4}\pi$. **11.** $\pi R^2\left(\dfrac{\sin\alpha/2}{1+\sin\alpha/2}\right)^2$.

§ 11. 1. $x + 3y - 10 = 0$. **2.** $\dfrac{169}{60}$ кв. од. **3.** $\dfrac{4}{\sqrt{34}}$. **4.** 0,6. **5.** $(0; 2+\sqrt{8})$, $(0; 2-\sqrt{8})$, $(-1+\sqrt{5}; 0)$, $(-1-\sqrt{5}; 0)$. **6.** Дві точки перетину: $M_1(1; \sqrt{8}-3)$, $M_2\left(-\dfrac{5}{9}; -3-\dfrac{5\sqrt{8}}{9}\right)$. **7.** Так. **11.** $\dfrac{5}{\sqrt{6586}}$. **12.** 8 кв. од. **13.** $11+2\sqrt{3}$. **14.** $\sqrt{7}$.

Тема 17. СТЕРЕОМЕТРІЯ

§ 1. Аксіоми стереометрії

Основними фігурами у просторі є точка, пряма, площина.

1.1. Наведемо ***аксіоми стереометрії.***

1. *Яка б не була площина, існують точки у просторі, що належать цій площині, і точки, що не належать їй.*

2. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають і спільну пряму, що проходить через цю точку.*

3. *Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну.*

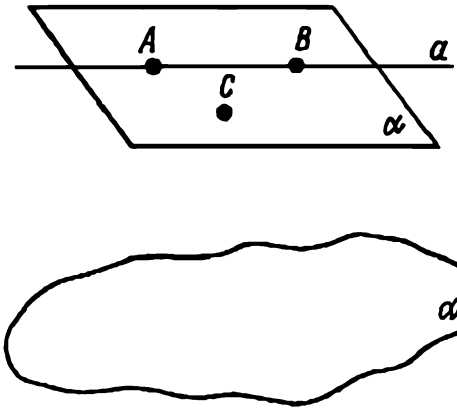


Рис. 17.1

4. *Для будь-якої площини виконуються аксіоми планіметрії.*

На рис. 17.1 показано два загальноприйнятих зображення площини. Позначаються площини малими грецькими буквами: α, β, γ, ... Якщо пряма a лежить у площині α, пишуть $a \subset \alpha$. Якщо площини α і β перетинаються по прямій l, то пишуть $\alpha \cap \beta = l$.

1.2. Перші наслідки аксіом стереометрії формулюються такими теоремами.

Теорема 1. *Через пряму і точку поза нею можна провести площину і до того ж тільки одну.*

* Нехай $B \notin a$ (рис. 17.2). На прямій a виберемо довільну точку A. Проведемо пряму b через точки A і B; $a \neq b$, бо $B \notin a$. За аксіомою 3 через прямі a і b можна провести площину α. Зрозуміло, що $a \subset \alpha$ і $B \in \alpha$. Доведемо від супротивного, що така площина єдина. Нехай існує площина β така, що $a \subset \beta$, $B \in \beta$ і $\beta \neq \alpha$. Площини α і β мають спільну пряму a. Оскільки ці площини різні, всі їхні спільні точки за аксіомою 2 лежать на прямій a. Ми прийшли до суперечності, бо точка B, спільна для площин α і β, не належить прямій a. *

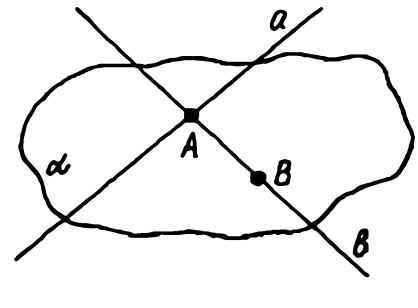


Рис. 17.2

Теорема 2. *Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма лежить у цій площині.*

* Нехай точки A і B прямої a лежать у площині α (рис. 17.1). Візьмемо точку $C \notin a$. За теоремою 1 через пряму a і точку C можна провести площину β. Якщо $\beta = \alpha$, то $a \subset \alpha$ і теорему доведено. Якщо $\beta \neq \alpha$, то за аксіомою 2 площини β і α мають спільну пряму b. Прямі a і b збігаються, бо мають дві спільні точки: A і B. Отже, $a \subset \alpha$. *

Теорема 3. *Площина і пряма поза нею або не мають спільних точок, або мають єдину спільну точку.*

Теорема 4. *Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.*

§ 2. Паралельність у просторі

2.1. *Дві прямі у просторі* називаються *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок. Якщо прямі a і b паралельні, то, як і в планіметрії, пишуть $a \parallel b$. У просторі прямі можуть бути розміщені так, що вони не перетинаються і не паралельні. Такі прямі називаються *мимобіжними*.

Теорема 1. *Через точку поза даною прямою можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.*

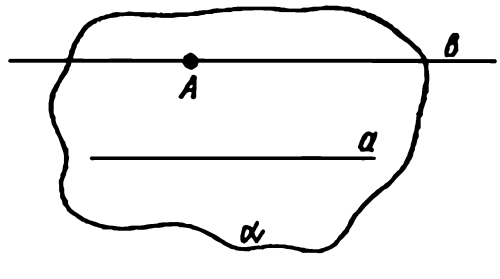


Рис. 17.3

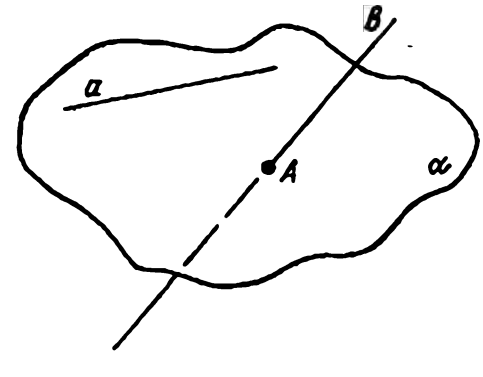


Рис. 17.4

* Нехай $A \notin a$ (рис. 17.3). Пряма a і точка A визначають єдину площину α. В цій площині проведемо через точку A пряму b, паралельну прямій a. Якщо існує ще одна пряма c, паралельна a, що проходить через точку A, то c і a визначають деяку площину за означенням паралельних прямих. Ця площина містить пряму a і точку A, тобто збігається з площиною α. Отже, в площині α через точку A проходять дві прямі, паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельних у планіметрії. *

Зауваження. Згідно з означенням дві паралельні прямі лежать в одній площині. Легко помітити, що через дві паралельні прямі можна провести тільки одну площину.

Теорема 2 (ознака мимобіжних прямих). *Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а інша перетинає цю площину в точці поза першою прямою, то ці прямі мимобіжні.*

* Нехай $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = A$, $A \notin a$ (рис. 17.4). Припустимо, що прямі a і b не мимобіжні. Тоді існує площа β, якій належать прямі a і b. У цій площині β лежать пряма a і точка A. Оскільки пряма a і точка A поза нею визначають єдину площину, то $\beta = \alpha$. Але $b \subset \beta$ і $b \not\subset \alpha$, отже, рівність $\beta = \alpha$ неможлива. *

Теорема 3 (транзитивність паралельних). *Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою. Інакше, якщо $a \parallel c$ і $b \parallel c$, то $a \parallel b$.*

Лема. *Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то і друга перетинає цю площину.*

* Нехай $a \parallel b$ і $a \cap \alpha = A$ (рис. 17.5). Паралельні прямі a і b визначають деяку площину β. Площини α і β мають спільну точку A, отже, мають і спільну пряму c, що проходить через точку A за аксіомою 2. Через точку A можна провести тільки одну пряму a, паралельну b. Отже, $c \nparallel b$. Прямі b і c не паралельні і лежать у площині β, отже, перетинаються в деякій точці B. Пряма b має з площиною α спільну точку B і не лежить у площині α (інакше за теоремою 2 прямі a і b були б мимобіжні). Отже, пряма b перетинає площину α. Лему доведено.

Нехай $a \parallel c$ і $b \parallel c$ (рис. 17.6).

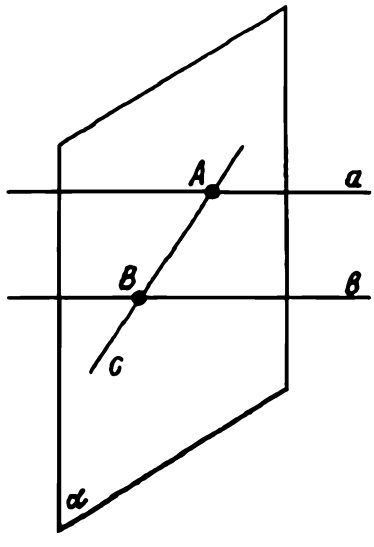


Рис. 17.5

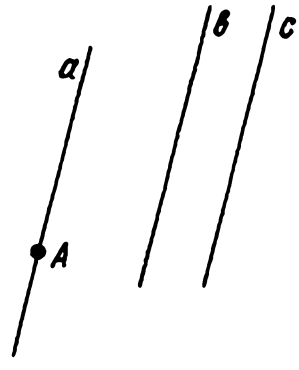


Рис. 17.6

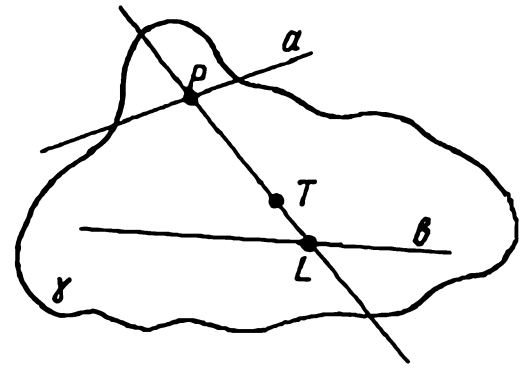


Рис. 17.7

Помітимо, що прямі a і b за теоремою 1 не можуть перетинатися. Доведемо, що вони лежать в одній площині. Нехай $A \in a$. Проведемо площину γ через пряму b і точку A і доведемо, що $a \subset \gamma$. Якщо a перетинає площину γ, то за лемою c перетинає площину γ і b перетинає γ. Ми дійшли суперечності, бо $b \subset \gamma$. *

Задачі

1. Дано мимобіжні прямі a, b і точку T. Провести через точку T пряму, що перетинає прямі a і b.

* Якщо точка T лежить на одній з прямих a, b, задача проста і має безліч розв'язків. Наприклад, нехай $T \in a$. Виберемо на прямій b довільну точку P і проведемо шукану пряму TP.

Розглянемо випадок, коли точка T не лежить на жодній з прямих a, b (рис. 17.7). Проведемо площину γ через пряму b і точку T. Нехай $P = \gamma \cap a$ (якщо $\gamma \cap a = \varnothing$, розв'язків немає). Проводимо пряму PT. Якщо $PT \cap b = L$, то пряма PT шукана. Якщо $PT \cap b = \varnothing$, розв'язків немає. *

2. В планіметрії справедлива така теорема: дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Чи справедлива ця теорема в стереометрії?

* Розглянемо прямокутний паралелепіпед $ABCDD_1C_1B_1A_1$ (рис. 17.8). $AA_1 \perp AD$ і $CD \perp AD$, але прямі AA_1 і CD не паралельні (це мимобіжні прямі). Відповідь: ні. *

3. Прямі a і b мимобіжні. Провести пряму, яка перетинає b і паралельна прямій a.

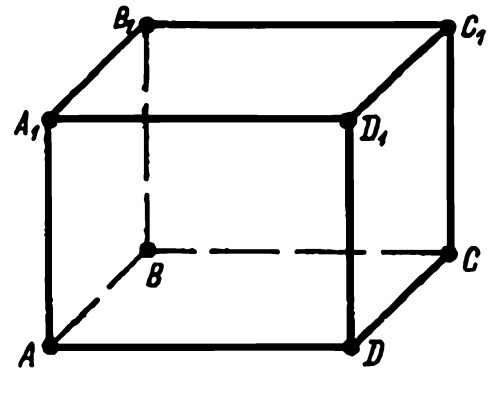


Рис. 17.8

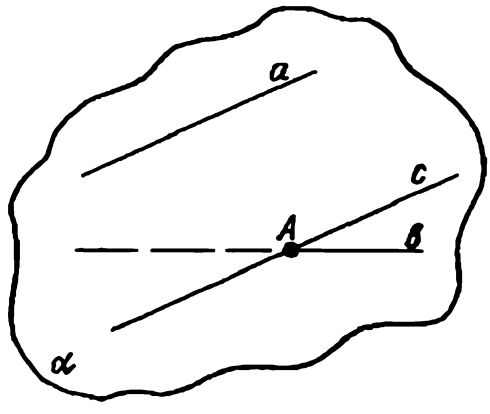


Рис. 17.9

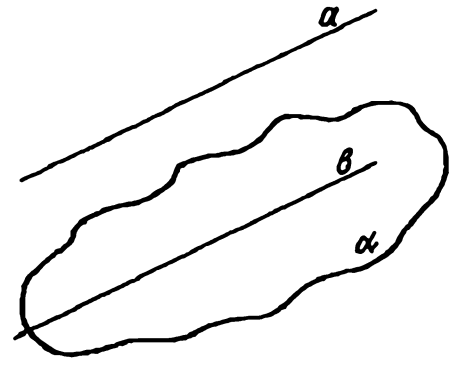


Рис. 17.10

* На прямій b візьмемо довільну точку A (рис. 17.9). Проведемо площину α через пряму a і точку A. У площині α через точку A проводимо пряму $c \parallel a$. Пряма c шукана. *

2.2. *Пряма і площина* називаються *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна площині α, то пишуть $a \parallel \alpha$.

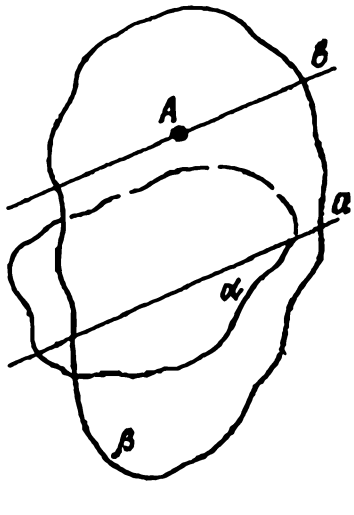


Рис. 17.11

Теорема 1 (ознака паралельності прямої і площини). *Якщо пряма поза площиною паралельна якій-небудь прямій на площині, то ця пряма паралельна і самій площині.*

* Нехай $b \subset \alpha$, $a \parallel b$ і $a \not\subset \alpha$ (рис. 17.10). Доведення проведемо від супротивного. Нехай $a \not\parallel \alpha$, тоді пряма a перетинає площину α в деякій точці A. Причому $A \notin b$, бо $a \parallel b$. Згідно з ознакою мимобіжних прямих прямі a і b мимобіжні. Ми дійшли суперечності. *

Теорема 2 (про слід). *Якщо площина β проходить через пряму a, паралельну площині α, і перетинає цю площину по прямій b, то $b \parallel a$.*

* Дійсно, прямі a і b не є мимобіжними, бо лежать у площині β. Крім того, ці прямі не мають спільних точок, бо $a \parallel \alpha$. *

Пряму b іноді називають *слідом площини* β на площині α.

Задачі

1. Через дану точку провести пряму, паралельну даній площині.

* Якщо дана точка A лежить на даній площині α, то задача не має розв'язку.

Нехай $A \notin \alpha$ (рис. 17.11). Проведемо в площині α будь-яку пряму a. Через пряму a і точку A проведемо площину β. У площині β проведемо через точку A пряму b, паралельну прямій a. Пряма b паралельна площині α за ознакою паралельності прямої і площини. *

2. На ребрах AB, A_1B_1 і B_1C_1 куба $ABCDD_1C_1B_1A_1$ взято відповідно точки P, M, N (рис. 17.12). Побудувати переріз куба площиною, що проходить через точки P, M, N.

* Якщо перетином площини і многогранника є многокутник, то цей многокутник називається перерізом многогранника.

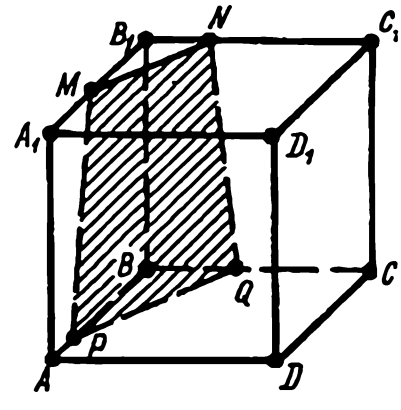


Рис. 17.12

Оскільки точки M і N лежать у площині $A_1B_1C_1D_1$, то вся пряма MN лежить у цій площині. Відрізок MN — це слід січної площини на грані куба $A_1B_1C_1D_1$. Легко також встановити, що MP — слід січної площини на грані ABB_1A_1. Легко помітити, що пряма MN паралельна площині $ABCD$. За теоремою про слід січна площина залишає на грані $ABCD$ слід, паралельний MN. Проводимо відрізок $PQ \parallel MN$. Трапеція $MNQP$ — шуканий переріз. *

3. На ребрі AB трикутної піраміди $ABCD$ взято точку M. Побудувати переріз піраміди площиною, що проходить через точки M і C і паралельна прямій AD.

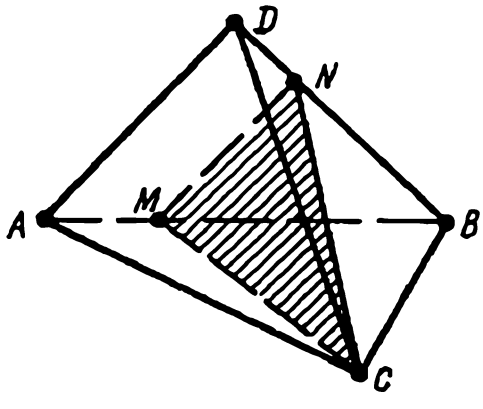


Рис. 17.13

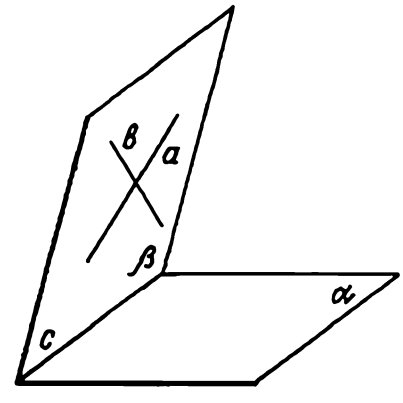


Рис. 17.14

* На рис. 17.13 показано піраміду $ABCD$, де CM — слід січної площини на грані ABC. Провівши на грані ADB відрізок $MN \parallel AD$, дістанемо ΔCMN — шуканий переріз. Дійсно, $AD \parallel MNC$, оскільки $AD \parallel MN$. *

2.3. *Дві площини* називаються *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.

Теорема 1 (ознака паралельності площин). *Якщо площина* α *паралельна кожній з двох прямих, що перетинаються і лежать в іншій площині* β, *то ці площини паралельні.*

* Доведення проведемо від супротивного. Нехай прямі a і b лежать у площині β, причому $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$ (рис. 17.14). Якщо площини α і β не паралельні, то вони перетинаються по деякій прямій c. Оскільки $a \parallel \alpha$, то за теоремою про слід $c \parallel a$ (див. п. 2.2). Аналогічно дістанемо, що $c \parallel b$. Ми дійшли суперечності, оскільки a і b за умовою перетинаються. *

Теорема 2 (про сліди). *Якщо дві паралельні площини перетнуто третьою, то вона залишає на цих площинах паралельні сліди.*

* Нехай площини α і β паралельні, γ — третя площина, яка перетинає їх, причому $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$. Таким чином, a і b — сліди площини γ на площинах α і β. Прямі a і b лежать в одній площині γ і не мають спільних точок, бо спільних точок не мають площини α і β. Отже, $a \parallel b$. *

Теорема 3. *Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.*

Теорема 4. *Відрізки паралельних прямих, обмежені двома паралельними площинами, рівні.*

Теорема 5. *Два кути з відповідно паралельними і однаково напрямленими сторонами рівні і розміщені в паралельних площинах.*

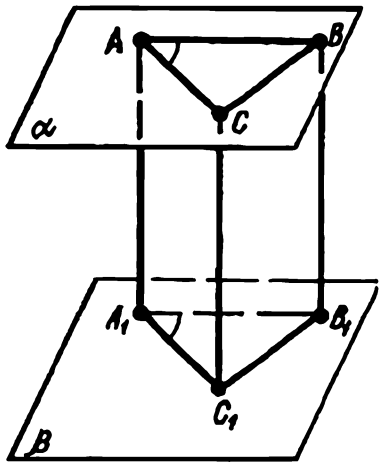


Рис. 17.15

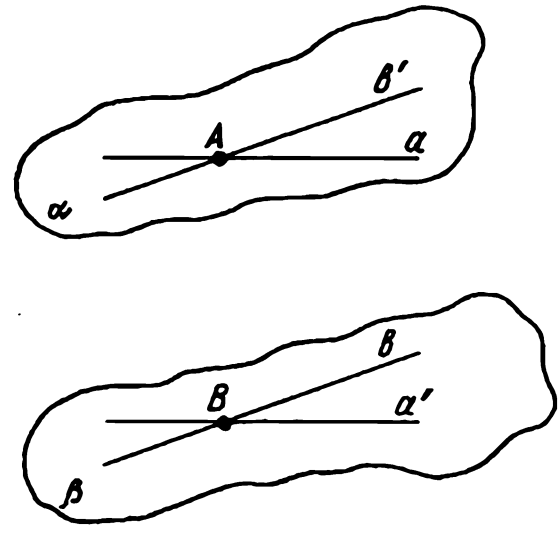


Рис. 17.16

* На рис. 17.15 показано кути BAC і $B_1A_1C_1$, причому $AB \parallel A_1B_1$ та $AC \parallel A_1C_1$. За ознакою паралельності площин площина BAC паралельна площині $B_1A_1C_1$. *

* Нехай $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$. Проведемо прямі AA_1, BB_1, CC_1. Чотирикутник ABB_1A_1 — паралелограм, бо $AB = A_1B_1$ і $AB \parallel A_1B_1$, отже, $AA_1 = BB_1$ і $AA_1 \parallel BB_1$. Аналогічно доведемо, що $AA_1 = CC_1$. Звідси випливає, що $BB_1 = CC_1$ і $BB_1 \parallel CC_1$, отже, CBB_1C_1 — паралелограм і $CB = C_1B_1$. Тепер стверджуємо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, звідки $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. *

Задачі

1. Довести, що дві мимобіжні прямі визначають єдину пару паралельних площин.

* Нехай прямі a і b мимобіжні (рис. 17.16). Виберемо на прямій a довільну точку A і проведемо через неї пряму $b' \parallel b$. На прямій b виберемо довільну точку B і проведемо через неї пряму $a' \parallel a$. Прямі a і b' визначають площину α; прямі b і a' визначають площину β. Площини α і β паралельні за ознакою паралельності площин. Ця пара площин єдина, бо не залежить від вибору точок A і B. *

2. Побудувати переріз куба $ABCDD_1C_1B_1A_1$ площиною, що проходить через вершини A_1, C_1 і точку P на ребрі AB.

* A_1C_1 і A_1P — сліди згаданої площини на гранях куба (рис. 17.17). Оскільки протилежні грані куба паралельні, січна площина залишає на них паралельні сліди. Проводимо в площині $ABCD$ відрізок $PL \parallel A_1C_1$ ($L \in BC$). Шуканий переріз — трапеція A_1C_1LP. *

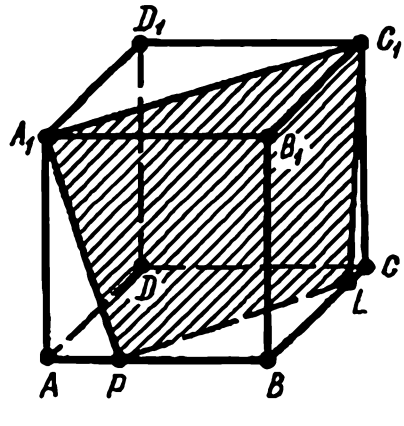


Рис. 17.17

2.4. В основі зображення фігур на площині лежить паралельне проектування.

Нехай дано площину α і пряму a, що перетинає площину α (рис. 17.18). Побудуємо проекцію точки A на площину α. Для цього проведемо через точку A пряму $b \parallel a$, $b \cap \alpha = A'$. Точка A' називається *паралельною проекцією* точки A на площину α (позначення: $A' = \text{Пр}_\alpha A$). Площину α називають площиною проекцій. Множина проекцій всіх точок фігури Ф на площину α називається *проекцією фігури* Ф на площину α. Якщо Ф′ — проекція фігури Ф на площину α, пишуть $\Phi' = \text{Пр}_\alpha\Phi$.

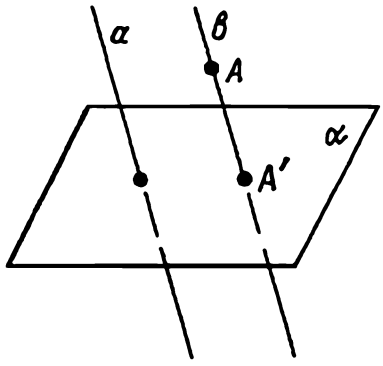


Рис. 17.18

Розглянемо *правила паралельного проектування*. Нехай прямі, які проектують, не паралельні напрямку проектування, тоді для цих прямих та відрізків, що лежать на них, виконуються такі *властивості*.

1. Проекцією прямої є пряма, проекцією відрізка — відрізок.

2. Проекції паралельних прямих паралельні або збігаються.

3. Відношення довжин проекцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, дорівнює відношенню довжин цих відрізків.

Побудова зображень фігур грунтується на цих правилах.

1. *Зображення трикутника*. Довільний трикутник можна паралельно спроектувати так, що його проекцією буде трикутник, подібний будь-якому трикутнику. Отже, паралельною проекцією трикутника може бути довільний (по формі) трикутник. Згідно з властивістю 3 проекцією медіани є медіана.

2. *Зображення паралелограма*. За властивістю 2 проекцією паралелограма є паралелограм.

3. *Зображення трапеції*. Згідно з властивістю 2 проекцією трапеції є трапеція, у якої відношення основ таке саме як і у оригінала.

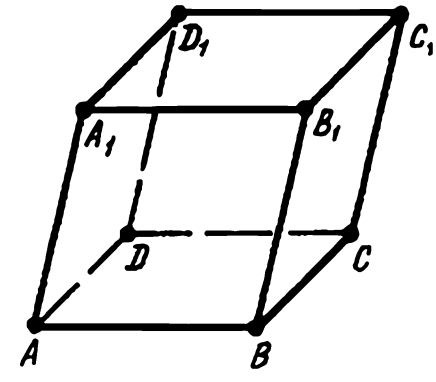


Рис. 17.19

4. *Зображення паралелепіпеда*. Всі грані паралелепіпеда — паралелограми, тому і на зображенні паралелепіпеда (рис. 17.19) всі грані паралелограми.

5. *Зображення призми*. На зображенні призми (рис. 17.20), як і на оригіналі, всі бічні грані — паралелограми.

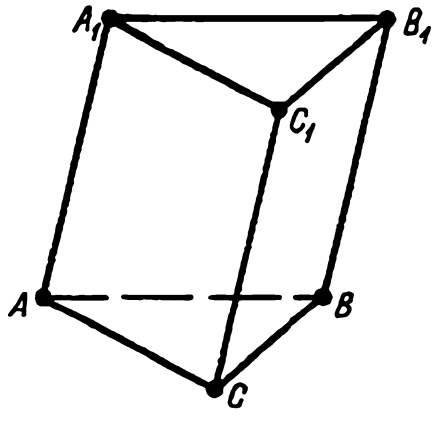


Рис. 17.20

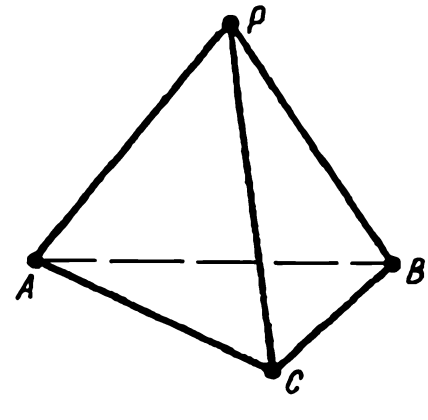


Рис. 17.21

6. *Зображення піраміди*. Зображенням трикутної піраміди є довільний чотирикутник (рис. 17.21). На рис. 17.22 та 17.23 зображено правильні трикутну та чотирикутну піраміди.

Окремий вид паралельного проектування, коли $a \perp \alpha$, називається *ортогональним проектуванням*.

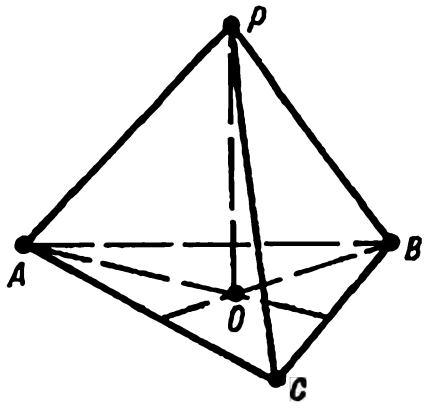


Рис. 17.22

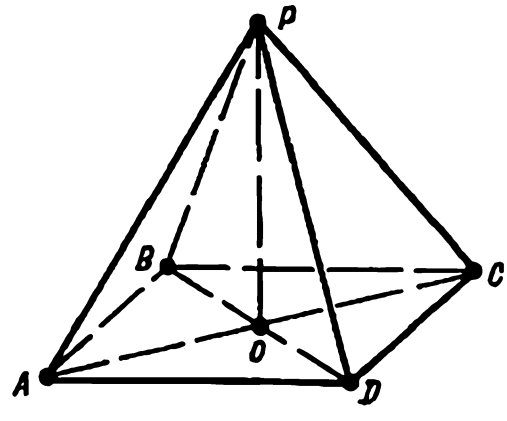


Рис. 17.23

Задачі

1. Паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням квадрата $ABCD$ на деякій площині. M' — зображення точки M, взятої на стороні CD. Зобразити перпендикуляри, проведені з точки M на діагоналі квадрата.

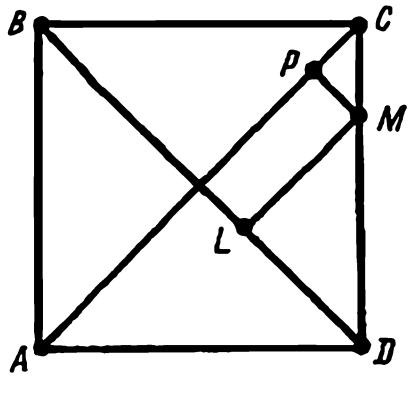


Рис. 17.24

* На рис. 17.24 показано квадрат $ABCD$. $M \in CD$. MP та ML — перпендикуляри, проведені з точки M до діагоналей AC і BD відповідно, $MP \parallel BD$, $ML \parallel AC$. Оскільки паралельність прямих при паралельному проектуванні зберігається (властивість 2), проводимо відрізки $M'P' \parallel B'D'$ та $M'L' \parallel A'C'$ (рис. 17.25). Відрізки $M'P'$ та $M'L'$ — шукані зображення. *

2. Зобразити кут між діагоналлю A_1C бічної грані AA_1C_1C правильної трикутної призми $ABCC_1B_1A_1$ та гранню CC_1B_1B.

* A_1D_1 — зображення перпендикуляра, проведеного з точки A_1 до площини CC_1B_1B (D_1 — середина сторони B_1C_1). Отже, $CD_1 = \text{Пр}_{CC_1B_1B} CA_1$; $\angle A_1CD_1$ — шуканий кут (рис. 17.26). *

3. Всі ребра трикутної піраміди рівні між собою. Зобразити лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі піраміди.

* Легко помітити, що дана піраміда правильна. На рис. 17.27 зображено правильну трикутну піраміду $PABC$. Бічні грані піраміди — рівносторонні трикутники. Якщо M — середина ребра PB, то AM і CM — відповідно зображення перпендикулярів, проведених з точок A і C до ребра PB, отже, AMC – шуканий кут. *

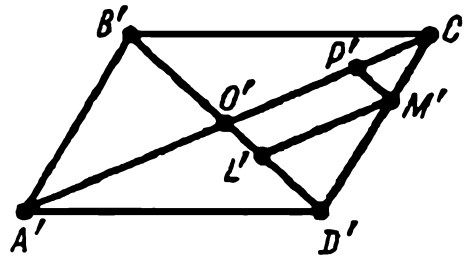


Рис. 17.25

Вправи

1. Відрізок AB не перетинає площину α. Через його кінці і середину M проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках A_1, B_1 та M_1 відповідно. Відомо, що $A_1A = a$, $B_1B = b$. Знайти M_1M.

2. Розв'язати попередню задачу за умови, що відрізок AB перетинає площину α.

3. Дано паралелограм $ABCD$ і площину α, що не перетинає його. Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, що перетинають дану площину в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Відомо, що $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Знайти DD_1.

4. Пряма a паралельна лінії перетину площин α і β. З'ясувати взаємне розміщення прямої a і площин α і β.

5. Сторона BC трикутника ABC лежить у площині α. Як розміщена пряма MN по відношенню до площини α, якщо M і N — відповідно середини сторін AB і AC?

6. Пряма a паралельна площині α. Пряма b перетинає пряму a. З'ясувати взаємне розміщення прямої b і площини α.

7. Через дану точку провести площину, паралельну даній прямій.

8. Пряма a перетинає площину α. Пряма b паралельна цій площині. З'ясувати взаємне розміщення прямих a і b.

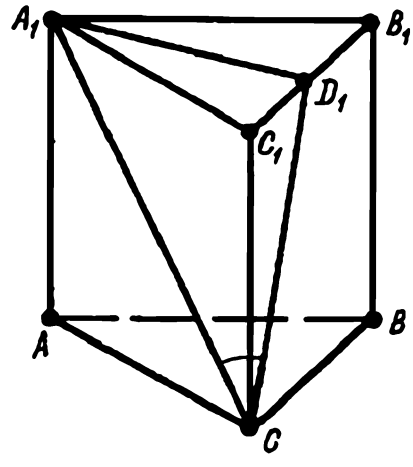


Рис. 17.26

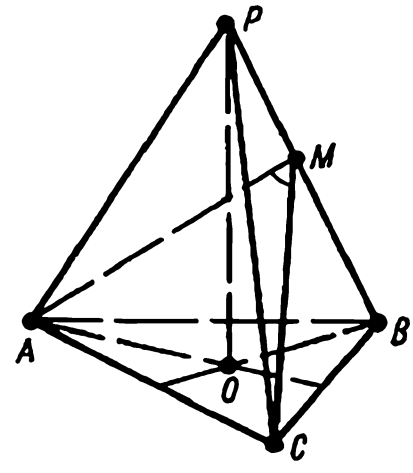


Рис. 17.27

9. Побудувати переріз трикутної піраміди $ABCD$ площиною, яка проходить через середини ребер AD і CD і точку на ребрі BC.

10. Через точку поза даною площиною провести площину, паралельну даній.

11. Пряма a паралельна площині α. Провести через пряму a площину $\beta \parallel \alpha$.

12. Площина α паралельна площині γ, площина β паралельна площині γ. Довести, що $\alpha \parallel \beta$.

13. Знайти г. м. т., рівновіддалених від даної площини.

14. Площини α і β паралельні. Довести, що коли пряма a перетинає площину α, то вона перетинає і площину β.

15. Якщо площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й іншу. Довести.

16. Проекцією яких фігур може бути точка?

17. Проекцією яких фігур може бути відрізок?

18. Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням правильного трикутника ABC. M_1 — зображення точки M, взятої на стороні BC. Зобразити перпендикуляри, проведені з точки M до сторін AB та AC і до медіани CD.

19. Які правильні многокутники можуть бути перерізами куба?

20. Побудувати кут між діагоналлю A_1D грані AA_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і площиною BB_1D_1D.

21. Всі ребра правильної чотирикутної піраміди рівні між собою. Зобразити лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі піраміди.

§ 3. Перпендикулярність прямих і площин

3.1. З появою в стереометрії мимобіжних прямих виникає питання: *як визначити кут між двома мимобіжними прямими*?

Нехай прямі a і b мимобіжні (рис. 17.28). Виберемо на прямій a довільну точку A. Проведемо через неї пряму $b' \parallel b$. Кут між прямими a та b' — це кут між мимобіжними прямими a і b. Зрозуміло, що величина цього кута не залежить від вибору точки A. Дійсно, виберемо на прямій a точку $A_1 \neq A$ і проведемо через неї пряму $b_1' \parallel b$. Оскільки $b' \parallel b$ і $b_1' \parallel b$, то $b_1' \parallel b'$. Прямі b' та b_1' утворюють з прямою a однакові кути.

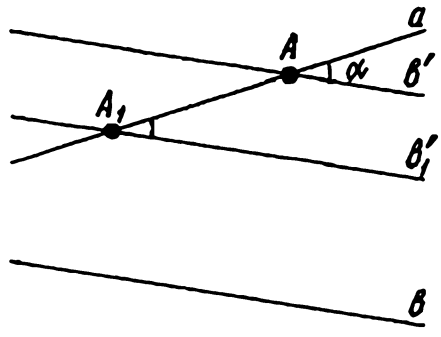


Рис. 17.28

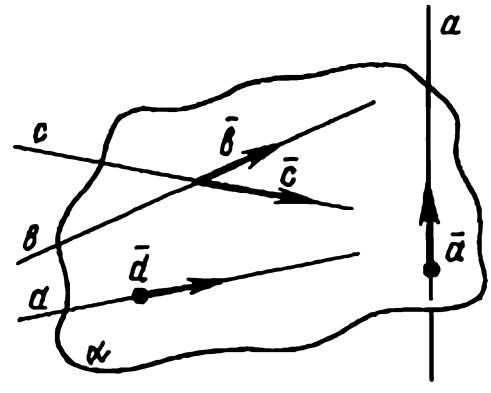


Рис. 17.29

Кутом між двома мимобіжними прямими називається *кут між двома прямими*, що перетинаються і відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

Дві прямі в просторі називаються *перпендикулярними*, якщо вони утворюють прямий кут. На рис. 17.8 зображено прямий куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Мимобіжні прямі A_1D_1 та CD перпендикулярні. Дійсно, $A_1D_1 \perp C_1D_1$, а $C_1D_1 \parallel CD$.

Назвемо ще кілька пар мимобіжних перпендикулярних прямих: A_1D_1 і AB, A_1B_1 і BC, A_1B_1 і AD, B_1C_1 і AB.

Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини.

Теорема 1 (ознака перпендикулярності прямої і площини). *Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.*

* Нехай b і c — дві прямі, що лежать у площині α і перетинаються (рис. 17.29), d — довільна пряма площини α, $a \perp b$, $a \perp c$. Вибираємо на цих прямих вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, як показано на рис. 17.29. Оскільки вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні, то $\vec{d} = x\vec{b} + y\vec{c}$, де x і y — деякі числа. Крім того, зауважимо, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, бо $\vec{a} \perp \vec{b}$ і $\vec{a} \perp \vec{c}$. Тепер маємо $\vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{a}\left(x\vec{b} + y\vec{c}\right) = x\vec{a} \cdot \vec{b} + y\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, отже, $\vec{a} \perp d$, і $a \perp \alpha$, що й треба було довести. *

Сформулюємо деякі теореми, які виявляють зв'язок між паралельністю і перпендикулярністю у просторі.

Теорема 2. *Площина, перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна і до другої.*

Теорема 3. *Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні між собою.*

Теорема 4. *Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.*

Теорема 5. *Дві площини, перпендикулярні до однієї прямої, паралельні між собою.*

Доведіть ці теореми самостійно, використовуючи таку властивість: якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ колінеарні і $\vec{a} \perp \vec{c}$, то $\vec{b} \perp \vec{c}$.

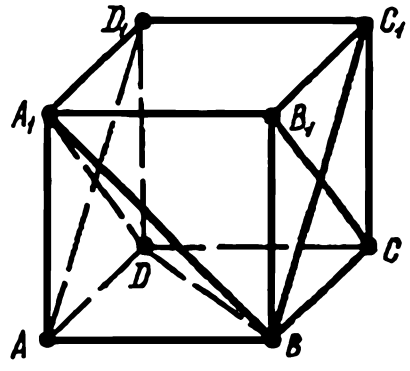


Рис. 17.30

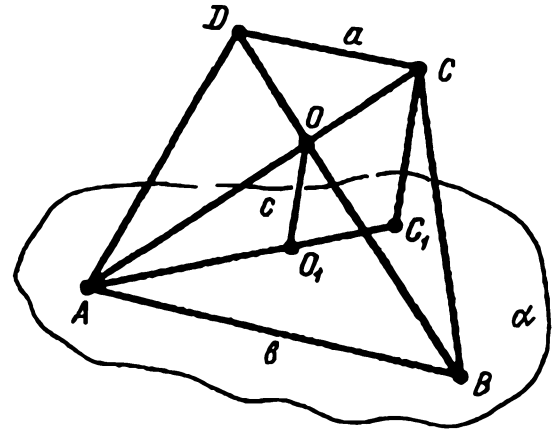


Рис. 17.31

Задачі

1. Дано куб $ABCDD_1C_1B_1A_1$. Знайти кут між прямими: а) B_1C і D_1A; б) B_1C і A_1B.

* а) $C_1B \parallel D_1A$ (рис. 17.30). Оскільки $B_1C \perp C_1B$, то $B_1C \perp D_1A$; б) $A_1D \parallel B_1C$, маємо ΔA_1BD — рівносторонній, бо відрізки A_1B, BD, A_1D — діагоналі рівних квадратів. Отже, кут між прямими A_1B і A_1D дорівнює 60°. Він дорівнює куту між мимобіжними прямими B_1C та A_1B. Відповідь: а) 90°; б) 60°. *

2. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a < b$). Відстань між точкою перетину діагоналей трапеції і площиною α, яка проходить через більшу основу, дорівнює c. Знайти відстань від меншої основи трапеції до цієї площини.

* Проведемо перпендикуляри OO_1 та CC_1 з точок O і C до площини α (рис. 17.31), $O = AC \cap BD$. Маємо

$\Delta AOB \sim \Delta COD$, звідки $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{a}{b}$.

$\Delta ACC_1 \sim \Delta AOO_1$, звідки $\dfrac{CC_1}{OO_1} = \dfrac{AC}{AO} = \dfrac{a+b}{b}$.

Отже, $CC_1 = OO_1 \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c(a+b)}{b}$. Відповідь: $\dfrac{c(a+b)}{b}$. *

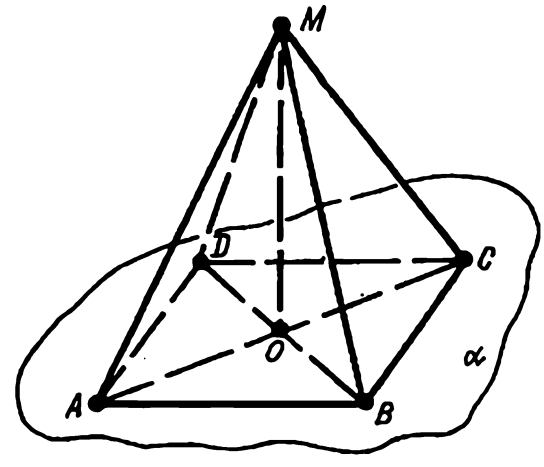


Рис. 17.32

3. Маємо O — центр прямокутника $ABCD$. Точка M однаково віддалена від усіх вершин прямокутника. Довести, що пряма MO перпендикулярна до площини прямокутника (рис. 17.32).

* ΔAMC — рівнобедрений, отже, $MO \perp AC$, ΔDMB — рівнобедрений, отже, $MO \perp DB$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини дістаємо: $MO \perp ABCD$. *

3.2. *Перпендикуляром, проведеним з даної точки до даної площини,* називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної площини, що сполучає дану точку з точкою площини. Нехай AO — перпендикуляр до площини α (рис. 17.33), O — основа перпендикуляра. Довжина цього перпендикуляра AO називається відстанню від точки A до площини α. Відрізок, що сполучає точку A з будь-якою точкою площини, відмінною від O, називається похилою (AB — похила, B — основа похилої, BO — проекція похилої на площину α, тобто $BO = \text{Пр}_\alpha AB$).

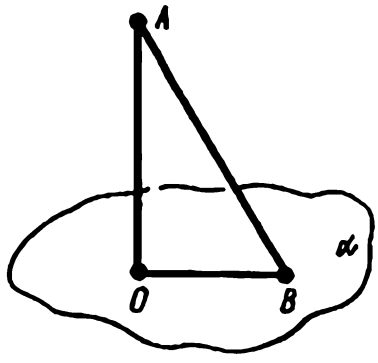


Рис. 17.33

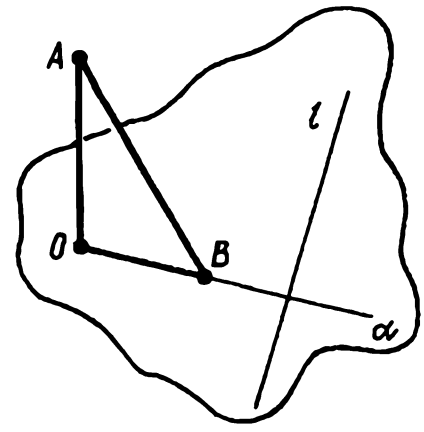


Рис. 17.34

Теорема 1. *Якщо з однієї точки поза площиною проведені до неї перпендикуляр і похилі, то:*

1) *довжина перпендикуляра менша довжини будь-якої похилої;*

2) *похилі з рівними проекціями рівні;*

3) *з двох похилих більшу довжину має та, яка має більшу проекцію.*

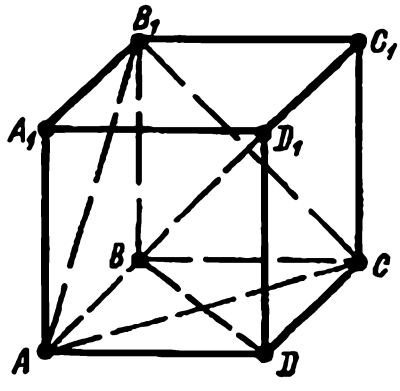


Рис. 17.35

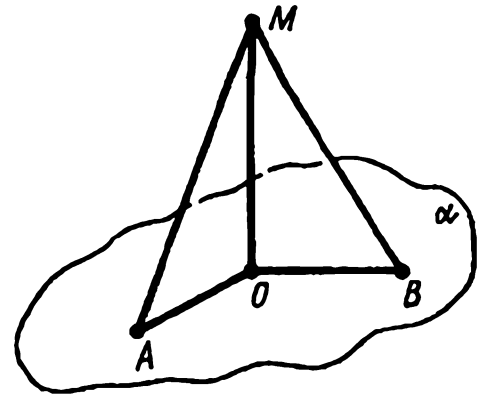


Рис. 17.36

Теорема 2 (про три перпендикуляри). *Для того щоб пряма на площині була перпендикулярна до похилої, необхідно і достатньо, щоб ця пряма була перпендикулярна до ортогональної проекції похилої на площину.*

* Необхідність. Нехай $l \subset \alpha$ і $l \perp AB$ (рис. 17.34). Оскільки $l \perp AO$, бо $AO \perp \alpha$, то $l \perp AOB$ за ознакою взаємної перпендикулярності прямої і площини; отже, $l \perp OB$.

Достатність. Нехай $l \subset \alpha$ і $l \perp OB$. Враховуючи, що $l \perp AO$, маємо $l \perp AOB$; отже, $l \perp AB$. *

Задачі

1. Довести, що діагональ BD_1 куба $ABCDD_1C_1B_1A_1$ перпендикулярна до площини AB_1C.

* На рис. 17.35 показано куб, $BD = \text{Пр}_{ABC}BD_1$, $BD \perp AC$. За теоремою про три перпендикуляри $BD_1 \perp AC$. Аналогічно доведемо, що $BD_1 \perp B_1C$.

За ознакою перпендикулярності прямої і площини $BD_1 \perp AB_1C$. *

2. З точки до площини проведено дві похилі, рівні 13 і 15 см. Різниця проекцій цих похилих дорівнює 4 см. Знайти проекції похилих і відстань від точки до площини.

* Нехай MA і MB — похилі, проведені з точки M до площини α (рис. 17.36). За умовою $MA = 13$ см, $MB = 15$ см, $O = \text{Пр}_\alpha M$. Нехай $AO = x$, тоді $BO = x + 4$, бо більшій похилій відповідає

більша проекція: $MO^2 = MA^2 - AO^2 = MB^2 - BO^2$. звідки $13^2 - x^2 = 15^2 - (x+4)^2$. $x = 5$. Отже, $AO = 5$ см. $BO = 9$ см. $MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см. Відповідь: 5, 9 і 12 см. *

3. Всі ребра трикутної піраміди мають довжину a. Знайти довжину проекції бічного ребра піраміди на площину основи піраміди.

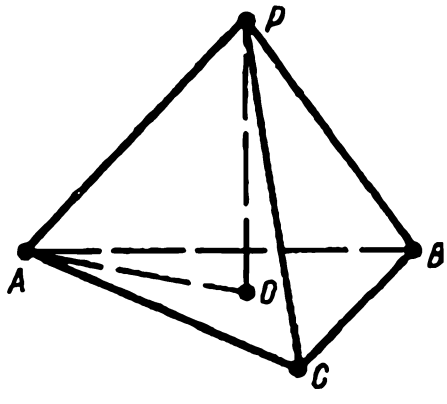


Рис. 17.37

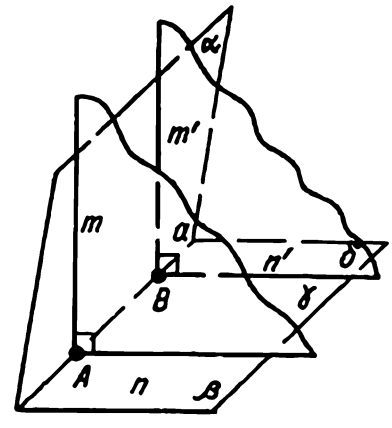


Рис. 17.38

* Нехай PO — висота піраміди (рис. 17.37). Оскільки $PA = PB = PC$. O — центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, тому $\text{Пр}_{ABC}PA = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Відповідь: $\frac{a}{\sqrt{3}}$. *

3.3. Нехай пряма a є *лінією перетину площин* α і β (рис. 17.38). Площина γ, перпендикулярна до прямої a, перетинає площини α і β по прямих m і n, що взаємно перпендикулярні, тобто $\gamma \cap \alpha = m$, $\gamma \cap \beta = n$ і $m \perp n$. Такі площини α і β називаються *взаємно перпендикулярними*. Це означення не залежить від площини γ. Дійсно, якщо провести іншу площину δ, перпендикулярну до прямої a, то $\delta \parallel \gamma$.

Нехай $\delta \cap \alpha = m'$, $\delta \cap \beta = n'$. За теоремою про сліди $m' \parallel m$ і $n' \parallel n$. Кут, утворений прямими m', n', і кут, утворений прямими m, n, рівні як кути з відповідно паралельними і однаково напрямленими сторонами.

Теорема 1 (ознака взаємної перпендикулярності двох площин). *Нехай* $a \perp \alpha$ *і* $a \subset \beta$, *тоді* $\beta \perp \alpha$. *Тобто, якщо площина* β *містить пряму* a, *перпендикулярну площині* α, *то площини* α *і* β *перпендикулярні.*

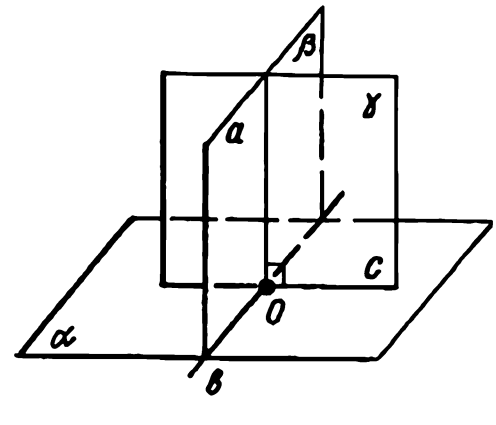


Рис. 17.39

* Нехай $a \perp \alpha$, $a \subset \beta$ і $\alpha \cap \beta = b$ (рис. 17.39), c — пряма, що лежить у площині α, перпендикулярна до прямої b і проходить через точку O перетину прямої a з площиною α. Через прямі a і c проведемо площину γ. Маємо $\gamma \perp b$, бо $a \perp b$ і $c \perp b$. Оскільки $a \perp c$, то за означенням $\beta \perp \alpha$. *

Теорема 2. *Нехай* $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, $b \perp a$ і $b \subset \beta$, *тоді* $b \perp \alpha$. *Тобто пряма* b, *що лежить в одній із взаємно перпендикулярних площин* β *та перпендикулярна до лінії перетину* a *цих площин, перпендикулярна і до другої площини* α.

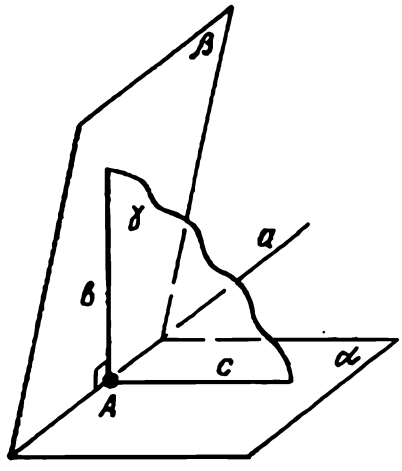


Рис. 17.40

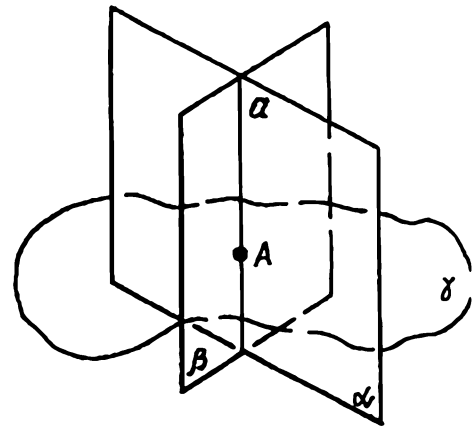


Рис. 17.41

* Нехай $b \cap a = A$ (рис. 17.40), $a = \alpha \cap \beta$ і $\beta \perp \alpha$. У площині α проведемо пряму c через точку A перпендикулярно до прямої a. Проведемо площину γ через прямі b і c. Маємо $\gamma \perp a$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини. Оскільки $\alpha \perp \beta$, то $b \perp c$, отже $b \perp a$ і $b \perp c$, звідки випливає, що $b \perp \alpha$. *

Теорема 3. *Якщо площини α і β взаємно перпендикулярні і до площини α проведено перпендикуляр, що має спільну точку з площиною β, то цей перпендикуляр лежить у площині β.*

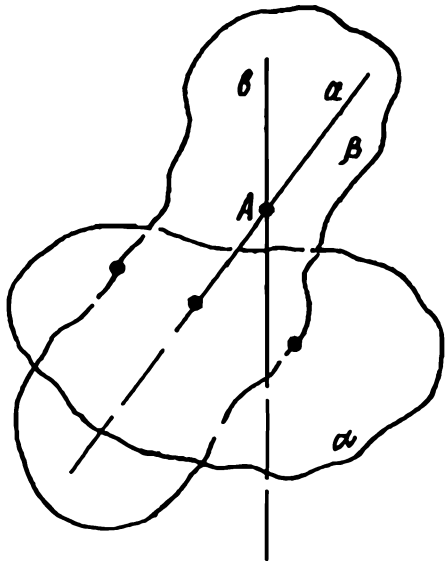


Рис. 17.42

Теорема 4. *Нехай площини α і β перпендикулярні до площини γ і перетинаються по прямій a, тоді $a \perp \gamma$.*

* На прямій a виберемо довільну точку A (рис. 17.41). Проведемо через точку A перпендикуляр до площини γ. За теоремою 3 цей перпендикуляр лежить у кожній з площин α, β, отже, він лежить на лінії їх перетину. *

Задачі

1. Дано площину α і пряму a. Провести через дану пряму a площину, перпендикулярну до даної площини α.

* Якщо $a \perp \alpha$, то будь-яка площина, яка містить пряму a, перпендикулярна до площини α. Нехай пряма a не перпендикулярна до площини α (рис. 17.42). Виберемо на прямій a довільну точку A. Проведемо через точку A пряму b, перпендикулярну до площини α. Через прямі a і b проведемо площину β. Площини β і α взаємно перпендикулярні за ознакою перпендикулярності площин. *

2. Точка віддалена відповідно на 7 і 1 см від двох взаємно перпендикулярних площин. Знайти відстань від цієї точки до лінії їх перетину.

* Нехай $\alpha \perp \beta$ (рис. 17.43), $AB \perp \alpha$, $AC \perp \beta$, γ — площина, яка проходить через прямі AB і AC. $\alpha \cap \beta = a$. Зрозуміло, що $a \perp \gamma$ і $\angle CDB = 90°$ ($D = \gamma \cap a$). Помітимо, що $ABDC$ — прямокутник, отже, $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$. Відповідь: $5\sqrt{2}$ см.

3. Прямокутник $ABCD$ має сторони 15 і 20 см. Його зігнуто по діагоналі AC так, щоб площини ABC та ADC стали взаємно перпендикулярними. Знайдіть довжину відрізка BD після цього.

* На рис. 17.44 показано прямокутник $ABCD$ після того, як його було зігнуто. $AB = 20$, $CB = 25$. Зауважимо, що $\angle ABC = 90°$, і проведемо висоту BE в ΔABC. Маємо $BE = \frac{AB \cdot CB}{AC} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12$. З ΔBCE маємо $CE^2 = BC^2 - BE^2 = 15^2 - 12^2 = 81$, $CE = 9$. З ΔDCE за теоремою косинусів

$$DE^2 = EC^2 + DC^2 - 2EC \cdot DC \cos\angle ACD = 81 + 400 - 2 \cdot 9 \cdot 20 \cdot \frac{20}{25} = 193.$$

Оскільки $BE \perp ADC$, то $\angle BED = 90°$. З ΔDBE маємо $DB^2 = DE^2 + BE^2 = 193 + 144 = 337$; $DB = \sqrt{337}$. Відповідь: $\sqrt{337}$ см.

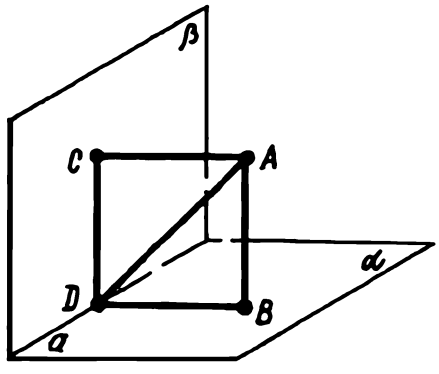


Рис. 17.43

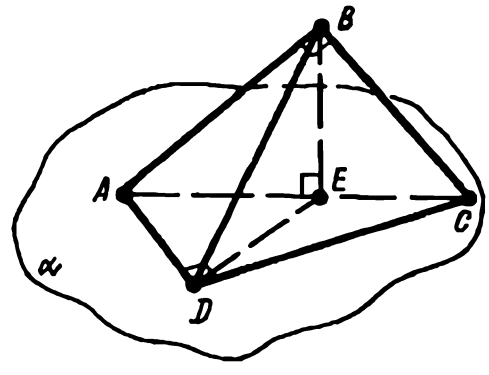


Рис. 17.44

3.4. *Спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих* називається відрізок з кінцями на цих прямих, що перпендикулярний до кожної з цих прямих.

Теорема. *Дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр і до того ж тільки один.*

* Нехай a і b — мимобіжні прямі (рис. 17.45). Через пряму b проведено площину α, паралельну прямій a, а через пряму a — площину β, перпендикулярну до площини α. Нехай $\alpha \cap \beta = c$. За теоремою про слід $c \parallel a$ (див. п. 2.2). Нехай $c \cap b = A$. У площині β проводимо перпендикуляр AB до прямої a. Помітимо, що AB — спільний перпендикуляр прямих a і b. Дійсно, за теоремою 2 з п. 3.3 маємо $AB \perp \alpha$, отже, $AB \perp b$. Крім того, $AB \perp a$ за побудовою. Нехай CD — відрізок з кінцями на даних прямих a і b ($C \in a$, $D \in b$), $C_1 = \text{Пр}_\alpha C$. Оскільки $a \parallel \alpha$, то $C_1 \in c$ і $CC_1 = BA$. Крім того, $CC_1 \parallel BA$, отже, $CC_1 \perp \alpha$. Бачимо, що $CD > CC_1 = AB$, тобто AB — найкоротша відстань між точками прямих a і b. Ця відстань дорівнює відстані між прямою a і площиною α. Раніше було доведено, що пара мимобіжних прямих визначає єдину пару паралельних площин. Згадана відстань саме і є відстанню між цими площинами. *

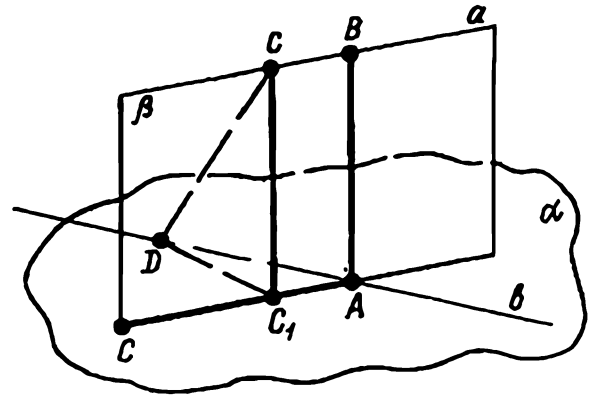


Рис. 17.45

Задачі

1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Побудувати спільний перпендикуляр до прямих AA_1 і BD та знайти його довжину.

* Площина ACC_1A_1 перпендикулярна до прямої BD, бо $AC \perp BD$ і $AA_1 \perp BD$ (рис. 17.46), $AC \cap BD = O$, AO — спільний перпендикуляр до прямих AA_1 і BD. Оскільки $AC = a\sqrt{2}$, то $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. *

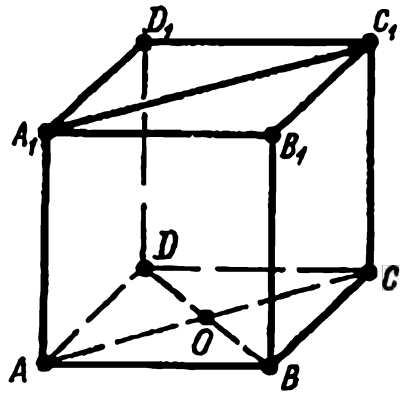


Рис. 17.46

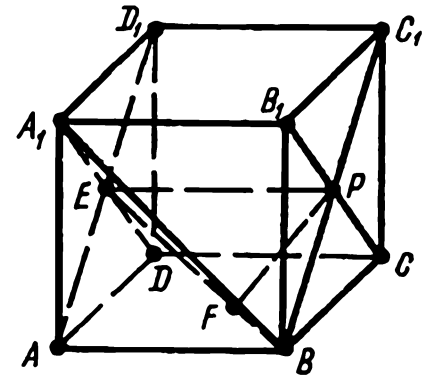


Рис. 17.47

2. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Знайти найкоротшу відстань між прямими A_1B і B_1C.

* Площина ABC_1D_1 перпендикулярна до прямої B_1C (рис. 17.47), бо $C_1B \perp B_1C$ і $AB \perp B_1C$. $\text{Пр}_{ABC_1D_1} B_1C = P$, $\text{Пр}_{ABC_1D_1} A_1B = BE$.

Отже, шукана відстань — це відстань між точкою P і прямою BE. Оскільки $\angle BPE = 90°$, шукана відстань PF — це висота ΔBPE; $PF = \frac{PB \cdot PE}{BE} = \frac{a}{\sqrt{2}} a \frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot 2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Відповідь: $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Зауважимо, що відрізок PF не є спільним перпендикуляром мимобіжних прямих B_1C і A_1B.

3.5. *Кутом між похилою і площиною* називається кут між похилою та її ортогональною проекцією на площину. На рис. 17.48 показано похилу AB, $OB = \text{Пр}_\alpha AB$, $\angle ABO$ — кут між похилою AB і площиною α. Якщо пряма паралельна площині, то кут між ними за означенням дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90°. Якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0° \le \varphi \le 90°$. Проведемо в площині α довільну пряму l через точку B так, щоб $OC \perp l$. За теоремою про три перпендикуляри $AC \perp l$. Нехай $\angle ABO = \beta$, $\angle OBC = \gamma$, $\angle ABC = \varphi$. Розглядаючи прямокутні трикутники ABO, OBC, ACB, маємо

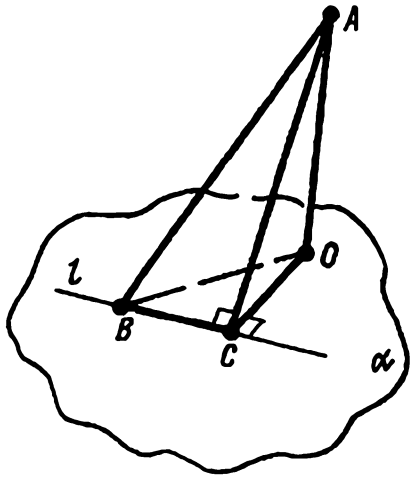


Рис. 17.48

$$\cos\beta = \frac{OB}{AB}, \quad \cos\gamma = \frac{BC}{OB}, \quad \cos\varphi = \frac{BC}{AB}.$$

Помітимо, що $\frac{BC}{AB} = \frac{OB}{AB}\frac{BC}{OB}$ або $\cos\varphi = \cos\beta\cos\gamma$.

Ми дістали формулу трьох косинусів. Зверніть увагу на те, що площини кутів β і γ взаємно перпендикулярні.

Зауваження. Оскільки кути φ, β і γ нетупі, із формули трьох косинусів випливає, що $\cos\beta > \cos\varphi$ і $0° < \beta < \varphi$.

Висновок: кут β між похилою і її ортогональною проекцією на площину є найменшим з кутів, утворених похилою з прямими площини α.

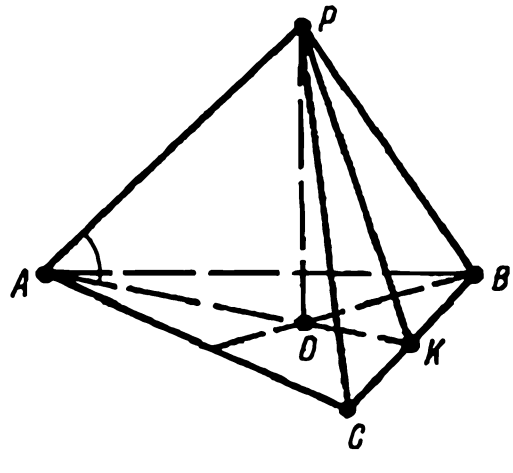


Рис. 17.49

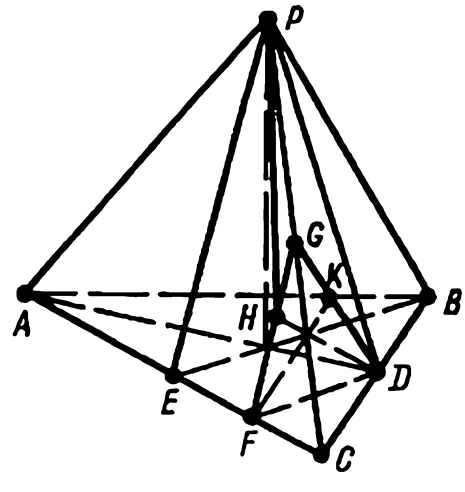


Рис. 17.50

Задачі

1. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи трикутної піраміди, якщо всі її ребра рівні.

* PO — висота правильної трикутної піраміди $PABC$ (рис. 17.49). Нехай $PA = PB = PC = a$, тоді $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$. З прямокутного трикутника PAO маємо $\cos\angle PAO = \frac{AO}{AP} = \frac{a}{\sqrt{3}} : a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Відповідь: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Знайти кут між апофемою бічної грані і сусідньою бічною гранню трикутної піраміди, всі ребра якої рівні (апофемою бічної грані піраміди називається висота цієї грані, проведена з вершини піраміди).

* На рис. 17.50 показано трикутну піраміду $PABC$ з рівними ребрами, PD — апофема бічної грані PBC. Спроектуємо точку D на грань PAC. Проведемо відрізки $DF \parallel BE$ і $FG \parallel EP$ (BE — висота ΔABC). Площина PBE перпендикулярна до прямої AC, бо $PE \perp AC$ і $BE \perp AC$. Площина DFG паралельна площині BEP, бо $DF \parallel BE$ і $FG \parallel EP$, отже, площина $DFG \perp AC$: DH — висота ΔDFG. Отже, $H = \text{Пр}_{APC}D$; $\angle DPH$ —це шуканий кут між апофемою PD і бічною гранню PAC. Нехай $AB = a$, $FD = \frac{1}{2}BE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = FG$, $DG = \frac{a}{2}$. Нехай FK — висота ΔFGD, $FK = \sqrt{FD^2 - KD^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a}{\sqrt{8}}$. Із ΔFGD маємо $DH \cdot FG = FK \cdot DG$, звідки $DH = \frac{FK \cdot DG}{FG} = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Із прямокутного трикутника DPH маємо $\sin\angle DPH = \frac{DH}{DP} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Відповідь: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. *

3. З точки M поза площиною α проведені до неї дві взаємно перпендикулярні похилі MA і MB, що утворюють з площиною α кути 30 і 45°. Знайти кут між площиною α і перпендикуляром, проведеним з точки M до прямої AB.

* MO — перпендикуляр до площини α (рис. 17.51). Нехай $MO = h$, тоді $MA = 2h$, $MB = h\sqrt{2}$; MC — висота прямокутного трикутника AMB, $MC = \frac{MA \cdot MB}{AB} = \frac{2h \cdot h\sqrt{2}}{h\sqrt{6}} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$. З прямокутного трикутника MOC маємо $\sin\angle MCO = \frac{MO}{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, отже, $\angle MCO = 60°$. Відповідь: 60°. *

3.6. Пряма, що лежить у площині, розділяє її на дві півплощини. Дві півплощини, які виходять з однієї прямої, утворюють *двогранний кут*. Півплощини α і β, що

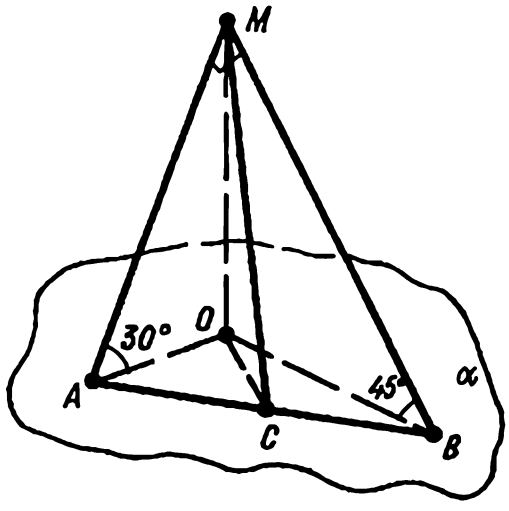


Рис. 17.51

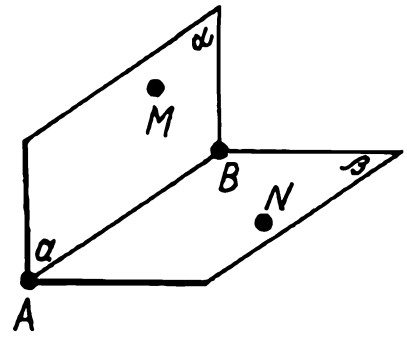


Рис. 17.52

утворюють двогранний кут, називаються його *гранями* (рис. 17.52). Спільна пряма його граней називається *ребром* двогранного кута. Нехай точки A, B взято на ребрі двогранного кута. Двогранний кут позначається двома буквами: кут AB. Іноді двогранний кут позначається чотирма буквами, з яких дві середні позначають точки ребра, а дві крайні — точки, взяті в гранях. Нехай $M \in \alpha$, $N \in \beta$ (рис. 17.52), тоді двогранний кут позначається так: кут $MABN$. Виберемо на ребрі AP двогранного кута довільну точку C і проведемо через неї площину α перпендикулярно до ребра AP (рис. 17.53). Площина α перетинає грані двогранного кута на променях a, b, які утворюють деякий кут величиною φ. Цей кут називається *лінійним кутом двогранного кута*. Легко довести, що величина лінійного кута не залежить від вибору

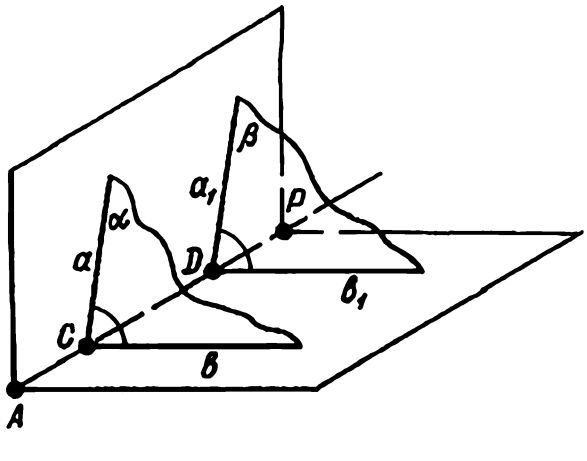


Рис. 17.53

точки C на ребрі AP. Візьмемо на ребрі AP точку D і проведемо через неї площину $\beta \perp AP$. Зрозуміло, що $\beta \parallel \alpha$. Нехай площина β перетинає грані двогранного кута по променях a_1, b_1. Згідно з теоремою про сліди $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (див. п. 2.3), тому одержані в перетині кути рівні. Величина двогранного кута дорівнює величині його лінійного кута. Якщо φ — величина двогранного кута, то $0° < \varphi < 180°$.

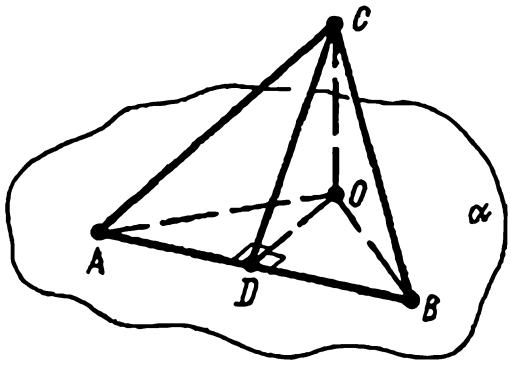


Рис. 17.54

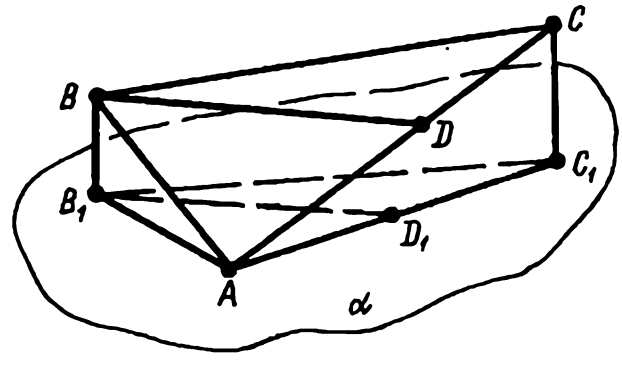


Рис. 17.55

При перетині двох площин утворюються чотири двогранних кути. Величина меншого з цих двогранних кутів називається *кутом між цими площинами*. Якщо площини паралельні, то кут між ними дорівнює 0° за означенням. Якщо φ — величина кута між двома площинами, то $0° \le \varphi \le 90°$.

3.7. Паралельне проектування, при якому проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій, називається *ортогональним проектуванням*. У багатьох випадках раніше ми розглядали саме ортогональне проектування.

Теорема. *Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекцій*:

$$S_{\text{пр}} = S \cos \varphi.$$

* Зауважимо, що проекції фігури на будь-яку з паралельних площин рівні, бо можуть бути суміщені паралельним переміщенням у напрямку проектування.

Тепер розглянемо теорему для випадку, коли проектується трикутник.

1-й випадок. Площина проекцій проходить через сторону трикутника (рис. 17.54), $\text{Пр}_\alpha(\Delta ABC) = \Delta ABO$, CD — висота ΔABC. За теоремою про три перпендикуляри $OD \perp AB$, тобто OD — висота ΔABO. Площина CDO перпендикулярна прямій AB, тому $\angle CDO$ — лінійний кут двогранного кута AB. Нехай $\angle CDO = \varphi$, тоді $OD = CD \cos \varphi$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot OD = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos\varphi = S_{\Delta ABC} \cos \varphi$, що й треба було довести.

Якщо сторона AB не лежить в площині проекцій, але паралельна їй, доведення аналогічне.

2-й випадок. Жодна сторона ΔABC не паралельна площині проекцій (рис. 17.55). Проведемо відрізок BD паралельно площині проекцій. Тоді в кожному з трикутників ABD і BCD є сторона BD, паралельна площині проекцій. Згідно з 1-м випадком маємо

$$S_{\Delta AB_1D_1} = S_{\Delta ABD} \cos\varphi, \quad S_{\Delta B_1C_1D_1} = S_{\Delta BCD} \cos\varphi.$$

Додаючи почленно ці рівності, маємо

$$S_{\Delta AB_1C_1} = S_{\Delta ABC}\cos\varphi,$$

що й треба було довести. *

Якщо проектується многокутник, то розбиваємо його на трикутники і для кожного застосовуємо доведену теорему.

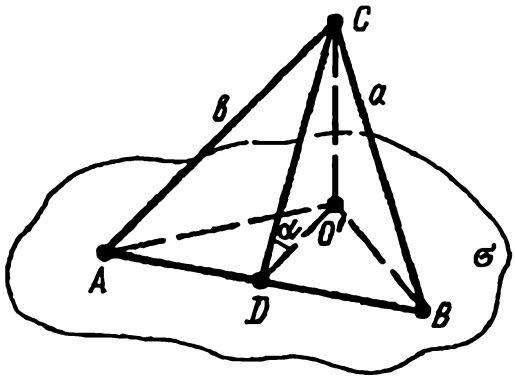


Рис. 17.56

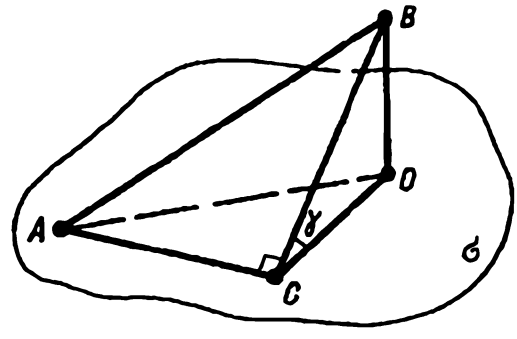


Рис. 17.57

Задачі

1. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють a і b. Площина σ проходить через гіпотенузу трикутника і утворює з його площиною кут α. Знайти відстань від вершини прямого кута до площини σ.

* Нехай $O' = \text{Пр}_\sigma C$ (рис. 17.56), CD — висота. За теоремою про три перпендикуляри $O'D \perp AB$. $\angle CDO'$ — лінійний кут двогранного кута AB. За умовою $\angle CDO' = \alpha$. $CD = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. З прямокутного трикутника CDO' знаходимо: $CO' = CD\sin\alpha = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Відповідь: $\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$. *

2. Через катет AC ($\angle C = 90°$) проведено площину σ, яка утворює з площиною ΔABC кут γ. Знайти відстань від вершини B до площини σ, якщо $AB = c$, $AC = b$.

* Нехай $O = \text{Пр}_\sigma B$ (рис. 17.57). Оскільки $BC \perp AC$, то за теоремою про три перпендикуляри $OC \perp AC$ і $\angle BCO$ — лінійний кут двогранного кута AC. Згідно з умовою $\angle BCO = \gamma$. З ΔABC маємо $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$. З ΔBCO маємо $BO = BC\sin\gamma = \sqrt{c^2 - b^2}\sin\gamma$. Відповідь: $\sqrt{c^2 - b^2}\sin\gamma$. *

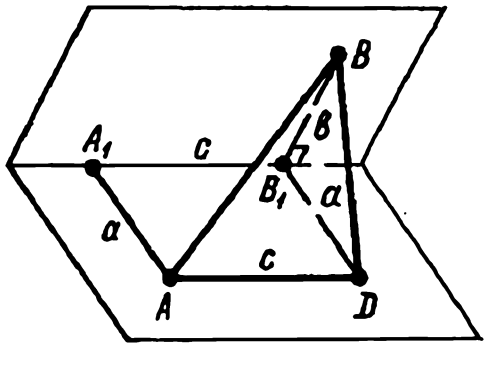


Рис. 17.58

3. Кінці відрізка AB належать граням двогранного кута величиною φ. Відстані AA_1 і BB_1 від точок A і B до ребра двогранного кута відповідно рівні a і b, $A_1B_1 = c$. Знайти AB.

* Побудуємо відрізок B_1D, рівний і паралельний відрізку AA_1 (рис. 17.58). Тоді маємо $BB_1 \perp A_1B_1$ і $DB_1 \perp A_1B_1$, тому $\angle BB_1D$ — лінійний кут двогранного кута і $\angle BB_1D = \varphi$. З ΔBB_1D за теоремою косинусів маємо $BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$. Відрізок AD перпендикулярний до площини B_1BD, тому $\angle BDA = 90°$. З ΔABD маємо $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi + c^2$. Відповідь: шуканий відрізок $AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\varphi}$. *

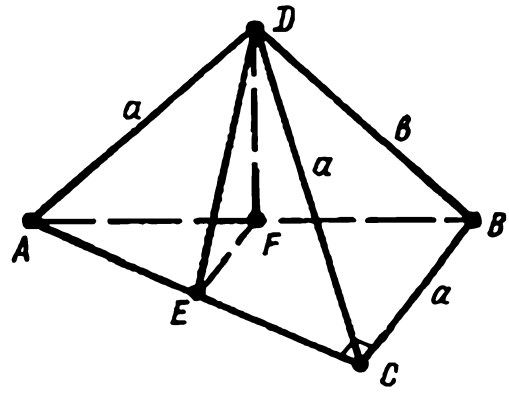


Рис. 17.59

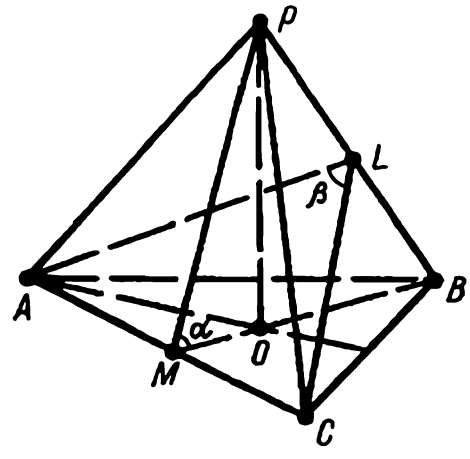


Рис. 17.60

4. У трикутній піраміді $DABC$ грань ACD — правильний трикутник із стороною a, грань ABC — рівнобедрений прямокутний трикутник ($\angle ACB = 90°$). Відомо, що $BD = b$. Знайти величину двогранного кута AC.

* На рис. 17.59 показано піраміду $DABC$. E — середина ребра AC, EF — середня лінія ΔABC. Помітимо, що $EF \perp AC$, $DE \perp AC$, отже, $\angle DEF$ — лінійний кут двогранного кута AC, тоді $EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$. $DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $AB = a\sqrt{2}$. Оскільки DF — медіана ΔABD, то $DF^2 =$

$= \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}b^2$. Тепер із ΔDEF за теоремою косинусів маємо

$$\cos\angle DEF = \frac{DE^2 + EF^2 - DF^2}{2DE \cdot EF} = \frac{2a^2 - b^2}{a^2\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $\arccos = \frac{2a^2 - b^2}{a^2\sqrt{3}}$. *

5. Двогранний кут при ребрі основи правильної трикутної піраміди дорівнює α, а двогранний кут при її бічному ребрі β. Довести, що $3\cos^2\alpha + 2\cos\beta = 1$.

* На рис. 17.60 показано правильну трикутну піраміду $PABC$. Нехай площа основи піраміди дорівнює S, площа бічної грані S_1. Проектуючи бічні грані на площину основи і користуючись теоремою про площу проекції, маємо $S = 3S_1\cos\alpha$. Проектуючи піраміду на бічну грань PBC піраміди, маємо $S_1 = 2S_1\cos\beta + S\cos\alpha$.

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} S = 3S_1\cos\alpha, \\ S_1 = 2S_1\cos\beta + S\cos\alpha, \end{cases}$$

дістаємо $3\cos^2\alpha + 2\cos\beta = 1$, що й треба було довести. *

Вправи

1. Довести, що мимобіжні ребра правильної трикутної піраміди взаємно перпендикулярні.

2. Дано $PABCD$ — правильна чотирикутна піраміда. Довести, що $PA \perp BD$.

3. Дано $PA_1A_2...A_n$ — правильна n-кутна піраміда. Довести, що $PA_1 \perp A_2A_n$.

4. Вершина A_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ рівновіддалена від вершин A, B, C, а ΔABC — правильний. Довести, що $AA_1 \perp BC$.

5. Всі ребра правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ рівні між собою. Знайти кут між прямими AC_1 і CB_1.

6. Через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної площини.

7. Через дану точку провести площину, перпендикулярну до даної прямої.

8. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро $2a$. Знайти довжину проекції бічного ребра на площину бічної грані.

9. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайти найкоротшу відстань між ребрами A_1B_1 і BC.

10. У трикутній піраміді $DABC$ всі ребра рівні a. Побудувати спільний перпендикуляр прямих AD і BC і знайти його довжину.

11. Дві площини взаємно перпендикулярні. Кінці відрізка лежать на цих площинах і віддалені від лінії l їх перетину на відстані h_1 і h_2. Знайти найкоротшу відстань між цим відрізком та прямою l.

12. З вершини A прямокутника $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр AP. Знайти відстань між прямими PA і BD, якщо сторони прямокутника рівні a і b.

13. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра CD. Знайти найкоротшу відстань між прямими BD і D_1K, якщо ребро куба дорівнює a.

14. Який кут утворює діагональ куба з його гранню?

15. Відрізок має довжину a. Кінці його віддалені від площини на відстані b і c. Знайти кут між прямою, що містить цей відрізок, і площиною (розглянути два випадки).

16. З точки M поза площиною α проведено до неї похилі MA та MB, причому $MA \perp MB$. Ці похилі утворюють з площиною α кути β і γ відповідно. Знайти кут між площиною α і перпендикуляром, проведеним з точки M на пряму AB.

17. Точка M віддалена від площини β на відстань h. З точки M проведено до цієї площини дві взаємно перпендикулярні похилі MA і MB, що утворюють з площиною β рівні кути α. Знайти AB.

18. Катет прямокутного трикутника дорівнює a і лежить у площині β. Другий катет дорівнює b і утворює з цією площиною кут α. Знайти кут між гіпотенузою прямокутного трикутника і площиною β.

19. Через основу рівнобедреного трикутника проведено площину. Довести, що бічні сторони трикутника утворюють з цією площиною рівні кути.

20. Пряма утворює із сторонами прямого кута рівні кути величиною α. Який кут утворює ця пряма з площиною прямого кута?

21. Відрізок AB паралельний площині σ. З його кінців проведено до площини похилі $AC = c$, $BD = d$. Похила AC утворює з площиною σ кут α. Знайти кут нахилу прямої BD до площини σ.

22. Точка M віддалена від площини α на відстань h. З точки M проведено до площини α дві похилі, що утворюють з нею кути 30 і 45°. Кут між проекціями цих похилих дорівнює 150°. Знайти відстань між основами похилих.

23. З точки, що віддалена від площини на відстань a, проведено дві похилі, що утворюють з площиною кути α і β, а між собою — кут γ. Знайти відстань між основами похилих.

24. Один катет рівнобедреного прямокутника лежить в площині α, а другий утворює з цією площиною кут 45°. Який кут утворює гіпотенуза з цією площиною?

25. Кінці відрізка $AB = 10$ см належать граням двогранного кута. Відстані AA_1 і BB_1 від кінців даного відрізка до ребра двогранного кута дорівнюють відповідно 5 і 6 см, $A_1B_1 = 8$ см. Знайти двогранний кут.

26. У трикутній піраміді $DABC$ дано: $AB = 14$, $DC = 8$, $AC = BC = AD = BD = 9$ см. Знайти двогранний кут при ребрі AB.

27. Сторона квадрата дорівнює 10 см. Його ортогональною проекцією на площину σ є ромб площею 50 см^2. Знайти кут між площиною σ і площиною квадрата.

28. Двогранний кут при ребрі основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює α, а при бічному ребрі β. Довести, що $\cos\beta + \cos^2\alpha = 0$.

29. Площу бічної поверхні правильної піраміди можна знайти за формулою $S_б = \dfrac{S}{\cos\varphi}$, де $S_б$ і S — відповідно площі бічної поверхні і основи піраміди, φ — двогранний кут при ребрі основи піраміди. Вивести цю формулу.

§ 4. Многогранники

4.1. Три промені із спільним початком, що не лежать в одній площині, утворюють *тригранний кут* (рис. 17.61). Спільний початок O цих променів називається *вершиною кута*. Промені називаються *ребрами*, плоскі кути при вершині тригранного кута називаються його *гранями*. Грані тригранного кута утворюють *двогранні кути*.

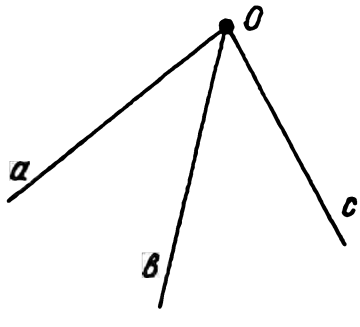


Рис. 17.61

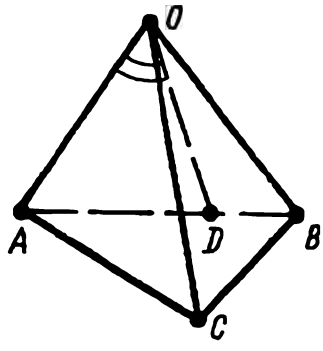


Рис. 17.62

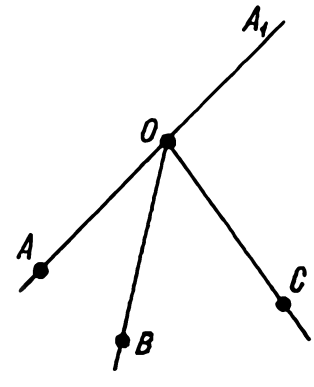


Рис. 17.63

Теорема 1. *Кожний плоский кут тригранного кута менший за суму двох інших його плоских кутів.*

* На одному з променів тригранного кута виберемо довільну точку A, а на другому — довільну точку B (рис. 17.62). Можна вважати, що плоский кут AOB найбільший з трьох його плоских кутів. Нехай $\angle AOB = \alpha$. Інші два плоскі кути нехай мають величини β і γ. На відрізку AB візьмемо точку D таку, що $\angle AOD = \beta$. На промені, відмінному від променів OA і OB, відкладемо відрізок $OC = OD$, причому $\angle AOC = \beta$, $\angle BOC = \gamma$, $\Delta AOC = \Delta AOD$. Звідси $AC = AD$. За властивістю трикутника $AC + BC > AB$ або $AC + BC > AD + BD$ звідки $BC > BD$, бо $AC = AD$. Трикутники OBC і OBD мають по дві рівні сторони. Тому проти більшої третьої сторони лежить більший кут, тобто $\angle BOC > \angle BOD$. Звідси випливає, що $\angle BOC + \angle AOC > \angle BOD + \angle AOD$ або $\gamma + \beta > \alpha$, що й треба було довести. *

Теорема 2. $\alpha + \beta + \gamma < 360°$. *Інакше, сума плоских кутів тригранного кута менша ніж* $360°$.

* На рис. 17.63 показано тригранний кут $AOBC$. Промінь OA_1 доповняльний відносно променя OA. Розглянемо тригранний кут OA_1BC. Якщо $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$, то $\angle A_1OB = 180° - \gamma$, $\angle A_1OC = 180° - \beta$. Згідно з теоремою 1 $\angle BOC < \angle A_1OB + \angle A_1OC$ або $\alpha < 180° - \gamma + 180° - \beta$, звідки $\alpha + \beta + \gamma < 360°$. *

Теорема 3 (теорема косинусів для тригранного кута):

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

де α, β, γ — *плоскі кути*, A — *двогранний кут, утворений площинами кутів* β *і* γ.

* На ребрах тригранного кута $OABC$ відкладемо одиничні вектори $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ (рис. 17.64). Нехай $\vec{OA} = \vec{e_1}$, $\vec{OB} = \vec{e_2}$, $\vec{OC} = \vec{e_3}$. На промені OA візьмемо точки M і N такі, що $MB \perp OA$ і $NC \perp OA$. Кут між векторами $\vec{NC}$ та $\vec{MB}$ дорівнює величині A

двогранного кута OA. Оскільки $|\vec{e_3}| = |\vec{e_2}| = 1$, то $NC = \sin\beta$, $MB = \sin\gamma$ (вважаємо, що $\angle BOC = \alpha$, $\angle MOB = \gamma$, $\angle NOC = \beta$); $\vec{ON} = \vec{e_1}\cos\beta$, $\vec{OM} = \vec{e_1}\cos\gamma$. Далі помітимо, що $\vec{e_3} = \vec{ON} + \vec{NC} = \vec{e_1}\cos\beta + \vec{NC}$, $\vec{e_2} = \vec{OM} + \vec{MB} = \vec{e_1}\cos\gamma + \vec{MB}$, тобто

$$\vec{e_3}\cdot\vec{e_2} = \cos\beta\cos\gamma\left(\vec{e_1}\right)^2 + \vec{NC}\cdot\vec{MB} \qquad (17.1)$$

(ми врахували, що $\vec{NC} \perp \vec{e_1}$ та $\vec{MB} \perp \vec{e_1}$ і $\vec{NC}\cdot\vec{e_1} = \vec{MB}\cdot\vec{e_1} = 0$).

З рівності (17.1) маємо

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

що й треба було довести. *

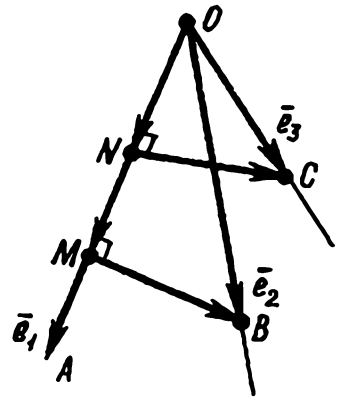


Рис. 17.64

Зауваження. За допомогою доведеної теореми можна обчислити величину двогранного кута, знаючи його плоскі кути:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Якщо грані плоских кутів взаємно перпендикулярні, дістаємо формулу трьох косинусів: $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$.

Кілька променів із спільним початком, з яких ніякі три не лежать в одній площині, утворюють *многогранний кут* (рис. 17.65). Плоскі кути при вершині кута називаються *гранями*, а самі промені — *ребрами* многогранного кута, точка O — *вершиною* многогранного кута. За числом граней многогранний кут називається тригранним, чотиригранним тощо. Якщо всі грані многогранного кута лежать по один бік від кожної з площин його граней, кут називається опуклим. Ми розглядатимемо тільки опуклі многогранні кути.

Теорема 4. *Кожний плоский кут многогранного кута менший від суми всіх інших його плоских кутів.*

Теорема 5. *Сума плоских кутів опуклого многогранника менша ніж* 360°.

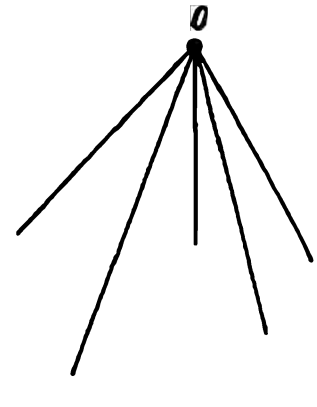


Рис. 17.65

Задачі

1. Два плоскі кути тригранного кута рівні 70 і 100°. Які значення може мати третій кут α?

* Оскільки сума двох плоских кутів більша за третій, то $70° + 100° > \alpha$, $170° > \alpha$. З іншого боку, третій кут має бути більшим за різницю двох інших кутів. Отже $\alpha > 100° - 70°$, $\alpha > 30°$. Відповідь: $30° < \alpha < 170°$. * Перевірте, що $\alpha + 70° + 100° < 360°$.

2. Сума плоских кутів тригранного кута дорівнює 180°. Довести, що ці кути гострі.

* Нехай α, β, γ — плоскі кути тригранного кута. За умовою $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Якщо один з кутів, наприклад α, не гострий, то $\alpha \geq 90°$; тоді $\beta + \gamma \leq 90° \leq \alpha$. Ми дійшли суперечності теоремі 1, тому ці кути гострі. *

3. Тригранний кут називається прямим, якщо всі його плоскі кути прямі. Довести, що у прямого тригранного кута всі двогранні кути прямі.

* На рис. 17.66 зображено прямий тригранний кут $OABC$. Розглянемо двогранний кут OA. Оскільки $OC \perp OA$ і $OB \perp OA$, то BOC — лінійний кут двогранного кута OA: $\angle BOC = 90^\circ$ за умовою. Аналогічно доведемо, що й два інші двогранні кути прямі. *

4. Плоскі кути тригранного кута дорівнюють 60, 60 і 90°. На ребрах тригранного кута відкладено рівні відрізки. Довести, що площина, яка проходить через кінці відрізків, перпендикулярна до грані більшого плоского кута.

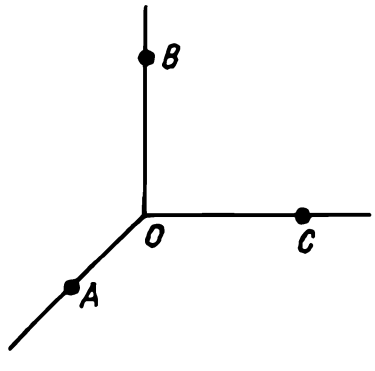


Рис. 17.66

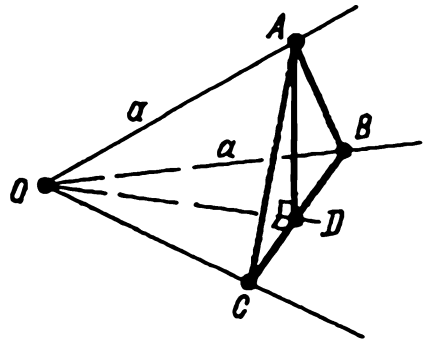


Рис. 17.67

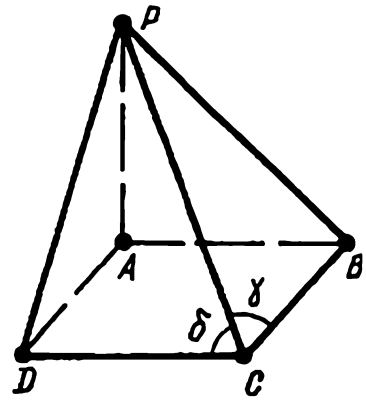


Рис. 17.68

* На рис. 17.67 зображено тригранний кут $OABC$. Нехай $OA = OB = OC = a$; D — середина відрізка BC. Трикутники OAC і OAB правильні, тому $AB = AC = a$; AD — медіана і висота ΔABC; $AD \perp BC$. Трикутники ABC і OBC рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Оскільки $\angle BAC = \angle BOC = 90^\circ$, то $AD = OD = CD$. Тепер зрозуміло, що трикутники OAD і OCD рівні. Отже, $\angle ADO = 90^\circ$, тобто пряма AD перпендикулярна до площини OBC; площина ABC перпендикулярна до площини BOC за ознакою перпендикулярності площин. *

5. Основою піраміди $PABCD$ (рис. 17.68) є прямокутник $ABCD$. Бічне ребро PA перпендикулярне до площини основи. Довести, що

$$\cos \angle PC = -\cos \angle BC \cdot \cos \angle CD.$$

Розглянемо тригранний кут з вершиною C. За теоремою косинусів для тригранного кута маємо

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\delta}{\sin\gamma\sin\delta},$$

де $\alpha = \angle PC$, $\beta = \angle DCB$, $\gamma = \angle PCB$, $\delta = \angle PCD$. Оскільки $\angle DCB = 90^\circ$, то $\cos\alpha = -\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\delta = -\frac{BC}{PB}\frac{DC}{PD} = -\frac{BC}{PD}\frac{DC}{PB} = -\frac{AD}{PD}\frac{AB}{PB} = -\cos\angle CD \cdot \cos\angle BC$, що й треба було довести. *

4.2. *Многогранником* називається тіло, обмежене скінченним числом площин. Поверхня многогранника складається із скінченного числа многокутників, що називаються *гранями многогранника*. Сторони граней називаються *ребрами*, а вершини — *вершинами многогранника*. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не лежать в одній грані многогранника, називається його *діагоналлю*. Многогранник називається *опуклим*, якщо він лежить по один бік від кожної з площин, які його обмежують.

Інше означення опуклого многогранника: многогранник називається *опуклим*, якщо разом з будь-якими двома своїми точками A, B він містить і весь відрізок AB. Далі розглядатимемо тільки опуклі многогранники.

Основні позначення: V — об'єм, S — площа основи, $S_б$ — площа бічної поверхні, $S_п$ — площа повної поверхні, P — периметр основи, l — бічне ребро, H — висота.

4.3. *Призмою* називається многогранник, у якого дві грані (основи) лежать в паралельних площинах, а всі ребра поза цими гранями паралельні між собою.

Грані, відмінні від основ, називаються *бічними гранями*, а їх ребра називаються *бічними ребрами*. Всі бічні ребра рівні між собою як паралельні відрізки, обмежені двома паралельними площинами. Всі бічні грані призми є паралелограмами. Відповідні сторони основ призми рівні і паралельні. Тому в основах лежать рівні многокутники.

Поверхня призми складається з двох основ та бічної поверхні. *Висотою призми* називається відрізок, який є спільним перпендикуляром площин, в яких лежать основи призми. Висотою призми є відстань H між площинами основ.

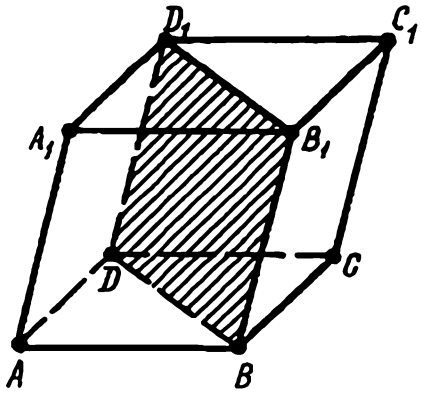


Рис. 17.69

Переріз призми площиною, проведеною через два бічних ребра, що не належать одній грані, називається *діагональним перерізом призми*. На рис. 17.69 показано чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Паралелограм BDD_1B_1 — діагональний переріз призми. По числу сторін основи призма називається трикутною, чотирикутною, п'ятикутною тощо.

Прямою називається призма, у якої бічне ребро перпендикулярне до площини основи, інші призми називаються *похилими*.

Правильною називається пряма призма, основою якої є правильний многокутник.

Призма, основою якої є паралелограм, називається *паралелепіпедом*.

Площею бічної поверхні $S_б$ призми називається сума площ її бічних граней.

Площею повної поверхні $S_п$ називається сума площ всіх її граней:

$S_п = S_б + 2S$, де S — площа основи призми, $S_б$— площа бічної поверхні.

Перпендикулярним перерізом призми називається многокутник, площина якого перпендикулярна до бічного ребра призми, а вершини лежать на прямих, що проходять через бічні ребра. На рис. 17.70 показано п'ятикутник $MNPQT$ — перпендикулярний переріз призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Кожна сторона многокутника, який є перпендикулярним перерізом, — це висота деякої бічної грані. Тому площа кожної бічної грані дорівнює la_i, де l — бічне ребро призми, a_i — деяка сторона перпендикулярного перерізу. Далі маємо $S_б = la_1 + la_2 + \ldots + la_n = lP$, де P — периметр перпендикулярного перерізу.

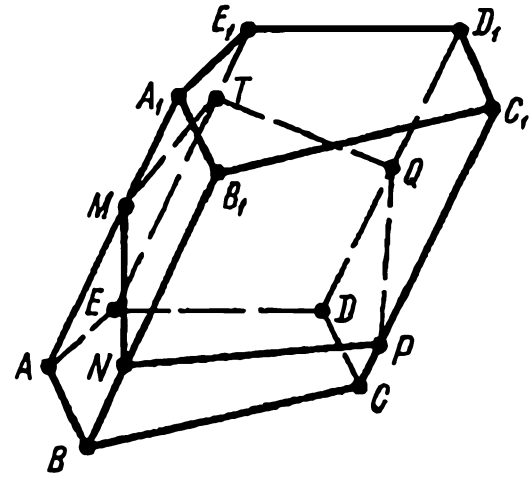


Рис. 17.70

Зокрема, якщо призма пряма, то $S_б = P \cdot H$.

4.4. ***Теорема 1.*** *Кожний паралелепіпед має центр симетрії.*

* Нехай O — середина діагоналі BD_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.71).

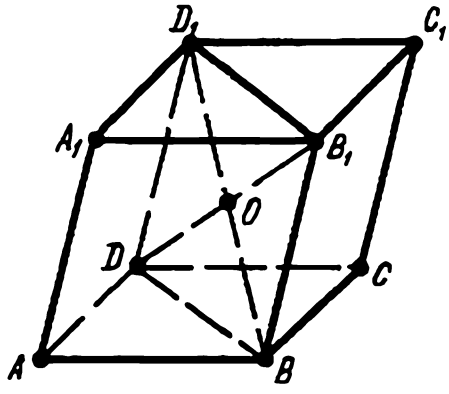


Рис. 17.71

Доведемо, що O — центр симетрії цього паралелепіпеда. Оскільки кожний діагональний переріз паралелепіпеда — паралелограм з центром O, то для кожної вершини паралелепіпеда знайдеться інша вершина, симетрична їй відносно точки O. Отже, O — центр симетрії паралелепіпеда. *

Наслідок. *Протилежні грані будь-якого паралелепіпеда рівні й паралельні.*

Прямокутним називається паралелепіпед, всі грані якого прямокутники.

Прямокутний паралелепіпед з рівними ребрами називається *кубом*.

Три ребра, що виходять з однієї вершини прямокутного паралелепіпеда, називаються його *вимірами* (*довжина*, *ширина*, *висота*).

Теорема 2. *Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів*:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

* Легко помітити, що всі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

На рис. 17.72 показано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За теоремою Піфагора маємо

$$BD_1^2 = DD_1^2 + BD^2 = DD_1^2 + DA^2 + DC^2 . *$$

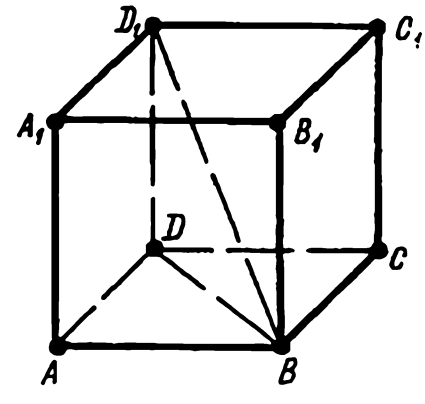


Рис. 17.72

Зауважимо, що якщо ребро куба дорівнює a, а діагональ його дорівнює d, то $d^2 = 3a^2$ і $d = a\sqrt{3}$.

Задачі

1. На ребрах трикутної призми дано точки M, N, P (рис. 17.73). Побудувати переріз призми площиною, що проходить через дані точки.

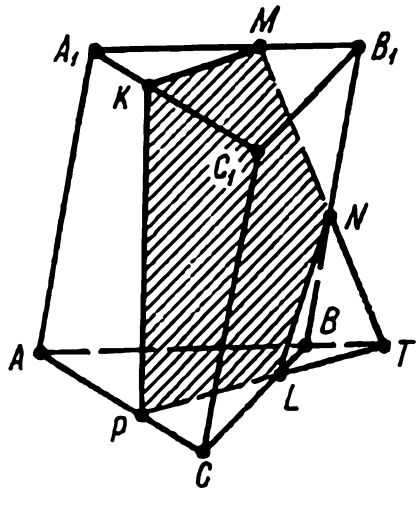


Рис. 17.73

* MN — слід січної площини на грані ABB_1A_1. Нехай $T = MN \cap AB$. Точка T належить січній площині, тому PL — слід січної площини на площині ABC; $PT \cap CB = L$. Використовуючи теорему про сліди (див. теорему 2, п. 2.3), проводимо відрізок $MK \parallel LP$. Шуканий переріз — п'ятикутник $PLNMK$. *

2. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із стороною a (рис. 17.74) і гострим кутом α. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут γ. Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

* Відомо, що

$$S_п = S_б + 2S. \qquad (П17.1)$$

де $S = a^2 \sin\alpha$. Нехай AC — більша діагональ ромба $ABCD$. отже, A_1C — більша діагональ паралелепіпеда. З прямокутного трикутника AOB маємо

$AO = AB \cos\alpha/2$, звідки $AC = 2AO = 2a \cos(\alpha/2)$.

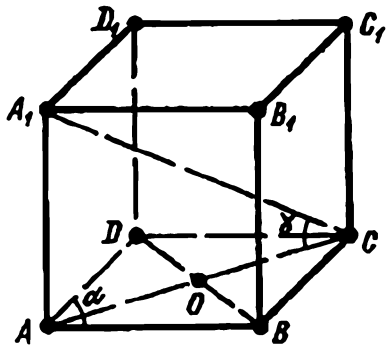


Рис. 17.74

З прямокутного трикутника A_1AC маємо $A_1A = AC \cdot \operatorname{tg}\gamma = 2a\cos(\alpha/2)\operatorname{tg}\gamma$, $S_б = 4AB \cdot A_1A = 8a^2\cos(\alpha/2)\operatorname{tg}\gamma$. Тепер з рівності (317.1) маємо

$$S_п = 8a^2\operatorname{tg}\gamma\cos(\alpha/2) + 2a^2\sin\alpha.$$

Відповідь: $2a^2(4\operatorname{tg}\gamma\cos(\alpha/2) + \sin\alpha)$. *

3. Відстані між прямими, що проходять через бічні ребра похилої призми (рис. 17.75), дорівнюють 13, 14 і 15 см. Знайти відстань між площиною середньої по величині площі бічної грані і протилежним бічним ребром.

* Нехай ΔMNP — це перпендикулярний переріз похилої призми, $MN = 13$, $NP = 14$, $PM = 15$ см, тоді BCC_1B_1 — середня по величині площі бічна грань. Нехай MT — висота ΔMNP. Оскільки площина MNP перпендикулярна до бічного ребра, то $MT \perp BB_1$ і $MT \perp PN$. Отже, MT — шукана відстань. За формулою Герона маємо $S_{\Delta MNP} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84$; $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MT\cdot PN$ або $84 = MT\cdot 14/2$ звідки $MT = 12$. Відповідь: 12 см. *

4. Основою призми є правильний трикутник із стороною a (рис. 17.76). Бічне ребро b нахилене до площини основи під кутом γ. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо відомо, що вершина верхньої основи A проектується в центр O нижньої.

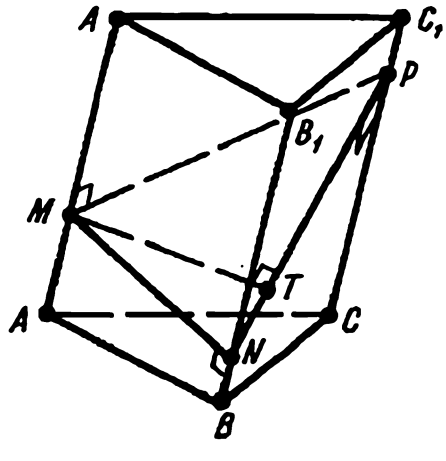


Рис. 17.75

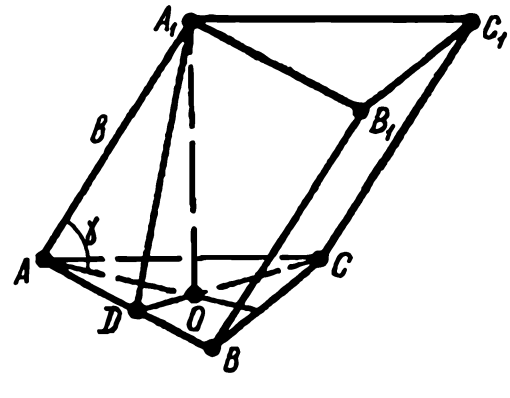


Рис. 17.76

* Оскільки $AO \perp BC$, то $A_1A \perp BC$ за теоремою про три перпендикуляри; $B_1B \parallel A_1A$, отже, $B_1B \perp BC$. Таким чином, бічна грань BCC_1B_1 — прямокутник; CD — висота ΔABC; $A_1D \perp AB$. З прямокутного трикутника A_1AO маємо $A_1O = b\sin\gamma$. З прямокутного трикутника A_1DO маємо $A_1D = \sqrt{A_1O^2 + DO^2} = \sqrt{(b\sin\gamma)^2 + a^2/12}$. Нехай $S_{ABB_1A_1} = S_1$, $S_{BB_1C_1C} = S_2$, тоді $S_1 = a\sqrt{(b\sin\gamma)^2 + a^2/12}$, $S_2 = ab$. Отже,

$$S_б = 2S_1 + S_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{12(b\sin\gamma)^2 + a^2} + ab.$$

Відповідь: $\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{12(b\sin\gamma)^2 + a^2} + ab$.

5. Кути, які утворює діагональ прямокутного паралелепіпеда з ребрами, що виходять з однієї вершини, дорівнюють α, β і γ. Косинуси цих кутів називаються напрямними косинусами вектора — діагоналі. Довести, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (П17.2)$$

* Розглянемо одиничний вектор — діагональ $\vec{a}$. тобто $|\vec{a}| = 1$. Очевидно, $a_x = |\vec{a}| \cos\alpha$, $a_y = \cos\beta$, $a_z = \cos\gamma$, тобто $\vec{a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. З рівності $|\vec{a}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$ дістаємо потрібний результат. *

4.5. Многогранник, у якого одна грань, що називається основою, — многокутник, а інші грані — трикутники із спільною вершиною, називається *пірамідою*. *Грані*, відмінні від основи, називаються *бічними*. Спільна вершина бічних граней називається *вершиною піраміди*. *Ребра*, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються *бічними*. *Висотою піраміди* називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди на її основу. Довжина цього перпендикуляра позначається буквою H. Залежно від числа сторін основи піраміда називається *трикутною*, *чотирикутною*, *п'ятикутною* тощо. Піраміда називається *правильною*, якщо її основа — правильний многокутник, а висота проходить через центр основи. Переріз піраміди площиною, що проходить через вершину і діагональ основи, називається *діагональним перерізом*. Позначаючи піраміду, спочатку називають її вершину, а потім вершини основи.

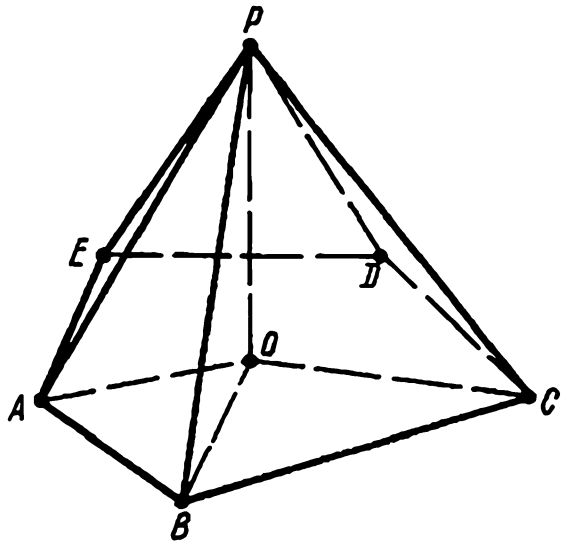


Рис. 17.77

Теорема 1. *Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то її висота проходить через центр кола, описаного навколо основи.*

* Нехай PO — висота піраміди (рис. 17.77). Оскільки всі бічні ребра рівні, їх проекції на площину основи рівні, тобто $OA = OB = OC = \ldots$. Отже, O — центр кола, описаного навколо основи. *

Теорема 2. *Якщо всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи, а висота проходить всередині піраміди, то висота проходить через центр кола, вписаного в основу піраміди.*

* Нехай PO — висота піраміди (рис. 17.78). Проведемо перпендикуляри з точки O на сторони основи. Нехай OM і ON — два таких перпендикуляри; $\angle PMO$ і $\angle PNO$ — лінійні кути двогранних кутів при ребрах AC і BC основи піраміди. За умовою $\angle PMO = \angle PNO$, отже, $\Delta PMO = \Delta PNO$ і $OM = ON$. Точка O однаково віддалена від сторін AC і BC. Аналогічно доведемо, що точка O однаково віддалена від усіх сторін основи, отже, вона є центром вписаного кола. *

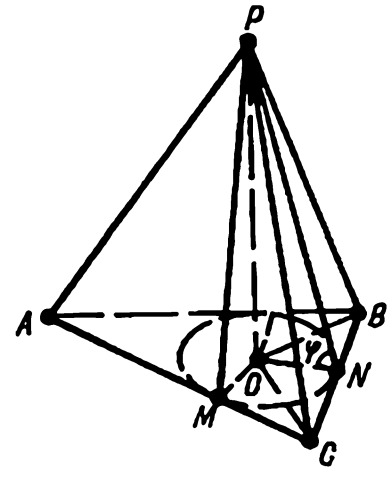


Рис. 17.78

Теорема 3. *Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом* φ, *то* $S_б = \dfrac{S}{\cos\varphi}$. Ця формула справедлива, зокрема, для правильної піраміди.

Теорема 4. *Для правильної піраміди справедливі формули:*

а) $S_б = \frac{1}{2}PA$. *де* A *— апофема бічної грані;*

б) $S_б = \frac{n}{2}b^2 \sin\alpha$, *де* n *— число сторін основи,* b *— бічне ребро,* α *— плоский кут при вершині піраміди.*

Розглянемо паралельні перерізи піраміди.

Теорема 5. *Якщо піраміду перерізати площиною, паралельною площині основи* (рис. 17.79), *то:*

а) *бічні ребра і висота піраміди діляться цією площиною на пропорційні частини у відношенні*

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{PO_1}{PO} = k;$$

б) *у перерізі утворюється многокутник, подібний основі піраміди;*

в) *площі перерізу і основи піраміди відносяться, як квадрати їх відстаней до вершини піраміди:*

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{PO_1}{PO}\right)^2 = k^2.$$

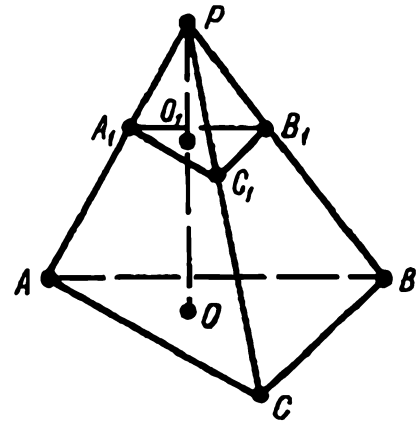


Рис. 17.79

4.6. Частина піраміди, що лежить між основою та паралельним основі перерізом, називається *зрізаною пірамідою*. На рис. 17.79 показано зрізану трикутну піраміду $ABCA_1B_1C_1$. Бічні грані зрізаної піраміди — трапеції. Основи зрізаної піраміди — подібні многокутники. Якщо повна піраміда правильна, то і відповідна зрізана піраміда правильна. *Висота* зрізаної піраміди — це спільний перпендикуляр до площин її основ (або його довжина). *Апофемою* правильної зрізаної піраміди називається частина апофеми повної піраміди, обмежена площинами основ зрізаної піраміди, тобто відрізок, що сполучає середини паралельних сторін бічної грані.

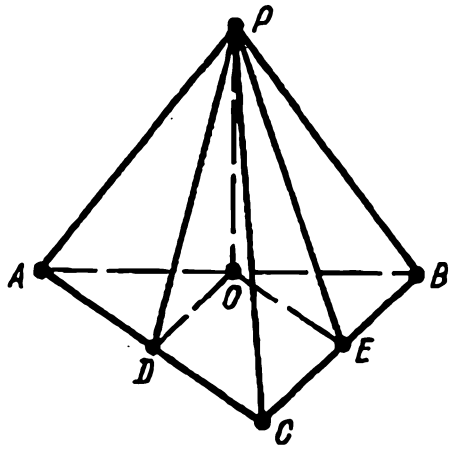


Рис. 17.80

Теорема. $S_б = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)A$, *де* P_1, P_2 *— периметри основ,* A *— апофема зрізаної піраміди.*

Задачі

1. Основою піраміди є трикутник із сторонами 6. 8. 10 см. Кожне бічне ребро дорівнює 13 см.

а) Знайти висоту піраміди.

б) Довести, що одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи.

в) Знайти площу повної поверхні піраміди.

* Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні, висота піраміди проходить через центр O кола, описаного навколо основи.

В основі піраміди лежить прямокутний трикутник ABC, тому O — середина гіпотенузи AB (рис. 17.80).

Тому грань PAB проходить через висоту PO піраміди і, отже, перпендикулярна до площини основи ABC.

Із прямокутного трикутника APO маємо $PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Нехай AC = 8 см, BC = 6 см. Бічні грані піраміди — рівнобедрені трикутники, D — середина ребра AC. E — середина ребра BC. PD — висота ΔAPC: $PD = \sqrt{PA^2 - DA^2} = \sqrt{13^2 - 4^2} = \sqrt{153}$. PE — висота ΔPBC. $PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

Знайдемо площі: $S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} PO \cdot AB = 12 \cdot 5 = 60$, $S_{\Delta PAC} = \frac{1}{2} PD \cdot AC = 3\sqrt{17} \cdot 4 = 12\sqrt{17}$,

$S_{\Delta PBC} = \frac{1}{2} PE \cdot BC = 4\sqrt{10} \cdot 3 = 12\sqrt{10}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 8 \cdot 3 = 24$.

$$S_п = 60 + 12\sqrt{17} + 12\sqrt{10} + 24 = 12\left(7 + \sqrt{17} + \sqrt{10}\right) \text{см}^2.$$

Відповідь: а) 12 см; в) $12\left(7 + \sqrt{17} + \sqrt{10}\right) \text{см}^2$.

2. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник ABC, у якого $BC = a$, $AB = AC = b$ (рис. 17.81). Кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом γ і висота проходить усередині піраміди. Знайти: а) висоту піраміди; б) площу повної поверхні піраміди.

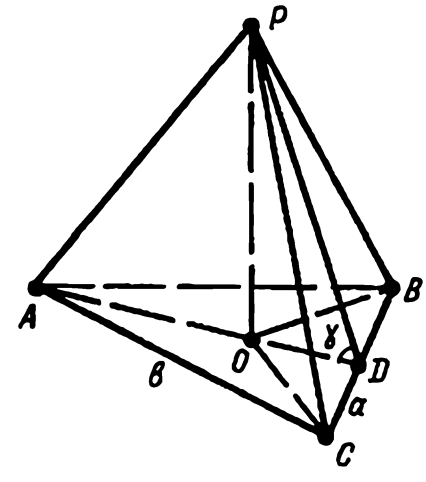


Рис. 17.81

* Оскільки всі бічні грані однаково нахилені до площини основи і висота проходить усередині піраміди, то основа O висоти — центр кола, вписаного у ΔABC. Нехай D — середина ребра BC. AD — висота ΔABC, $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{b^2 - a^2/4} = \left(1/2\right)\sqrt{4b^2 - a^2}$. $OD = r$ (r — радіус кола, вписаного в ΔABC):

$$r = \frac{S}{p} = \frac{AD \cdot BC}{AB + BC + AC} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2} \cdot a/2}{a + 2b} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b - a}{2b + a}};$$

$\angle PDO$ — лінійний кут двогранного кута BC. За умовою $\angle PDO = \gamma$. З прямокутного трикутника PDO маємо

$$PO = DO \operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b - a}{2b + a}} \operatorname{tg}\gamma.$$

За теоремою про площу ортогональної проекції маємо

$$S_{\Delta ABC} = S_б \cos\gamma,$$

тоді

$$S_п = S_{\Delta ABC} + \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos\gamma} = S_{\Delta ABC}\left(\frac{1 + \cos\gamma}{\cos\gamma}\right), \qquad (П17.3)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{4} a\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Тепер з рівності (П17.3) маємо

$$S_{\text{п}} = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}\left(\frac{1+\cos\gamma}{\cos\gamma}\right).$$

Відповідь: а) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}\operatorname{tg}\gamma$; б) $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}\,(1+\cos\gamma)}{4\cos\gamma}$.

3. У правильній чотирикутній піраміді (рис. 17.82) двогранний кут при ребрі основи дорівнює β, а сторона основи a. Через ребро основи проведено площину під кутом γ ($0 < \gamma < \beta$) до площини основи. Знайти площу перерізу.

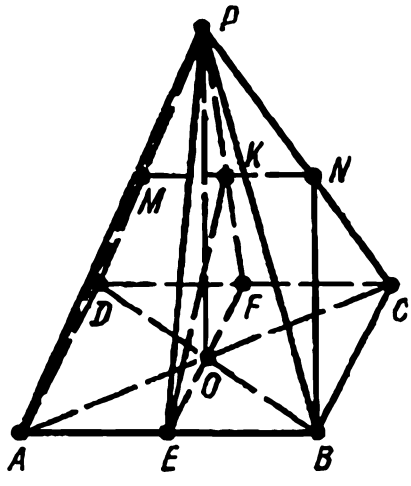


Рис. 17.82

* Маємо PE і PF — апофеми піраміди, $\angle PEF = \beta$ за умовою, $AB = a$. У площині PEF проведемо відрізок EK так, що $\angle KEF = \gamma$. Через точку K проведемо відрізок $MN \parallel DC$. Площина $AMNB$ утворює з площиною основи піраміди кут γ. У перерізі маємо трапецію $AMNB$, площа якої

$$S = (AB + MN)\,KE/2. \qquad (\text{П17.4})$$

З ΔKEF за теоремою синусів маємо

$$\frac{KE}{\sin\beta} = \frac{EF}{\sin\left(180^\circ - (\beta+\gamma)\right)}, \text{ звідки } KE = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)};$$

$$\frac{KF}{\sin\gamma} = \frac{EF}{\sin(\beta+\gamma)}, \text{ звідки } KF = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

З прямокутного трикутника POF (PO — висота піраміди) знаходимо $PF = \frac{OF}{\cos\beta} = \frac{a}{2\cos\beta}$. з подібності ΔPMN і ΔPDC запишемо відношення

$$\frac{MN}{DC} = \frac{PK}{PF} = \frac{PF - KF}{PF} = 1 - \frac{KF}{PF}.$$

звідки

$$MN = DC\left(1 - \frac{KF}{PF}\right) = a\left(1 - \frac{2\cos\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}\right) = \frac{a\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Тепер з рівності (317.4) маємо

$$S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}\right)\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a^2\sin^2\beta\cos\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}.$$

Відповідь: $\frac{a^2\sin^2\beta\cos\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}$. *

4. Площі основ зрізаної піраміди (рис. 17.83) дорівнюють Q та q ($Q > q$), а висота H. Знайти висоту піраміди, яка доповнює зрізану піраміду до повної.

* Нехай $PO_1 = h$. Згідно з теоремою про паралельні перерізи піраміди (див. п. 4.5) маємо

$$\frac{q}{Q} = \left(\frac{h}{h+H}\right)^2 \text{ звідки } \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q}} = \frac{h}{h+H}, \; h = \frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}.$$

Відповідь: $\frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}$. *

Вправи

1. Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють 60 і 90°. В яких межах знаходиться значення третього кута?

2. Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють 110 і 80°. В яких межах знаходиться значення третього кута?

3. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює 45°. Знайти його двогранні кути.

4. У тригранному куті два плоскі кути по 45°, двогранний кут між ними прямий. Знайти третій плоский кут.

5. Кожний плоский кут тригранного кута має величину α ($0 < \alpha < \pi/2$). На одному з ребер взято точку на відстані a від вершини кута. Знайти відстань від цієї точки до площини протилежної грані.

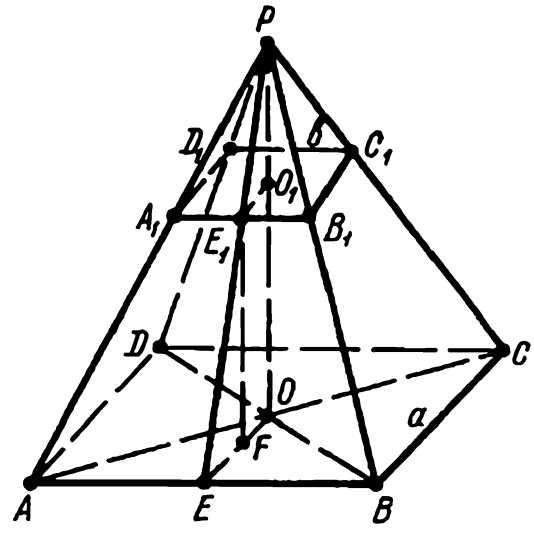


Рис. 17.83

6. Бічне ребро призми дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайти висоту призми.

7. Висота прямої трикутної призми дорівнює 10 см, а сторони основи 13, 14 і 15 см. Знайти площу перерізу площиною, яка проведена через бічне ребро і більшу висоту основи.

8. Діагональний переріз правильної чотирикутної призми має площу Q. Знайти площу бічної поверхні призми.

9. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з трьома його нерівними гранями відповідно кути α, β і γ. Довести, що: а) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$; б) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

10. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a і b, а його діагональ утворює з площиною основи кут γ. Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

11. Діагональ куба дорівнює d. Знайти його повну поверхню.

12. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює D, а діагональ бічної грані дорівнює d. Знайти площу повної поверхні призми.

13. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2, 6 і 9 см. Знайти його діагональ.

14. Бічне ребро похилої призми дорівнює b, двогранний кут при одному з бічних ребер — α, а відстані від цього ребра до двох інших бічних ребер дорівнюють a і c. Знайти площу бічної поверхні призми.

15. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з основами a і b. Кожна бічна грань нахилена до площини основи піраміди під кутом β. Знайти: а) висоту піраміди; б) площу бічної поверхні піраміди.

16. Висоту піраміди поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено паралельні перерізи піраміди. Знайти площі цих перерізів, якщо площа основи дорівнює Q.

17. Сторони прямокутника, що є основою піраміди, дорівнюють a і b. Висота h піраміди проходить через центр прямокутника. Знайти площу повної поверхні піраміди.

18. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із сторонами a, b, b. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут γ, а висота піраміди проходить усередині піраміди. Знайти бічну поверхню піраміди.

19. Основою піраміди є ромб із стороною a і гострим кутом α. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут β. Знайти: а) висоту піраміди; б) площу повної поверхні піраміди.

20. У правильній трикутній піраміді $PABC$ сторона основи дорівнює a, двогранний кут при ребрі основи — β. Знайти площу перерізу піраміди площиною, проведеною через центр основи паралельно ребрам PA і BC.

21. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи — β. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка ділить даний кут навпіл.

22. У правильній зрізаній трикутній піраміді сторони основ дорівнюють a і b відповідно ($a > b$). Двогранний кут при ребрі нижньої основи дорівнює α. Знайти площу повної поверхні зрізаної піраміди.

23. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основ дорівнюють відповідно a і b ($a > b$), а двогранний кут при ребрі нижньої основи — α. Знайти площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

24. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють Q та q відповідно. Площина ділить висоту зрізаної піраміди навпіл. Довести, що площа перерізу дорівнює $\left(\sqrt{q}+\sqrt{Q}\right)^2 / 4$.

§ 5. Тіла обертання

5.1. *Прямим круговим циліндром* називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо своєї сторони. Далі будемо називати це тіло *циліндром*. На рис. 17.84 показано циліндр, утворений при обертанні прямокутника AOO_1A_1 навколо сторони OO_1, яка називається *віссю обертання* і є *висотою циліндра*. *Основи циліндра* — це рівні круги, розміщені в паралельних площинах. *Висотою циліндра* називають також відстань між площинами його основ. Відрізок, що сполучає точки кіл основ і перпендикулярний до площин основ, називається *твірною циліндра* (це відрізки A_1A, M_1M, B_1B, N_1N). Всі твірні паралельні осі обертання і мають однакову довжину, яка дорівнює висоті циліндра. *Радіусом циліндра* називається радіус його основи. *Осьовим перерізом* циліндра називається переріз циліндра площиною, яка проходить через вісь обертання. Всі осьові перерізи циліндра — рівні прямокутники (це, наприклад, прямокутники ABB_1A_1 і MNN_1M_1).

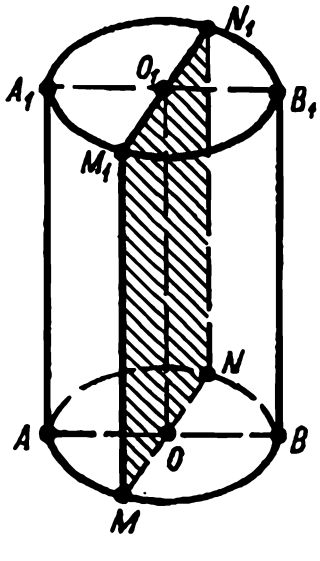


Рис. 17.84

Площина, яка містить твірну і перпендикулярна до осьового перерізу, який проходить через цю твірну, називається *дотичною до циліндра площиною*. Твірна циліндра при обертанні навколо осі утворює *бічну* (*циліндричну*) *поверхню* циліндра. На рис. 17.85 показано *розгортку циліндра*. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник із сторонами H і C, де H — висота циліндра, C — довжина кола основи.

Наведемо формули для обчислення площ бічної $S_б$ і повної $S_п$ поверхонь:

$S_б = H \cdot C = 2\pi RH$, $S_п = S_б + 2S = 2\pi R(R + H)$,

де S — площа основи циліндра.

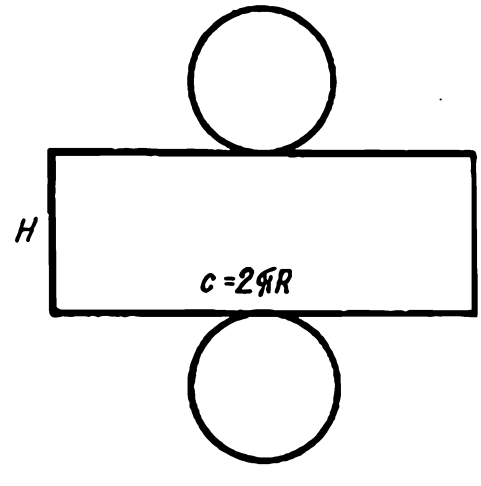


Рис. 17.85

Задачі

1. Дотична площина утворює з площиною осьового перерізу кут 30°. Знайти найкоротшу відстань між діагоналлю цього осьового перерізу і твірною, через яку проходить дотична площина, якщо радіус циліндра дорівнює R.

* Відрізок T_1T лежить на лінії перетину площини AB_1BA_1 осьового перерізу і дотичної площини (рис. 17.86), яка проходить через твірну M_1M: $\angle B_1T_1M_1$ — лінійний кут двогранного кута з ребром T_1T. За умовою $\angle B_1T_1M_1 = 30°$. Прямі AB_1 і M_1M мимобіжні. Площина ABB_1A_1 містить пряму AB_1 і паралельна прямій M_1M. Тому шукана відстань дорівнює відстані від прямої M_1M до площини ABB_1A_1. Опустимо перпендикуляр M_1K_1 з точки M_1 на пряму A_1B_1: $\angle O_1M_1T_1 = 90°$, бо M_1T_1 — дотична до кола верхньої основи циліндра; $\angle B_1O_1M_1 = 60°$. Із прямокутного трикутника $O_1M_1K_1$ маємо $M_1K_1 = O_1M_1 \sin 60° = R\sqrt{3}/2$. Відповідь: $R\sqrt{3}/2$. *

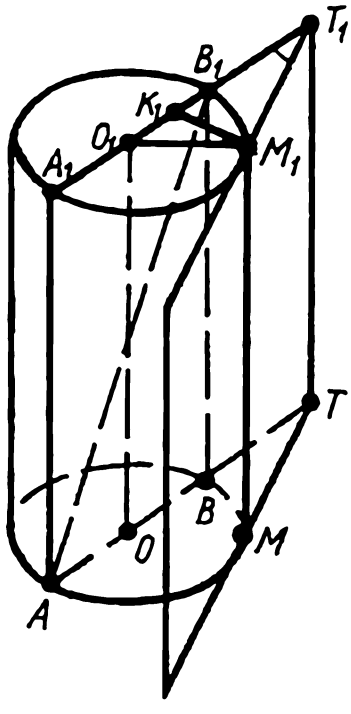


Рис. 17.86

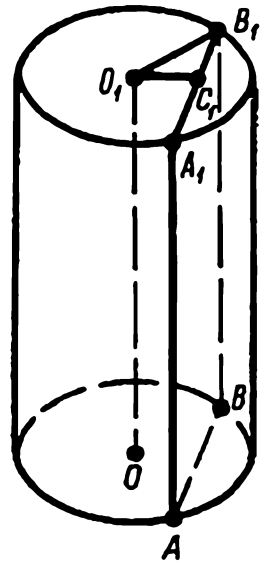


Рис. 17.87

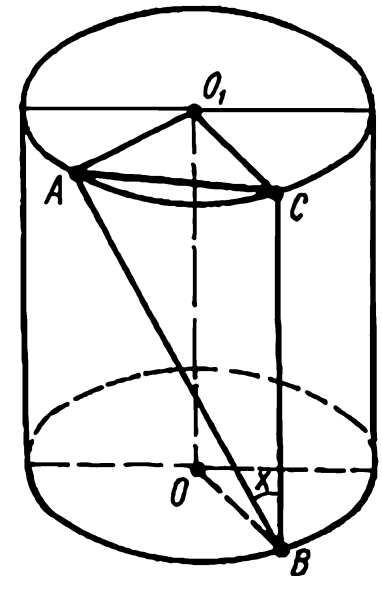


Рис. 17.88

2. Висота циліндра дорівнює h, радіус основи R. Знайти площу перерізу площиною, яка проведена паралельно осі циліндра на відстані a від неї.

* Переріз циліндра, паралельний осі обертання, являє собою прямокутник ABB_1A_1 (рис. 17.87). Висота AA_1 цього прямокутника дорівнює висоті циліндра h. Нехай $O_1C_1 \perp A_1B_1$: O_1C_1 — відстань від осі обертання до площини перерізу. За умовою $O_1C_1 = a$. З прямокутного трикутника $O_1B_1C_1$ знаходимо $B_1C_1 = \sqrt{R^2 - a^2}$, $A_1B_1 = 2B_1C_1 = 2\sqrt{R^2 - a^2}$. Позначивши площину перерізу через S, маємо $S = A_1B_1 \cdot A_1A = 2h\sqrt{R^2 - a^2}$. Відповідь: $2h\sqrt{R^2 - a^2}$. *

3. У рівносторонньому циліндрі (рис. 17.88) центри основ O_1 і O. На колах основ взято точки A, B так, що кут між прямими O_1A і OB дорівнює α. Знайти кут між віссю циліндра і прямою AB.

* Рівностороннім називається циліндр, осьовий переріз якого є квадратом. Нехай радіус рівностороннього циліндра R, BC — твірна. За означенням кута між мимобіжними прямими $\angle AO_1C = \alpha$; $BC = 2R$, бо циліндр рівносторонній. З ΔAO_1C знаходимо: $AC = 2R \sin(\alpha/2)$. Нехай $\angle ABC = x$. Із ΔABC маємо $\operatorname{tg} x = \dfrac{AC}{BC} = \sin(\alpha/2)$. Відповідь: $\operatorname{arctg}(\sin(\alpha/2))$. *

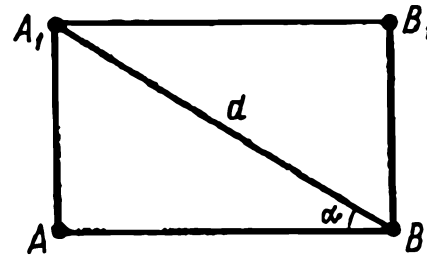


Рис. 17.89

4. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра утворює кут α (рис. 17.89) з основою розгортки, довжина цієї діагоналі дорівнює d. Знайти площу повної поверхні циліндра.

* Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник ABB_1A_1. З прямокутного ΔAB_1A_1 знаходимо

$$AA_1 = d\sin\alpha = h.\quad AB = d\cos\alpha = 2\pi R.\quad R = \frac{d\cos\alpha}{2\pi}.$$

Далі маємо

$$S_{\text{п}} = 2\pi R(R+h) = d\cos\alpha\left(\frac{d\cos\alpha}{2\pi} + d\sin\alpha\right) = \frac{d^2}{2\pi}\left(\cos^2\alpha + \pi\sin 2\alpha\right).$$

Відповідь: $\frac{d^2}{2\pi}\left(\cos^2\alpha + \pi\sin 2\alpha\right)$.

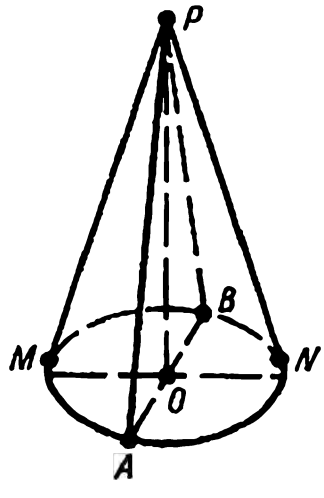


Рис. 17.90

5.2. *Прямим круговим конусом* називається тіло, утворене при обертанні прямокутного трикутника навколо катета.

Далі прямий круговий конус називатимемо *конусом*. На рис. 17.90 показано конус, утворений внаслідок обертання прямокутного трикутника POA навколо катета PO, який називається *віссю конуса*, P — його *вершиною*. Круг з центром O і радіусом OA називається *основою конуса*. Відрізок, що сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола основи, називається *твірною конуса*. На рис. 17.90 відрізки PA, PB, PM, PN — твірні конуса. Радіус основи конуса називається *радіусом конуса*. *Висотою конуса* називається перпендикуляр, опущений з вершини конуса на його основу. *Осьовим перерізом* конуса називається переріз конуса площиною, яка проходить через його висоту. Площина, яка проходить через твірну конуса і перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через цю твірну, називається *дотичною площиною конуса*. При обертанні твірної PA навколо осі PO утворюється *бічна* (*конічна*) *поверхня* конуса.

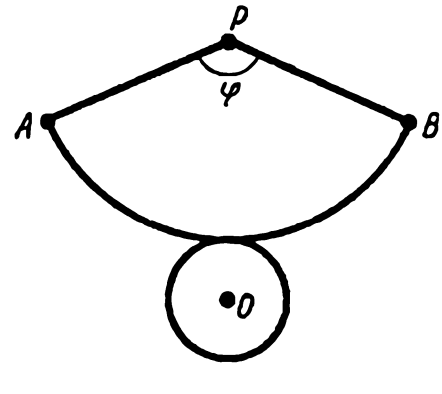


Рис. 17.91

Розгорткою бічної поверхні конуса (рис. 17.91) є круговий сектор. Позначимо через $S_{\text{б}}$ і $S_{\text{п}}$ відповідно площі бічної і повної поверхні конуса: $S_{\text{б}} = \frac{1}{2}PA^2\varphi$, де φ — кут при вершині розгортки. Далі помітимо, що $PA \cdot \varphi = \cup AB = 2\pi R$. Отже, $S_{\text{б}} = \frac{1}{2}l \cdot 2\pi R = \pi Rl$, де R — радіус, а l — твірна конуса;

$$S_{\text{п}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

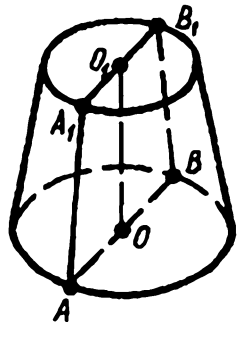


Рис. 17.92

5.3. *Зрізаним конусом* називається частина конуса, обмежена його основою і перерізом, площина якого паралельна площині основи (рис. 17.92). Твірна і висота зрізаного конуса є відповідно частинами твірної і висоти повного конуса.

Бічна поверхня зрізаного конуса може бути знайдена за формулою $S_{\text{б}} = \pi(R + r)l$, де R та r — радіуси основ, l — твірна зрізаного конуса.

Повна поверхня знаходиться за формулою

$$S_{\text{п}} = \pi(Rl + rl + R^2 + r^2).$$

Задачі

1. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α. Знайти кут при вершині розгортки бічної поверхні конуса.

* ΔPAB — осьовий переріз конуса (рис. 17.93,*а*). $\angle APB = \alpha$, $\angle APO = \alpha/2$. З прямокутного трикутника APO маємо $AO = R = l\sin(\alpha/2)$, де R і l — відповідно радіус і твірна конуса. На рис. 17.93,*б* показано розгортку бічної поверхні конуса. Це круговий сектор PAA_1. Відомо, що $\cup A_1A = lx$ (x — шуканий кут). Звідси маємо

$$2\pi R = lx,\ x = (1/l)2\pi l\sin(\alpha/2) = 2\pi\sin(\alpha/2).$$

Зауважимо, що кути α і x вимірюються в радіанах. Відповідь: $2\pi\sin(\alpha/2)$.*

2. Площина проходить через вершину конуса і відтинає в його основі дугу в α радіан ($0 < \alpha < \pi$). Висота конуса дорівнює h, а радіус — R. Знайти: а) площу перерізу конуса згаданою площиною; б) площу бічної поверхні.

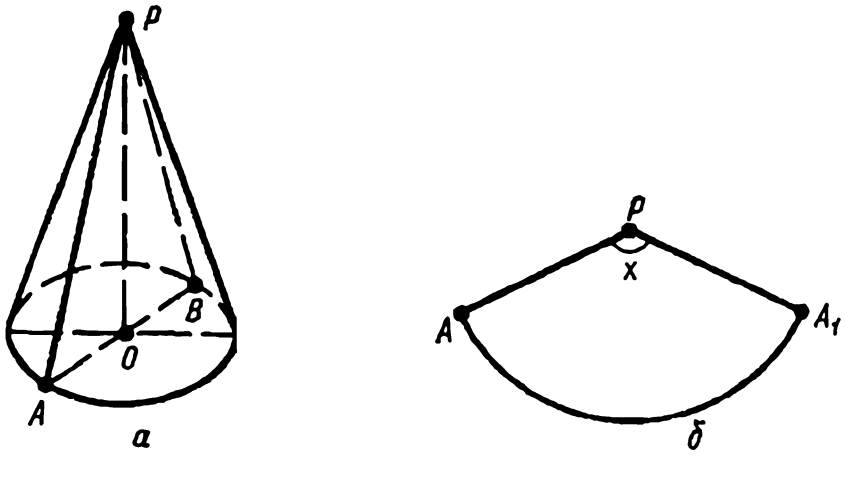


Рис. 17.93

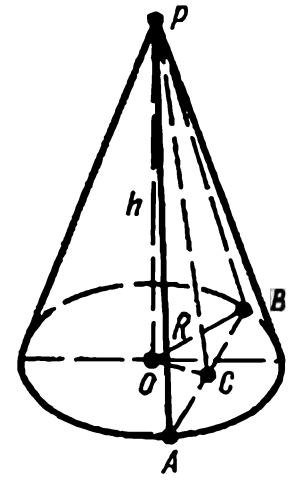


Рис. 17.94

* На рис. 17.94 показано даний в умові конус. PO — висота конуса, ΔPAB — даний переріз. $\angle BOA = \alpha$, $\angle BOC = \alpha/2$ (C — середина відрізка AB). З ΔBOC знаходимо $OC = R\cos(\alpha/2)$. $BC = R\sin(\alpha/2)$. З ΔPOC маємо $PC = \sqrt{h^2 + \left(R\cos\left(\alpha/2\right)\right)^2}$. тоді $S_{\Delta PAB} = PC \cdot BC = R\sin(\alpha/2) \times$ $\times\sqrt{h^2 + \left(R\cos\left(\alpha/2\right)\right)^2}$. З ΔPOB маємо $l = \sqrt{h^2 + R^2}$. тоді $S_{\text{б}} = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$. Відповідь: а) $R\sin\left(\alpha/2\right)\sqrt{h^2 + R^2\cos^2\left(\alpha/2\right)}$; б) $\pi R\sqrt{h^2 + R^2}$.*

3. Через дві твірні конуса (рис. 17.95), кут між якими дорівнює α, проведено площину. Площа основи конуса дорівнює Q. Знайти площу $S_{\text{б}}$ бічної поверхні конуса, якщо площа перерізу дорівнює S.

* Нехай ΔPAB — даний переріз конуса, площа якого $S = \frac{1}{2}l^2\sin\alpha$ і $Q = \pi R^2$. Перемножимо ці рівності: $SQ = \frac{1}{2}\pi R^2 l^2\sin\alpha$, звідки $\left(\pi Rl\right)^2 = \frac{2\pi SQ}{\sin\alpha}$ і $\pi Rl = \sqrt{\frac{2\pi SQ}{\sin\alpha}} = S_{\text{б}}$. Відповідь: $\sqrt{\frac{2\pi SQ}{\sin\alpha}}$.

4. Твірна утворює з площиною більшої основи зрізаного конуса кут α. Радіуси основ дорівнюють R і r. Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.

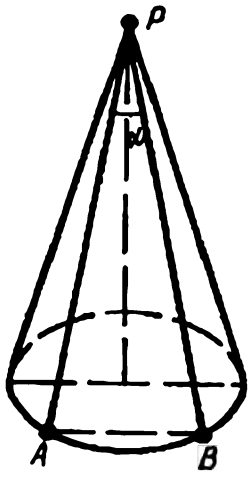


Рис. 17.95

* Доповнимо зрізаний конус до повного конуса з вершиною P (рис. 17.96). З прямокутних трикутників POA і PO_1A_1 маємо $PA = \frac{R}{\cos\alpha}$, $PA_1 = \frac{r}{\cos\alpha}$, $A_1A = PA - PA_1 = \frac{R-r}{\cos\alpha}$. $S_б = \pi(R+r) \times A_1A = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos\alpha}$. Відповідь: $\frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos\alpha}$.*

5.4. Множина всіх точок простору, які однаково віддалені на відстань R від даної точки O, називається *сферою*. Сферу позначають так: $\omega(O, R)$. Можна означити сферу і як тіло, утворене при обертанні кола навколо свого діаметра.

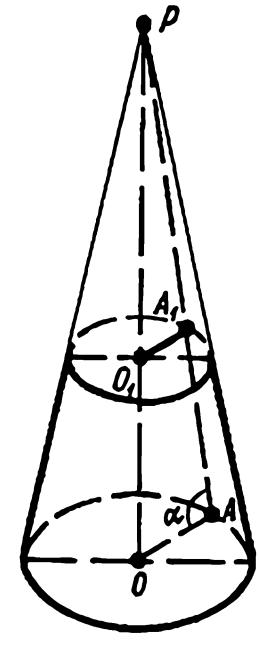


Рис. 17.96

Множина всіх точок простору, які віддалені від даної точки O на відстань, не більшу за R, називають *кулею*. Інакше, куля — це об'єднання сфери і всіх її внутрішніх точок.

Можна також означити кулю, як тіло, утворене при обертанні круга навколо свого діаметра.

Кулю позначають так само, як сферу: $\omega(O, R)$. Точка O називається *центром сфери* (*кулі*). Відрізок, що сполучає центр сфери з будь-якою її точкою, називається *радіусом сфери* (*кулі*). Відрізок, що сполучає будь-які дві точки сфери, називається *хордою сфери* (*кулі*). Іноді під радіусом або хордою розуміють їх довжину. Хорда, що проходить через центр сфери, називається її *діаметром*.

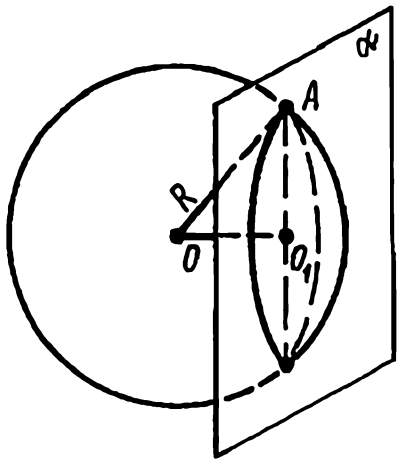


Рис. 17.97

Теорема 1. *Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то лінія перетину сфери цією площиною — коло.*

* Нехай є сфера $\omega(O, R)$ і площина α (рис. 17.97), $O_1 = \text{Пр}_\alpha O$, $OO_1 < R$ за умовою. Якщо довільна точка A належить лінії перетину сфери і площини, то $OA = R$. З прямокутного трикутника OO_1A маємо $O_1A = \sqrt{R^2 - OO_1^2}$. Оскільки величини R і OO_1 сталі, то і величина O_1A стала. Це означає, що точка перетину площини α і сфери ω лежить на даній відстані від точки O_1, отже, точка A лежить на колі $\omega_1\left(O_1, \sqrt{R^2 - OO_1^2}\right)$.*

З теореми випливає, що коли відстань від центра кулі до площини менша від радіуса кулі, то переріз кулі цією площиною — круг. Якщо площина віддалена від центра сфери на відстань R, то вона називається *дотичною площиною*.

Теорема 2. *Дотична площина має із сферою єдину спільну точку* (*точку дотику*) *і перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.*

Теорема 3. *Площини, рівновіддалені від центра сфери, перетинають її по рівних колах.*

* Доведення випливає з того, що $r = \sqrt{R^2 - O_1O^2}$, де r — радіус лінії перетину (рис. 17.97). *

Зрозуміло, що найбільше коло утворюється при перетині площиною, яка проходить через центр сфери. Лінія перетину називається *великим колом сфери* (відповідний переріз кулі називається великим кругом кулі).

Пряма, яка проходить через точку сфери перпендикулярно до радіуса, проведеного у цю точку, називається *дотичною прямою сфери.*

Теорема 4. *Дотична пряма сфери має з сферою єдину спільну точку.*

Через будь-яку точку сфери можна провести безліч дотичних прямих, причому всі вони лежать у дотичній площині.

5.5 Нехай $O(a; b; c)$ — центр сфери у декартовій системі координат, R — радіус сфери, $A(x; y; z)$ — довільна точка сфери. Тоді

$$OA^2 = R^2 \text{ або } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ми дістали *рівняння сфери з центром* $O(a; b; c)$ *і радіусом* R.

Зокрема, якщо центром сфери є початок координат, то маємо рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Зауважимо, що куля задається нерівністю

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2.$$

Задачі

1. Знайти площу перерізу кулі $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 \le 9$ координатною площиною xOy.

* Центр кулі (1; –2; 2) знаходиться на відстані 2 від площини xOy. Нехай r — радіус перерізу. Радіус кулі дорівнює 3, отже, $r^2 = R^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$. Площа S перерізу дорівнює $S = \pi r^2 = 5\pi$. Відповідь: 5π. *

2. Знайти площу перерізу кулі $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \le 25$ площиною, заданою рівнянням $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

* Центр кулі O (3; –2; 1). Використовуючи формулу відстані точки до площини, знайдемо відстань h від точки O до заданої площини:

$$h = \frac{|3\cdot 3 - 2(-2) + 4\cdot 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{12}{\sqrt{29}}.$$

Радіус кулі дорівнює $5 > h$. Отже, площина і куля перетинаються. Нехай r — радіус перерізу, тоді

$$r^2 = R^2 - h^2 = 5^2 - \frac{144}{29} = \frac{581}{29}; \quad S = \pi r^2 = \frac{581}{29}\pi.$$

Відповідь: $20\frac{1}{29}\pi$. *

3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 10 і 24 см. Сфера радіуса 14 см проходить через вершини цього трикутника. Знайти відстань від центра сфери до площини трикутника.

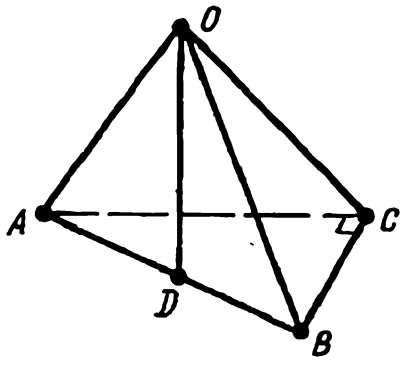


Рис. 17.98

* Оскільки сфера проходить через вершини ΔABC (рис. 17.98), її центр O однаково віддалений від вершин A, B, C. Тому висота піраміди $OABC$ проходить через центр кола, описаного навколо ΔABC. Нехай D — середина гіпотенузи AB, тоді OD — висота піраміди $OABC$. OD — шукана відстань.

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 26. \quad AD = \frac{1}{2}AB = 13.$$

Із прямокутного трикутника OAD маємо

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{14^2 - 13^2} = 3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}$ см. *

4. З точки сфери радіуса 50 см проведено три взаємно перпендикулярні хорди, довжини яких відносяться як 12 : 15 : 16. Знайти довжини цих хорд.

* На рис. 17.99 $MA = 12x$, $MB = 15x$ та $MC = 16x$. Розглянемо прямокутний паралелепіпед $MADBB_1CA_1D_1$, для якого ці відрізки є вимірами. Відомо, що паралелепіпед має центр симетрії — середину будь-якої діагоналі. Тому середина діагоналі MD_1 — точка O — є центром сфери, що проходить через усі вершини паралелепіпеда. $MD_1 = 2R = 100$ см.

За теоремою про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда $(12x)^2 + (15x)^2 + (16x)^2 = 100^2$, звідки $625x^2 = 10\,000$ і $x = 4$. Тепер маємо $MA = 48$ см, $MB = 60$ см, $MC = 64$ см. Відповідь: 48, 60 і 64 см. *

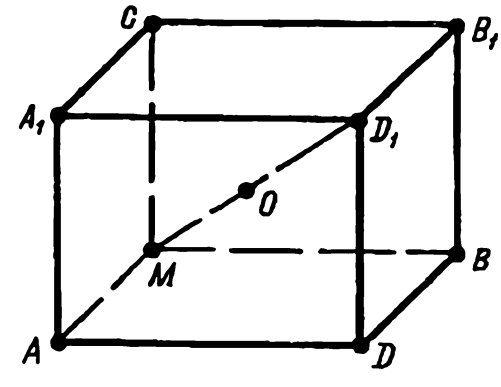


Рис. 17.99

Вправи

1. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює S. Знайти площу осьового перерізу.

2. Висота циліндра дорівнює h, а радіус R. Знайти діагональ осьового перерізу.

3. Висота циліндра дорівнює h, а радіус R ($R > h$). Знайти відстань від осі циліндра до площини перерізу, що являє собою квадрат.

4. Висота циліндра дорівнює h, а радіус R. Кінці відрізка довжиною l лежать на колах основ. Знайти найкоротшу відстань від осі циліндра до даного відрізка.

5. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює A, площа основи дорівнює B. Знайти висоту циліндра.

6. Рівностороннім називається конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник. Знайти кут при вершині розгортки рівностороннього конуса.

7. Площа осьового перерізу рівностороннього конуса дорівнює Q. Знайти $S_п$.

8. Кут при вершині розгортки бічної поверхні конуса дорівнює φ. Знайти кут при вершині осьового перерізу конуса.

9. Радіус конуса дорівнює R, а висота H. Знайти $S_п$.

10. Висота конуса дорівнює h, твірна утворює з площиною основи кут α. Знайти $S_п$.

11. Радіус конуса дорівнює R, твірна утворює з площиною основи кут α. Площина, що проходить через вершину конуса, утворює з площиною основи кут φ. Знайти площу перерізу конуса даною площиною.

12. Радіус конуса дорівнює R, а відстань від центра основи до твірної t. Знайти $S_б$.

13. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, а висота H. Знайти висоту конуса, що доповнює зрізаний конус до повного.

14. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють q і Q. Знайти площу перерізу, паралельного основі, який поділяє висоту зрізаного конуса навпіл.

15. Кулю радіуса 5 см перерізає площина, віддалена від центра на 4 см. Знайти площу перерізу.

16. Дано кулю $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 \le 16$. Знайти площі перерізів кулі координатними площинами.

17. Радіус кулі поділено на 3 рівні частини. Через точки поділу проведено площини, перпендикулярні до радіуса. Знайти площі перерізів, якщо радіус кулі дорівнює R.

18. Радіус кулі дорівнює R. Через кінець радіуса проведено площину під кутом α $(0 < \alpha < \pi/2)$ до цього радіуса. Знайти площу перерізу.

19. Знайти рівняння сфери радіуса 3, що проходить через точки A (0; 0; 0), B (4; 0; 0) і C (0; 4; 0).

20. Довести, що дотичні, проведені з даної точки до даної сфери, рівні між собою.

21. Діагоналі ромба дорівнюють a і b. Сфера радіуса r дотикається до всіх сторін ромба. Знайти відстань від центра сфери до площини ромба.

22. Радіуси двох сфер дорівнюють 25 і 30 см. Довжина лінії, по якій перетинаються ці сфери, дорівнює 48π см. Знайти відстань між центрами сфер.

§ 6. Об'єми тіл

6.1. Додатне число, яке характеризує частину простору, що займає тіло, називається *об'ємом тіла*.

Тіло називається простим, якщо його можна розбити на скінченне число трикутних пірамід. Зокрема, будь-який опуклий многогранник є простим тілом. *Загальні властивості об'ємів тіл*:

1) просте тіло має певний об'єм; за одиницю об'єму приймають одиничний куб;

2) рівні тіла мають рівні об'єми, під час руху тіла його об'єм не змінюється;

3) якщо тіло розбити на частини, що є простими тілами, то об'єм тіла дорівнює сумі об'ємів цих його частин.

Тіла з рівними об'ємами називаються *рівновеликими*. Із властивості 3 випливає, що коли тіло з об'ємом V_1 міститься усередині тіла з об'ємом V_2, то $V_1 < V_2$.

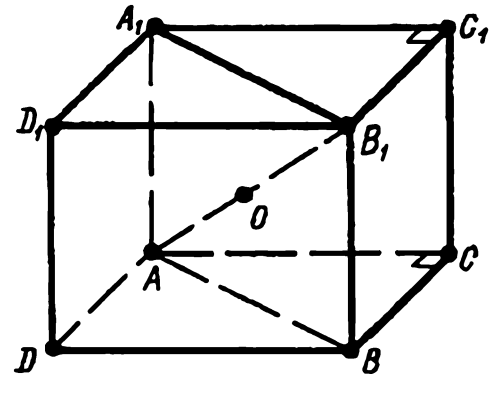


Рис. 17.100

Теорема 1. *Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку його вимірів*: $V = abc$.

Теорема 2. *Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі основи на висоту*: $V = SH$.

* Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — пряма трикутна призма, причому основа її — прямокутний трикутник ABC (рис. 17.100). Доповнимо цю призму до прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Середина O діагоналі AB_1 цього паралелепіпеда є його центром симетрії. Дана призма і призма $ABDA_1B_1D_1$, що доповнює її до паралелепіпеда, симетричні відносно точки O, а тому й рівновеликі. Нехай V і V_1 — відповідно об'єми даної призми і паралелепіпеда, тоді

$$V = \frac{1}{2}V_1 = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot C_1C = S_{\Delta ABC} \cdot C_1C = S \cdot H.$$

Розглянемо довільну пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 17.101). Якщо ΔABC не прямокутний, то його можна розбити на два прямокутні трикутники: ADC і BDC. Отже,

$$V = V_1 + V_2 = S_{\Delta ADC} \cdot H + S_{\Delta BDC} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot H = S \cdot H.$$

Таким чином, теорема справедлива для будь-якої прямої трикутної призми. Якщо є пряма n-кутна призма ($n > 3$), розіб'ємо її на скінченне число прямих трикутних

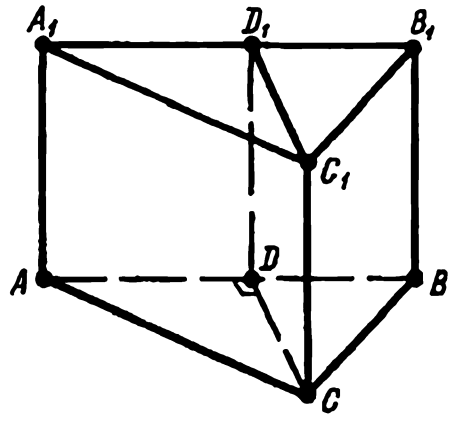


Рис. 17.101

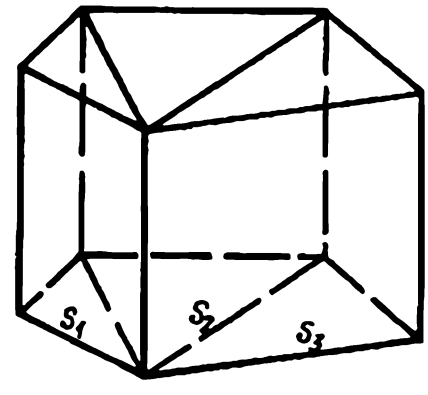


Рис. 17.102

призм (рис. 17.102). Додавши об'єми цих трикутних призм, дістанемо об'єм n-кутної призми

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H = S \cdot H,$$

де S_1, S_2, ..., S_n — площі основ трикутних призм, S і H — площа основи і висота n-кутної призми. *

Теорема 3. *Об'єм похилої призми дорівнює добутку площі перпендикулярного перерізу на бічне ребро*: $V = S_{\text{п.п}} \cdot l$.

* Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — похила призма (рис. 17.103), $A_2B_2C_2$ і $A_3B_3C_3$ — перпендикулярні перерізи цієї призми. Призма $A_2B_2C_2A_3B_3C_3$ — пряма, причому $A_2A_3 = A_1A$.

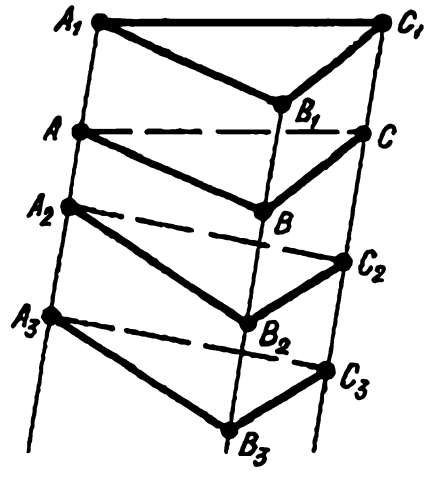


Рис. 17.103

Зауважимо, що паралельний зсув на вектор $\overrightarrow{A_1A}$ переводить многогранник $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$ у многогранник $A_3B_3C_3ABC$. Отже, ці многогранники рівновеликі. Нехай V — об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$, V_1 — об'єм призми $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$, V_2 — об'єм многогранника $A_2B_2C_2ABC$, тоді $V + V_2 = V_1 + V_2$, звідки $V = V_1$. Оскільки призма $A_3B_3C_3A_2B_2C_2$ пряма, то

$$V_1 = S_{\Delta A_3B_3C_3} \cdot A_2A_3 = S_{\text{п.п}} \cdot l = V,$$

що й треба було довести. *

Теорема 4. *Об'єм похилої призми дорівнює добутку площі основи на висоту*: $V = S \cdot H$.

* Нехай $A_2B_2C_2$ — перпендикулярний переріз похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 17.104), A_1O — висота цієї призми. Нехай $\angle AA_1O = \varphi$. Оскільки $A_1A \perp A_2B_2C_2$, а $A_1O \perp ABC$, то площини $A_2B_2C_2$ і ABC утворюють той самий кут φ, що й прямі A_1A і A_1O. За теоремою про площу ортогональної проекції $S_{A_2B_2C_2} = S_{ABC}\cos\varphi$. Згідно з теоремою 3

$$V = S_{A_2B_2C_2} \cdot A_1A = S_{ABC}\cos\varphi \cdot A_1A = S_{ABC} \cdot A_1O = S \cdot H. *$$

Задачі

1. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють a і b і утворюють кут α. Бічна поверхня має площу S. Знайти об'єм паралелепіпеда.

* Нехай H — висота паралелепіпеда, тоді $S = 2H(a + b)$, звідки $H = \dfrac{S}{2(a+b)}$.

Нехай S_0 — площа основи паралелепіпеда, тоді

$$S_0 = ab\sin\alpha, \quad V = S \cdot H = ab\sin\alpha\frac{S}{2(a+b)}.$$

Відповідь: $\dfrac{Sab\sin\alpha}{2(a+b)}$. *

2. Основою прямого паралелепіпеда є ромб площею Q, а площі діагональних перерізів, перпендикулярних до площини основи, дорівнюють M і N. Знайти об'єм паралелепіпеда.

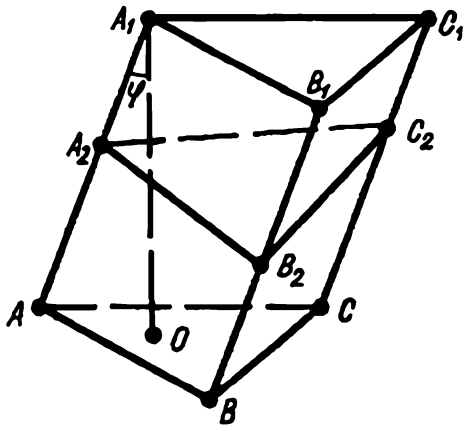


Рис. 17.104

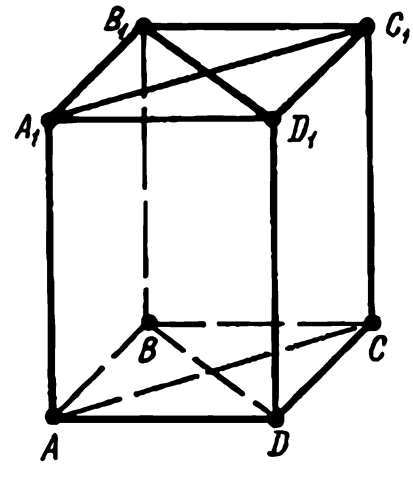


Рис. 17.105

* Нехай діагоналі ромба дорівнюють d_1 і d_2 ($AC = d_1$, $BD = d_2$) (рис. 17.105). Площа діагонального перерізу ACC_1A_1 дорівнює M. Отже, $M = AC \cdot C_1C$, або $M = d_1H$. Площа діагонального перерізу BDD_1B_1 дорівнює N, отже, $N = d_2H$. Перемножаючи дві останні рівності, маємо $MN = d_1d_2H^2$. Враховуючи, що $\dfrac{1}{2}d_1d_2 = Q$, маємо $MN = 2QH^2$, звідки

$$H = \sqrt{\frac{MN}{2Q}} \text{ і } V = Q \cdot H = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{MNQ}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{MNQ}$. *

3. Всі грані паралелепіпеда — рівні між собою ромби із стороною a та гострим кутом α. Знайти об'єм паралелепіпеда.

* Нехай B_1O — висота даного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.106). Оскільки $ABCD$ — ромб, то BD — бісектриса кута ABC; $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = \alpha$. Тому точка O лежить на

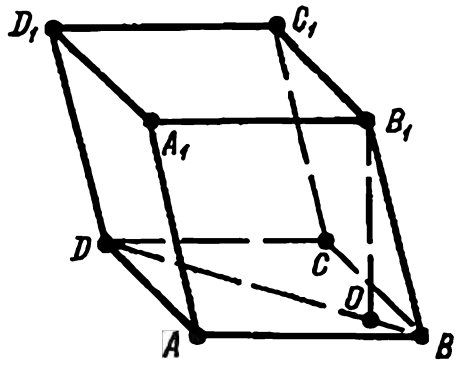


Рис. 17.106

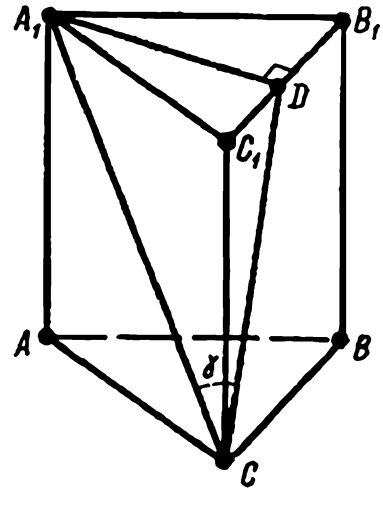


Рис. 17.107

прямій BD. Використовуючи формулу трьох косинусів, маємо $\cos\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}\cos x$, де $x = \angle OBB_1$, звідки $\cos x = \dfrac{\cos\alpha}{\cos(\alpha/2)}$. З прямокутного трикутника OBB_1 маємо

$$B_1O = a\sin x = a\sqrt{1-\cos^2 x} = a\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha/2)}}; \quad S_0 = a^2\sin\alpha$$

(S_0 — площа основи).

Тепер знаходимо об'єм

$$V = S_0 \cdot B_1O = a^3\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha/2)}}\sin\alpha.$$

Відповідь: $a^3\sin\alpha\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha/2)}}$.

Зауваження. Перетворюючи підкореневий вираз, маємо

$$\frac{\cos^2(\alpha/2)-\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha/2)} = \frac{1+\cos\alpha-(1+\cos 2\alpha)}{2\cos^2(\alpha/2)} = \frac{\sin(3\alpha/2)\sin(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}.$$

Тепер відповідь набирає вигляду

$$V = \frac{a^2\sin\alpha}{\cos(\alpha/2)}\sqrt{\sin(3\alpha/2)\sin(\alpha/2)}.$$

4. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a. Діагональ бічної грані утворює з іншою бічною гранню кут γ. Знайти об'єм призми.

* A_1C — діагональ бічної грані ACC_1A_1 даної правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 17.107). A_1D — висота правильного трикутника $A_1B_1C_1$. Зрозуміло, що A_1D — перпендикуляр до площини CBB_1C_1, тому $\angle A_1CD$ — кут між прямою A_1C та площиною CBB_1C_1. За умовою $\angle A_1CD = \gamma$.

$A_1D=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Із прямокутного трикутника A_1DC маємо $A_1C=\frac{A_1D}{\sin\gamma}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sin\gamma}$. Із прямокутного трикутника A_1CA знаходимо

$$AA_1=\sqrt{A_1C^2-AC^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4\sin^2\gamma}-a^2}=\frac{a}{2\sin\gamma}\sqrt{3-4\sin^2\gamma}.$$

Шуканий об'єм

$$V=S_{ABC}\cdot AA_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a}{2\sin\gamma}\sqrt{3-4\sin^2\gamma}.$$

Відповідь: $\frac{a^3}{8\sin\gamma}\sqrt{9-12\sin^2\gamma}$. *

5. Побудувати переріз трикутної призми площиною, що паралельна бічній грані і проходить через точку перетину медіан основи. У якому відношенні цей переріз поділяє об'єм призми?

* Нехай M — точка перетину медіан основи трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 17.108). Проводимо через точку M відрізок $PQ \parallel CB$. У площині бічної грані ACC_1A_1 проводимо відрізок

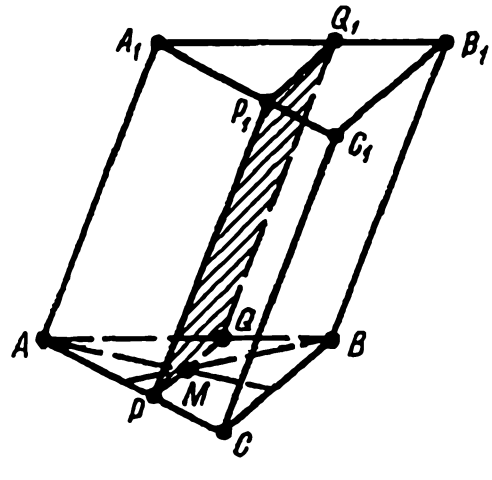


Рис. 17.108

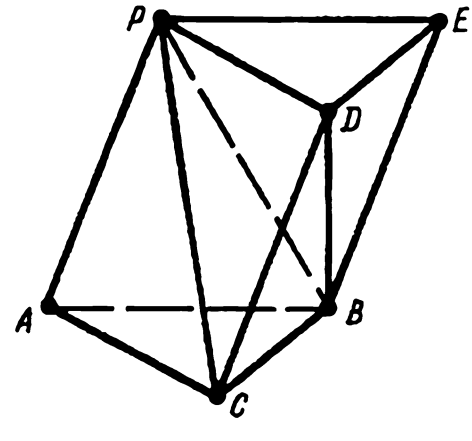


Рис. 17.109

$PP_1 \parallel CC_1$. Далі проводимо відрізки $P_1Q_1 \parallel C_1B_1$ і $Q_1Q \parallel B_1B$. Шуканий переріз — паралелограм PQQ_1P_1. Цей переріз поділяє призму $ABCA_1B_1C_1$ на дві призми $APQA_1P_1Q_1$ та $PCBQP_1C_1B_1Q_1$, в яких однакові висоти; отже, об'єми їх відносяться як площі основ: $S_{APQ}:S_{PCBQ}=$

$=\frac{4}{9}S_{ABC}:\frac{5}{9}S_{ABC}=4:5$. Відповідь: 4 : 5. *

6.2. ***Лема.*** *Дві піраміди, які мають рівні висоти і рівновеликі основи, мають рівні об'єми.*

Теорема 1. *Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі основи на висоту:* $V=\frac{1}{3}S\cdot H$, *де* S *— площа основи,* H *— висота піраміди.*

* Доповнимо трикутну піраміду $PABC$ до трикутної призми $ABCPED$, у якої такі самі висота і основа (рис. 17.109). Ця призма складається з трьох пірамід: $PABC$, $BPDE$ та $PBCD$. Доведемо, що їх об'єми рівні. У пірамід $PABC$ та $BPDE$ рівні висоти і рівновеликі основи. Згідно з лемою ці піраміди мають рівні об'єми. У пірамід $PBCD$ та $PBDE$ спільна висота і рівновеликі основи, бо $\Delta BCD=\Delta DBE$. Таким чи-

ном, об'єм піраміди $PABC$ втричі менший від об'єму призми $ABCPED$: $V = \frac{1}{3}S \cdot H$,

що й треба було довести.

Нехай є n-кутна піраміда ($n > 3$) (рис. 17.110). Розіб'ємо її на кілька трикутних пірамід діагональними перерізами, як показано на рис. 17.110. Нехай $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — об'єми утворених пірамід, а V — об'єм даної піраміди, тоді

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right)H = \frac{1}{3}S \cdot H,$$

де S — площа основи даної піраміди. *

Теорема 2. *Об'єм V зрізаної піраміди може бути знайдений за формулою* $V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$, *де H — висота зрізаної піраміди, S_1 та S_2 — площі її основ.*

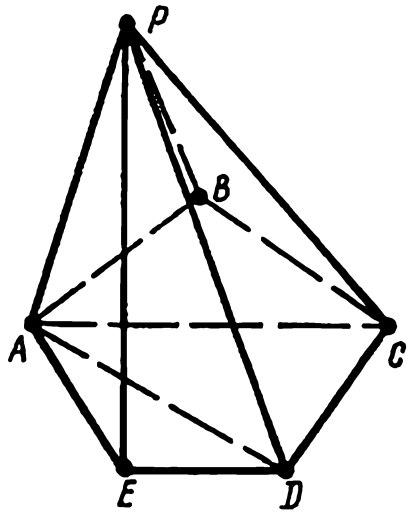


Рис. 17.110

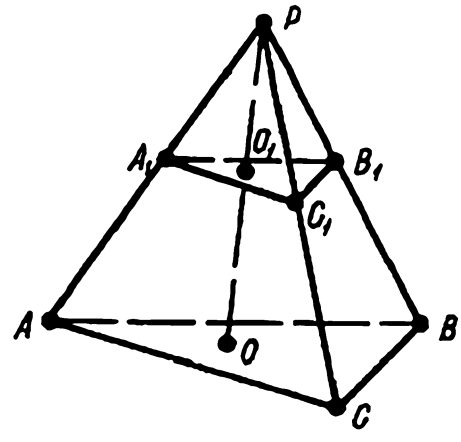


Рис. 17.111

* Доповнимо зрізану піраміду до повної (рис. 17.111), $O_1O = H$ — висота зрізаної піраміди. Площі основ відповідно дорівнюють S_1, S_2 ($S_1 > S_2$). Висота доповняльної піраміди, як було доведено в задачі 4 з п.4.6: $PO_1 = \frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$. Об'єм $V = V_1 - V_2$,

де V_1 і V_2 — відповідно об'єми пірамід $PABC$ і $PA_1B_1C_1$, а V — об'єм зрізаної піраміди. Отже,

$$V = \frac{1}{3}PO \cdot S_1 - \frac{1}{3}PO_1 \cdot S_2 = \frac{1}{3}\left(PO_1 + H\right)S_1 - \frac{1}{3}PO_1 \cdot S_2 = \frac{1}{3}HS_1 +$$

$$+\frac{1}{3}PO_1\left(S_1 - S_2\right) = \frac{1}{3}HS_1 + \frac{1}{3}\frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\left(S_1 - S_2\right) = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),$$

що й треба було довести. *

6.3. Опуклий многогранник, усі вершини якого лежать у двох паралельних площинах, називається *призматоїдом*. Зокрема, призма, піраміда та зрізана піраміда — це окремі випадки призматоїда. Всі бічні грані призматоїда є трикутниками або чотирикутниками, причому чотирикутні грані — це трапеції або паралелограми.

Теорема Симпсона. *Об'єм V призматоїда можна знайти за формулою* $V=\frac{1}{6}H\left(S_1+4S+S_2\right)$, *де H — його висота (відстань між площинами основ), S_1 та S_2 — площі основ, S — площа середнього перерізу (перерізу, що паралельний площинам основ і поділяє висоту навпіл).*

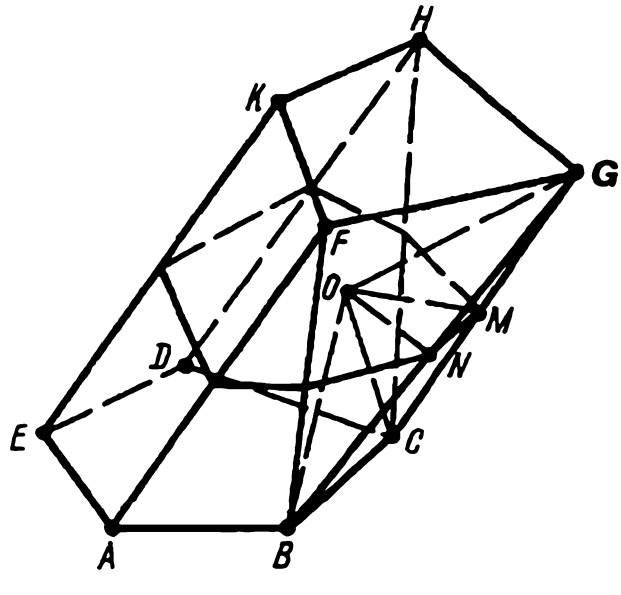


Рис. 17.112

* На рис. 17.112 показано призматоїд *ABCDEFGHK*. Середній переріз — опуклий многокутник, сторони якого є середніми лініями бічних граней. Виберемо у середньому перерізі довільну точку O і сполучимо її з усіма вершинами призматоїда. Ми дістанемо кілька пірамід із спільною вершиною O. Піраміда *OABCDE* має об'єм $V_1=\frac{1}{6}HS_1$; піраміда *OFGHK* має об'єм $V_2=\frac{1}{6}HS_2$. Основи інших пірамід належать бічним граням призматоїда. Можна вважати основи цих пірамід трикутниками, бо чотирикутну грань можна розділити діагоналлю на два трикутники. Розглянемо, наприклад, піраміду *OBCG*. Оскільки

$$S_{GMN}=\frac{1}{4}S_{GBC},\ \text{то}\ V_{OBCG}=4V_{OGMN}=4\cdot\frac{1}{6}H\cdot S_{OMN}.$$

Додавши об'єми всіх таких пірамід, дістанемо $V_3=\frac{1}{6}H\cdot 4S$. Далі маємо

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{1}{6}H\left(S_1+4S+S_2\right),$$

що й треба було довести. *

Задачі

1. Сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a. Бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм піраміди.

* На рис. 17.113 показано n-ну частину правильної n-кутної піраміди з вершиною P. З рівнобедреного трикутника AOB, пам'ятаючи, що $\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$, знаходимо

$$OB=\frac{a}{2\sin\left(\pi/n\right)}.$$

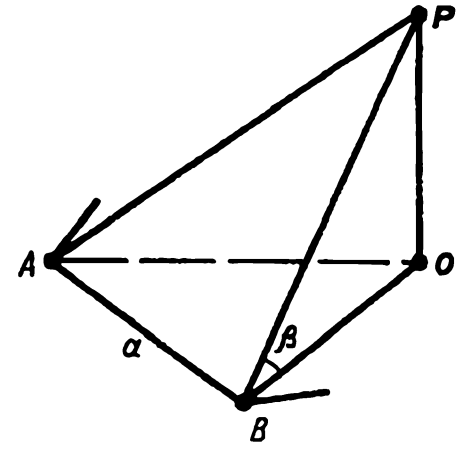


Рис. 17.113

Із прямокутного трикутника POB маємо $PO=\frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\sin\left(\pi/n\right)}$. Нехай S — площа основи n-кутної піраміди:

$$S = nS_{AOB} = n \cdot \frac{1}{2} OB^2 \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}(\pi/n).$$

Отже,

$$V = \frac{1}{3} S \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}(\pi/n)\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin(\pi/n)}.$$

Відповідь: $\dfrac{na^3 \operatorname{ctg}(\pi/n)\operatorname{tg}\beta}{24\sin(\pi/n)}$. *

2. Основою піраміди є правильний трикутник із стороною a, одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з площиною основи кут γ (рис. 17.114). Знайти об'єм піраміди.

* Оскільки грань PAB перпендикулярна до площини основи піраміди, то PO — висота піраміди. Легко помітити, що точка O рівновіддалена від сторін AC і BC, отже, O — середина сторо-

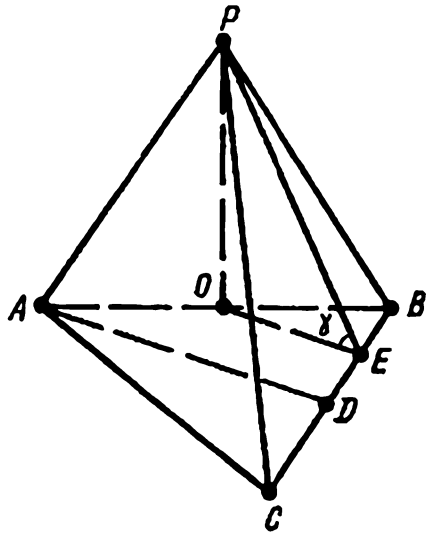


Рис. 17.114

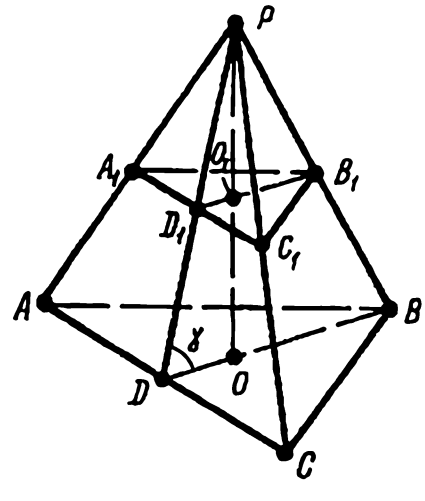


Рис. 17.115

ни AB. Нехай AD — висота ΔABC, $OE \parallel AD$. Маємо $OE = \dfrac{1}{2} AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $\angle OEP$ — лінійний кут двогранного кута BC: $\angle OEP = \gamma$. З ΔPOE маємо $PO = OE \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}\gamma$. тоді

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}\gamma$. Відповідь: $\dfrac{a^3}{16}\operatorname{tg}\gamma$. *

3. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють a і b ($a > b$). Двогранний кут при ребрі більшої основи дорівнює γ. Знайти об'єм зрізаної піраміди.

* Доповнимо зрізану піраміду $ABCA_1B_1C_1$ до повної піраміди $PABC$ (рис. 17.115). Висоти повної і доповняльної пірамід визначаємо за формулами

$$PO = OD\operatorname{tg}\gamma = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\gamma; \quad PO_1 = O_1D_1\operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\gamma,$$

тоді

$$O_1O = PO - PO_1 = \frac{a-b}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\gamma.$$

Знаходимо об'єм

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2\sqrt{3}}\right)\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{ab\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\left(a^3-b^3\right)}{24}\operatorname{tg}\gamma.$$

Відповідь: $\frac{1}{24}\left(a^3-b^3\right)\operatorname{tg}\gamma$. *

4. У правильній чотирикутній піраміді *PABCD* (рис. 17.116) проведено переріз через сторону *AB* і середину бічного ребра *PC*. У якому відношенні цей переріз поділяє об'єм піраміди?

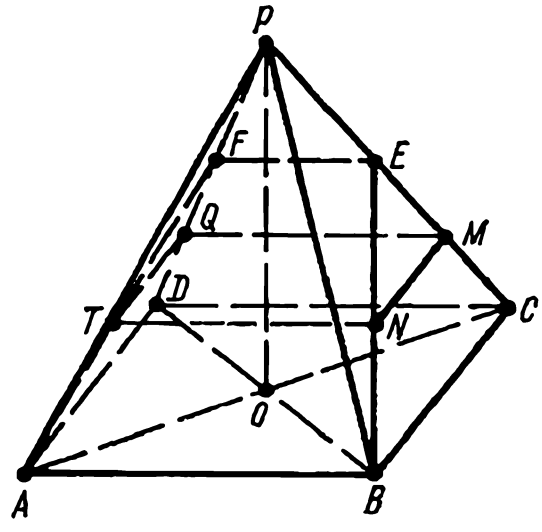


Рис. 17.116

* Нехай *E* — середина бічного ребра *PC* правильної чотирикутної піраміди *PABCD*. Проведемо переріз піраміди площиною *ABE*. Відрізок *BE* — слід січної площини на грані *PBC*. Оскільки пряма *AB* паралельна грані *PCD*, січна площина залишає на грані *PDC* слід, паралельний *AB*. Проводимо відрізок $EF \parallel CD$. Трапеція *ABEF* і є перерізом, який розбиває піраміду *PABCD* на два многогранники: чотирикутну піраміду *PABEF* і призматоїд *FEABCD*. Нехай сторона основи піраміди *PABCD* дорівнює *a*, а її висота *H*. Знайдемо об'єм призматоїда за теоремою Симпсона: $S_1=a^2$. $S_2=0$. Середній переріз призматоїда — прямокутник *MNTQ*: $MN=\frac{a}{2}$. $TN=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)=\frac{3a}{4}$. $S=\frac{3a^2}{8}$ — площа середнього перерізу. Позначимо через V_1 об'єм призматоїда, тоді

$$V_1=\frac{1}{12}H\left(a^2+4\cdot\frac{3a^2}{8}+0\right)=\frac{5}{24}a^2H=\frac{5}{8}V.$$

де V — об'єм піраміди *PABCD*. Отже, об'єм піраміди *PABEF* дорівнює $\frac{3}{8}V$ і даний переріз поділяє об'єм піраміди у відношенні 3 : 5. Відповідь: 3 : 5. *

6.4. Розглянемо *об'єм циліндра, конуса* і *зрізаного конуса*. Нехай *H* — висота, *R* — радіус циліндра або конуса.

Теорема 1. *Об'єми циліндра і конуса дорівнюють відповідно* $V_ц=\pi R^2H$, $V_к=\frac{1}{3}\pi R^2H$.

Теорема 2. *Об'єм зрізаного конуса дорівнює* $V=\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)$, *де R і r — радіуси основ зрізаного конуса.*

Задачі

1. Прямокутний трикутник з катетами *a* і *b* обертається навколо гіпотенузи. Знайти об'єм утвореного тіла.

* На рис. 17.117 показано осьовий переріз даного тіла обертання, до якого входять конуси AC_1C та BC_1C із спільною основою. Нехай *V* — об'єм тіла обертання, V_1 — об'єм конуса AC_1C. V_2 — об'єм конуса BC_1C, *CD* — висота ΔABC, тоді

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}\pi CD^2\left(AD+BD\right)=\frac{1}{3}\pi CD^2\cdot AB. \qquad (П17.5)$$

Помітимо, що

$$CD^2 = \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{(ab)^2}{a^2+b^2}.$$

Із рівності (П17.5) дістаємо

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{(ab)^2}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{\pi(ab)^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Відповідь: $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. *

2. Круговий сектор з радіусом R і центральним кутом α радіан є розгорткою бічної поверхні конуса. Знайти об'єм конуса.

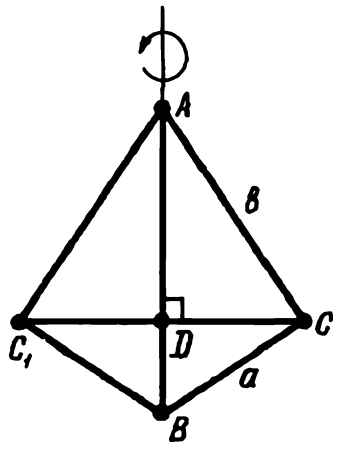


Рис. 17.117

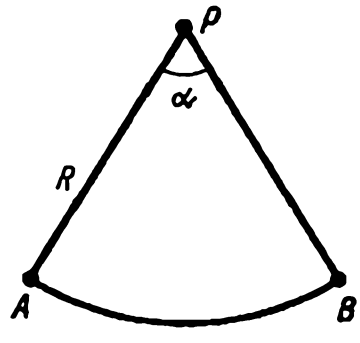


Рис. 17.118

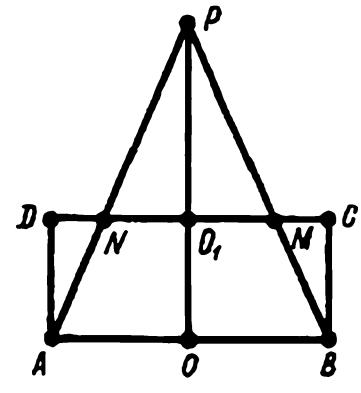


Рис. 17.119

* На рис. 17.118 показано розгортку бічної поверхні конуса. Твірна конуса дорівнює R, $\cup AB = R\alpha = 2\pi r$, де r — радіус основи конуса. Звідси $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$. Нехай висота конуса

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2},$$

об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{24}R^3\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{24}R^3\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$. *

3. Циліндр і конус рівновеликі, мають спільну основу і розміщені по один бік від площини основи. Яка частина об'єму конуса знаходиться всередині циліндра?

* На рис. 17.119 показано осьовий переріз комбінації конуса PAB та циліндра $ABCD$. Оскільки об'єми конуса і циліндра рівні, то $\frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot PO = \pi OA^2 OO_1$, звідки $PO = 3OO_1$. Зовні циліндра знаходиться конус PNM. Конуси PAB і PNM подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{PO_1}{PO} = \frac{2}{3}$.

Отже. $\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$. де V_1 і V_2 — відповідно об'єми конусів PNM і PAB. Тому всередині циліндра знаходиться $1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$ об'єму конуса PAB. Відповідь: $\frac{19}{27}$. *

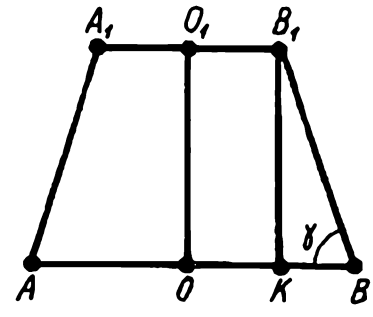


Рис. 17.120

4. У зрізаному конусі (рис. 17.120) відношення площ основ дорівнює 4, твірна має довжину l і утворює з площиною більшої основи кут γ. Знайти об'єм зрізаного конуса.

* Осьовий переріз зрізаного конуса — це трапеція ABB_1A_1, $\gamma = \angle ABB_1$, $l = BB_1$, O_1O — висота. Нехай $O_1B_1 = r$, $OB = R$. За умовою $4\pi r^2 = \pi R^2$, отже, $R = 2r$; $B_1K \parallel O_1O$, $BK = BO - B_1O_1 = R - r = r$. З ΔBB_1K знаходимо $B_1K = O_1O = l\sin\gamma$; $BK = l\cos\gamma$, $R = 2l\cos\gamma$, а об'єм зрізаного конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi l\sin\gamma\left(4l^2\cos^2\gamma+2l^2\cos^2\gamma+l^2\cos^2\gamma\right)=\frac{7}{3}\pi l^3\sin\gamma\cos^2\gamma.$$

Відповідь: $\frac{7}{3}\pi l^3\sin\gamma\cos^2\gamma$. *

6.5. Розглянемо *об'єм тіла обертання і об'єм кулі та її частин.*

Нехай криволінійна трапеція, обмежена віссю Ox, прямими $x = a$, $x = b$ та графіком неперервної зростаючої невід'ємної функції $y = f(x)$, обертається навколо осі Ox

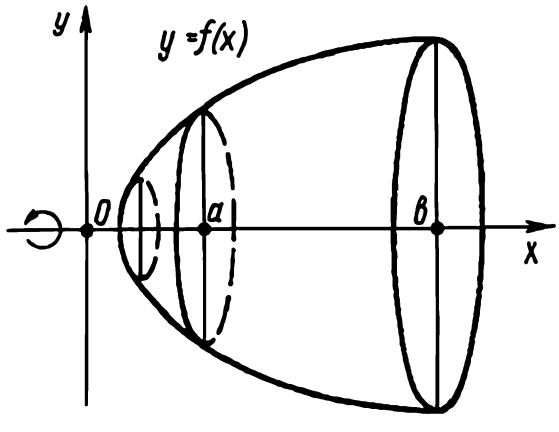


Рис. 17.121

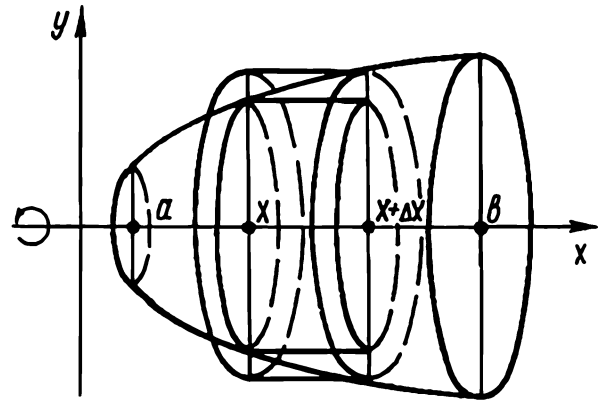


Рис. 17.122

(рис. 17.121), внаслідок чого утворюється тіло обертання. Переріз цього тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, є круг або точка. На проміжку $(a; b)$ виберемо точку x. Переріз, проведений через цю точку перпендикулярно до осі Ox, є круг площею $S(x) = \pi f^2(x)$. Об'єм частини тіла обертання, обмеженої перерізами, проведеними через точки a і x, позначимо через $V(x)$, а об'єм даного тіла обертання — через V.

Теорема 1. $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

* Надамо x приросту $\Delta x > 0$ $(x + \Delta x < b)$. Побудуємо два циліндри із спільною висотою Δx (рис. 17.122). Менший циліндр має основою круг площею $S(x)$, а біль-

ший — круг площею $S(x+\Delta x)$. Якщо ΔV — приріст об'єму тіла обертання, то $S(x)\,\Delta x < \Delta V < S(x+\Delta x)\,\Delta x$, звідки

$$S(x) < \frac{\Delta V}{\Delta x} < S(x+\Delta x).$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то неперервна і функція

$S(x) = \pi f^2(x)$, отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} S(x+\Delta x) = S(x)$.

Переходячи до границі в подвійній нерівності, маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x), \text{ тобто } V'(x) = S(x).$$

Об'єм $V(x)$ є первісною для функції $S(x)$ на проміжку $[a; b]$. Звідси маємо

$$V = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx. *$$

Теорема 2. *Об'єм кулі дорівнює* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, *де* R *— радіус кулі.*

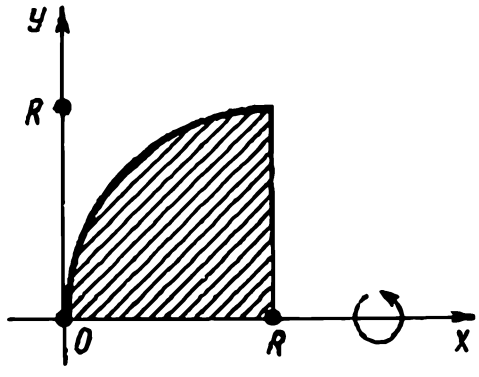


Рис. 17.123

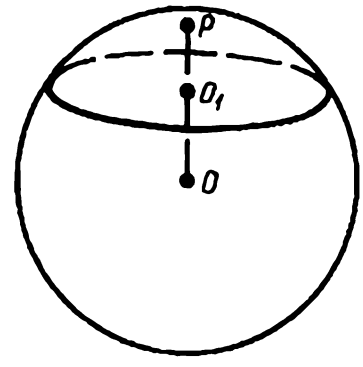


Рис. 17.124

* На рис. 17.123 показано чверть круга радіуса R з центром у точці $(R; 0)$. Рівняння кола цього круга $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, звідки $y^2 = 2Rx - x^2$. Функція $y = \sqrt{2Rx - x^2}$, $x \in [0; R]$, неперервна, зростаюча, невід'ємна, отже, для знаходження об'єму тіла обертання можна застосувати попередню теорему. Внаслідок обертання чверті круга навколо осі Ox утворюється півкуля. Отже,

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_0^R \left(2Rx - x^2\right)dx = \pi\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

звідки $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. *

Кульовим сегментом називається частина кулі, що відтинається від неї площиною (рис. 17.124). Висотою кульового сегмента називається відрізок PO_1, що сполучає полюс кулі з центром основи кульового сегмента.

Кульовий сегмент можна розглядати як тіло, що утворилось обертанням кругового сегмента навколо діаметра, перпендикулярного до його хорди. Формулу об'єму кульового

сегмента виводять так само, як і формулу об'єму кулі, тільки інтегрують на проміжку [0; H] (H — висота кульового сегмента):

$$V = \pi \int_0^H \left(2Rx - x^2\right)dx = \pi\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^H = \pi\left(RH^2 - \frac{1}{3}H^3\right).$$

Отже, об'єм кульового сегмента $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$.

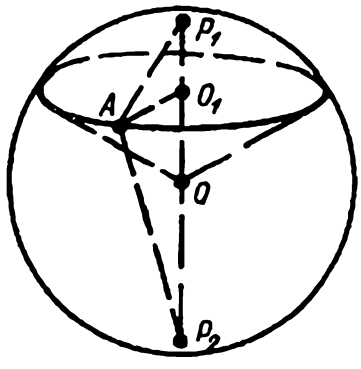


Рис. 17.125

Кульовим сектором називається тіло, утворене обертанням кругового сектора навколо осі, що містить один з його граничних радіусів (рис. 17.125). Кульовий сектор складається з кульового сегмента і конуса. Тому його об'єм є сумою об'ємів кульового сегмента V_1 і конуса V_2: $V = V_1 + V_2$. Висота P_1O_1 кульового сегмента є також висотою і кульового сектора. Маємо

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H), \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2(R - H),$$

де r — радіус конуса. Нехай P_1, P_2 — полюси кулі, $O_1A = r$. З прямокутного трикутника P_1AP_2 знаходимо $r^2 = H(2R - H)$, отже,

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi H(2R - H)(R - H),$$

Об'єм кульового сектора

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H) + \frac{1}{3}\pi H(2R - H)(R - H) = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

або

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Розглянемо *площу поверхні сфери і кульового сегмента.*

Означення. Площа поверхні кульового сегмента дорівнює границі приросту об'єму відповідного кульового сектора до приросту радіуса, коли приріст радіуса прямує до нуля:

$$S = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V'(R).$$

На рис. 17.126 заштриховано осьовий переріз тіла, утвореного в результаті приросту кульового сектора OAB. Маємо

$$H = AC = OA - OC = R - R\cos\gamma = R(1 - \cos\gamma).$$

Об'єм кульового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\gamma).$$

У процесі приросту об'єму змінюється лише R, а кут γ лишається незмінним, тому $S = V'(R) = 2\pi R^2(1 - \cos\gamma) = 2\pi RH$, де S — площа поверхні кульового сегмента. Приймаючи $H = 2R$, дістаємо площу поверхні сфери $S = 4\pi R^2$.

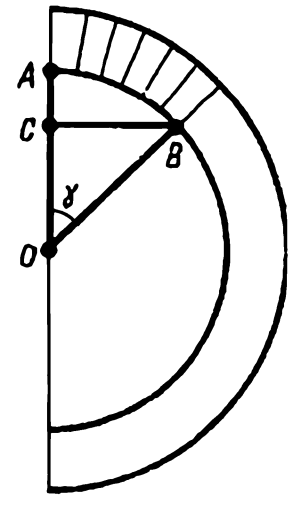


Рис. 17.126

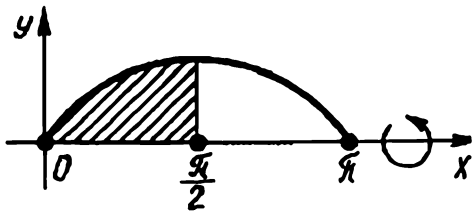


Рис. 17.127

Задачі

1. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням однієї арки синусоїди навколо осі Ox (рис. 17.127).

* $V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$ (на проміжку $[0; \pi/2]$ функція $y = \sin x$ неперервна, зростаюча і невід'ємна). Оскільки

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

то

$$V = 2\pi\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Відповідь: $\pi^2/2$. *

2. Дві рівні кулі радіуса R розміщено так, що центр кожної з них лежить на поверхні іншої. Знайти об'єм спільної частини куль.

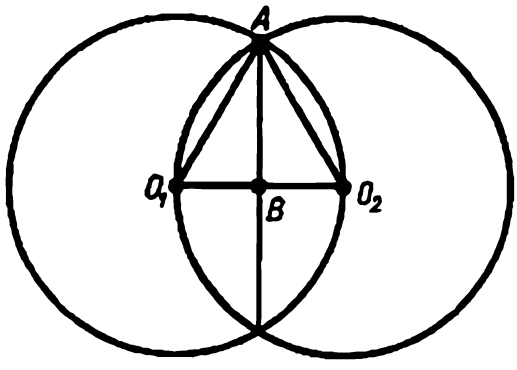


Рис. 17.128

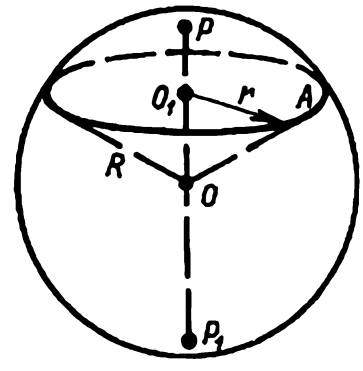


Рис. 17.129

* На рис. 17.128 показано осьовий переріз даних куль з центрами O_1 і O_2, A — одна з точок перетину великих кіл, ΔAO_1O_2 — рівносторонній, AB — висота цього трикутника, $O_1B = R/2$. Спільна частина куль — це об'єднання двох рівних кульових сегментів. Нехай V — об'єм одного такого сегмента:

$$V = \frac{1}{3}\pi O_1B^2\left(3R - O_1B\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{4}\left(3R - \frac{R}{2}\right) = \frac{5}{24}\pi R^3.$$

Об'єм спільної частини куль дорівнює $2V$, тобто $\frac{5}{12}\pi R^3$. Відповідь: $\frac{5}{12}\pi R^3$. *

3. Радіус кулі R, а радіус кола основи кульового сектора r. Знайти об'єм кульового сектора, якщо його висота менша від R (рис. 17.129).

* Нехай $O_1A = r$ — радіус основи кульового сектора, $PO_1 = H$ — його висота. Помітимо, що $r^2 = PO_1 \cdot P_1O_1$ (P_1P — діаметр кулі), $r^2 = H(2R - H)$, $H = R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$. За умовою $H < R$, отже, $H = R - \sqrt{R^2 - r^2}$. Знаходимо об'єм $V = \frac{2}{3}\pi R^2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)$.

Відповідь: $\frac{2}{3}\pi R^2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)$.

4. Радіус кулі дорівнює 25 см. На які частини поверхня кулі поділяється перерізом, площа якого дорівнює 96π см^2?

* Площина перерізу поділяє кулю на два кульових сегменти (рис. 17.130) з площами поверхонь S_1 і S_2; якщо $h_1 = PO_1$, $h_2 = P_1O_1$, то $S_1 = 2\pi Rh_1$, $S_2 = 2\pi Rh_2$ (P_1P — діаметр кулі), $\pi r^2 = 96\pi$. $r^2 = 96$.

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} r^2 = h_1 h_2, \\ h_1 + h_2 = 2R. \end{cases} \quad \begin{cases} 96 = h_1 h_2, \\ 50 = h_1 + h_2. \end{cases}$$

звідки $h_1 = 48$, $h_2 = 2$. Знаходимо $S_1 = 2\pi \cdot 25 \cdot 2 = 100\pi$. $S_2 = 2\pi \cdot 25 \cdot 48 = 2400\pi$. Відповідь: 100π см^2, 2400π см^2. *

Вправи

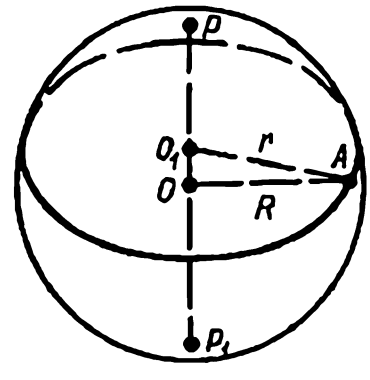


Рис. 17.130

1. Діагональ куба дорівнює d. Знайти його об'єм.

2. Всі ребра правильної n-кутної призми мають однакову довжину a. Знайти об'єм призми.

3. Виміри прямокутного паралелепіпеда відносяться як 1 : 2 : 4, а площа його повної поверхні дорівнює 112 см^2. Знайти об'єм паралелепіпеда.

4. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3, 4 і 5 см. Якщо кожне ребро збільшити на x, то площа повної поверхні збільшиться на 54 см^2. Як збільшиться об'єм паралелепіпеда?

5. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють a та b і утворюють кут γ, більша діагональ паралелепіпеда d. Знайти об'єм паралелепіпеда ($0 < \gamma < \pi/2$).

6. Бічне ребро похилої призми дорівнює 10 см. Відстані між бічними ребрами дорівнюють 3, 4 і 5 см. Знайти об'єм призми.

7. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2, S_3. Знайти його об'єм.

8. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з двома суміжними бічними гранями кути α і β. Знайти об'єм паралелепіпеда.

9. Провести переріз трикутної призми площиною, що проходить через бічне ребро і поділяє об'єм призми навпіл.

10. Знайти об'єм рівностороннього циліндра з радіусом R.

11. Знайти об'єм рівностороннього конуса з радіусом R.

12. Радіус конуса дорівнює R, а твірна l. Знайти об'єм конуса.

13. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайти об'єм циліндра.

14. Рівносторонній трикутник із стороною a обертається навколо своєї сторони. Знайти об'єм тіла обертання.

15. Паралельно осі циліндра на відстані d від неї проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу в α радіан. Знайти об'єм циліндра, якщо площа перерізу рівна S.

16. В основі конуса хорда довжиною a стягує дугу величиною α. Кут між твірною і площиною основи дорівнює γ. Знайти об'єм конуса.

17. Прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим кутом γ обертається навколо гіпотенузи. Знайти об'єм тіла обертання.

18. Площа повної поверхні конуса дорівнює 588π см^2, а висота відноситься до твірної як 35 : 37. Знайти об'єм конуса.

19. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна l утворює з площиною більшої основи кут α. Знайти об'єм зрізаного конуса.

20. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4π і 9π см^2, а його об'єм 57π см^3. Знайти кут між твірною зрізаного конуса і площиною більшої основи.

21. Вершину верхньої основи куба з ребром a сполучено з вершинами нижньої основи. Знайти об'єм утвореної піраміди.

22. Кожне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює a. Знайти об'єм піраміди.

23. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Двогранний кут при ребрі основи дорівнює γ. Знайти об'єм піраміди.

24. Всередині призми з об'ємом V взято довільну точку O і побудовано дві піраміди з вершиною O, що мають основами основи призми. Знайти суму об'ємів цих пірамід.

25. Сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро b. Знайти об'єм піраміди.

26. Всі плоскі кути при вершині трикутної піраміди прямі, а бічні ребра дорівнюють a, b, c. Знайти об'єм піраміди.

27. Основою піраміди є прямокутник із сторонами a, b. Усі бічні ребра мають довжину c. Знайти об'єм піраміди.

28. Основою піраміди є ромб із стороною a і гострим кутом γ. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм піраміди.

29. Основою піраміди є трикутник із сторонами 6, 8, 10. Кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм піраміди.

30. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox та лініями $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$.

31. Площина, перпендикулярна до діаметра кулі, поділяє його на частини 3 і 9 см. В якому відношенні ця площина поділяє об'єм кулі?

32. Висота кульового сегмента в 3 рази менша за радіус кулі. Яку частину об'єму кулі становить об'єм кульового сегмента?

33. Круговий сектор з кутом α ($0° < \alpha < 90°$) і радіусом R обертається навколо одного з граничних радіусів. Знайти об'єм тіла обертання.

34. В осьовому перерізі кульового сегмента хорда має довжину a і стягує дугу величиною β. Знайти об'єм і площу поверхні кульового сегмента.

35. Радіус кульового сектора дорівнює R, а кут між радіусами у його осьовому перерізі дорівнює α. Знайти об'єм кульового сектора.

36. Площина поділяє кулю на дві частини, об'єми яких дорівнюють 100π і 188π см^3. Знайти площу поверхні кулі.

37. Площина перерізу поділяє сферу на дві частини з площами поверхонь 12π і 24π дм^2. Знайти площу перерізу (круга).

§ 7. Комбінації геометричних тіл

7.1. При розв'язуванні задач на комбінацію многогранників важливу роль відіграють перерізи многогранників. Покажемо це на характерних прикладах.

Задачі

1. У правильну трикутну піраміду вписано правильну трикутну призму так, що одна основа призми лежить у площині основи піраміди, а вершини другої основи лежать на бічних ребрах піраміди. Бічна грань призми — квадрат із стороною a. Ребро основи піраміди дорівнює b (рис. 17.131). Знайти об'єм піраміди.

* Розглянемо переріз комбінації даних тіл площиною POB (PO — висота піраміди): $\Delta PO_1N_1 \sim \Delta POB$. Звідси маємо

$$\frac{PO}{PO_1} = \frac{OB}{O_1N_1} \text{ або } \frac{PO_1 + OO_1}{PO_1} = \frac{OB}{O_1N_1}. \quad \frac{PO_1 + a}{PO_1} = \frac{b}{a}.$$

звідси $$PO_1 = \frac{a^2}{b-a}, \quad PO = a + \frac{a^2}{b-a} = \frac{ab}{b-a}.$$

Об'єм піраміди

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{ab}{b-a}\right)\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}ab^3}{12(b-a)}.$$ *

2. Дано куб з ребром a (рис. 17.132). Точки M, N, P — відповідно середини ребер AB, BC, BB_1. Знайти об'єм піраміди D_1MNP.

* Крім піраміди D_1MNP куб містить ще чотири піраміди: $PMBN$, $D_1PNCC_1B_1$, $D_1AMPB_1A_1$, D_1AMNCD з об'ємами відповідно V_1, V_2, V_3, V_4. Піраміди з об'ємами V_2, V_3, V_4 рівновеликі. Нехай V — шуканий об'єм, а V_k — об'єм куба, тоді $V=V_k-3V_2-V_1$. Помітимо, що $V_k=a^3$. $V_1=\frac{1}{3}PB\cdot\frac{1}{2}BM\cdot BN=\frac{1}{48}a^3$. $V_2=\frac{1}{3}a\left(a^2-S_{BMN}\right)=\frac{7}{24}a^3$. Остаточно маємо $V=a^3-\frac{a^3}{48}-3\cdot\frac{7}{24}a^3$. Відповідь: $\frac{5}{48}a^3$. *

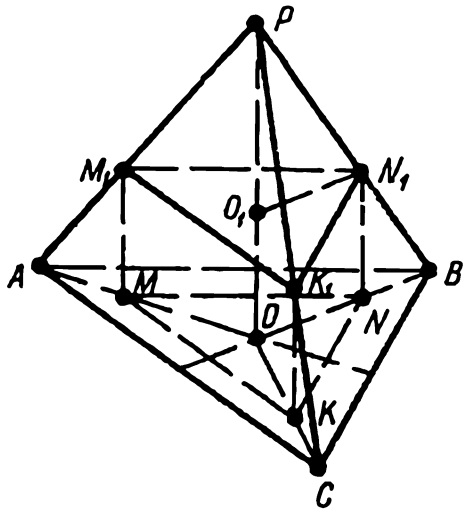


Рис. 17.131

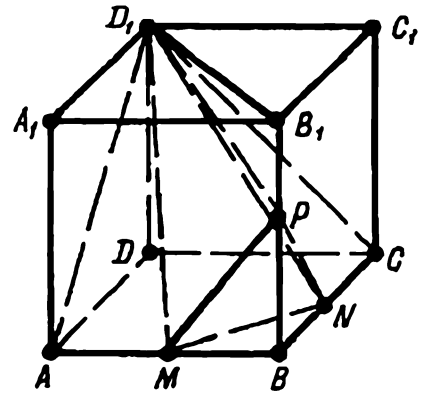


Рис. 17.132

3. Правильна трикутна призма має висоту h і сторону основи a (рис. 17.133). Правильна трикутна піраміда має з призмою спільну основу і розміщена по один бік з нею відносно цієї основи. Висота піраміди дорівнює $2h$. Знайти площу повної поверхні тієї частини піраміди, яка лежить усередині призми.

* Знаходимо площі основ:

$$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\quad S_{A_2B_2C_2}=\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Нехай $S_б$ — площа бічної поверхні зрізаної піраміди, тоді $S_б=3S$, де S — площа трапеції ABB_2A_2. Із ΔPOD маємо

$$PD=\sqrt{PO^2+DO^2}=\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{12}},$$

тоді $$DD_2=\frac{1}{2}PD=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{48}};$$

$$S=\frac{1}{2}\left(AB+A_2B_2\right)DD_2=\frac{a\sqrt{3}}{16}\sqrt{48h^2+a^2}.$$

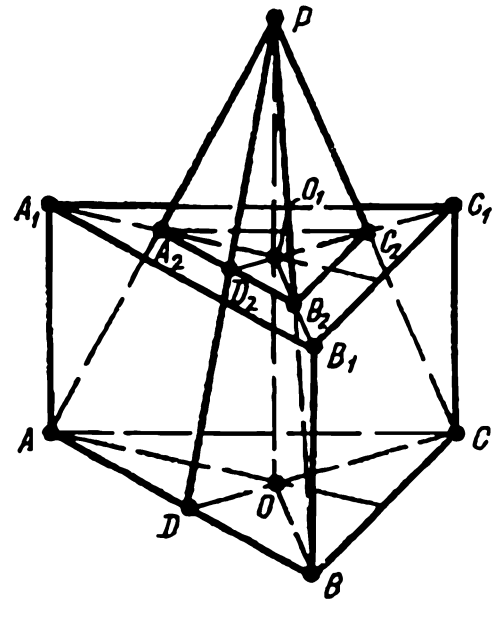


Рис. 17.133

Отже, $S_б = \frac{3a\sqrt{3}}{16}\sqrt{48h^2 + a^2}$,

$$S_п = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}a\sqrt{48h^2 + a^2}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{3}}{16}\left(5a + 3\sqrt{48h^2 + a^2}\right)$. *

7.2. При розв'язуванні задач на комбінації тіл обертання, як правило, досить зобразити осьовий переріз даної комбінації.

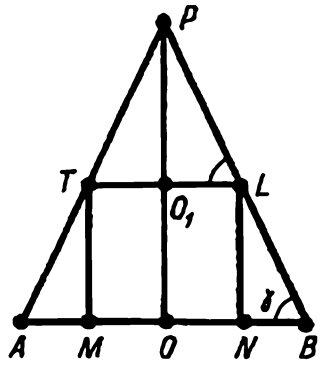


Рис. 17.134

Задачі

1. У конус вписано рівносторонній циліндр. Знайти об'єм V циліндра та площу $S_п$ його повної поверхні, якщо твірна конуса утворює з площиною його основи кут γ (рис. 17.134), а висота конуса дорівнює h.

* Осьовий переріз даної комбінації — це квадрат $MNLT$, вписаний у рівнобедрений трикутник PAB; $\angle PAB = \gamma$, $PO = h$ — висота конуса: $O_1 = PO \cap TL$; $\angle PLT = \angle PBA = \gamma$. Нехай $TM = x$, тоді $O_1L = \frac{x}{2}$. З ΔPO_1L маємо $PO_1 = O_1L \operatorname{tg}\gamma$ або $h - x = \frac{x}{2}\operatorname{tg}\gamma$, звідки $x = \frac{2h}{2 + \operatorname{tg}\gamma}$. Далі знаходимо

$$V = \pi O_1L^2 \cdot TM = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 x = \frac{\pi}{4}x^3 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2h}{2 + \operatorname{tg}\gamma}\right)^3;$$

$$S_п = 2\pi O_1L\left(O_1L + TM\right) = \frac{3\pi x^2}{2} = \frac{6\pi h^2}{\left(2 + \operatorname{tg}\gamma\right)^2}.$$

Відповідь: $\frac{2\pi h^3}{\left(2 + \operatorname{tg}\gamma\right)^3}$, $\frac{6\pi h^2}{\left(2 + \operatorname{tg}\gamma\right)^2}$. *

2. У кулю радіуса R (рис. 17.135) вписано циліндр. Відношення площі повної поверхні циліндра до площі поверхні кулі дорівнює t. Яких значень може набувати t?

* Осьовий переріз даної в умові комбінації кулі та циліндра — це прямокутник $ABCD$, вписаний в коло $\omega(0; R)$. Нехай $\angle CAB = \alpha$, тоді з ΔAOK маємо $OK = R\sin\alpha$, $AK = R\cos\alpha$. За умовою $t = \frac{S_ц}{S_к} = \frac{2\pi R\cos\alpha\left(R\cos\alpha + 2R\sin\alpha\right)}{4\pi R^2} = \frac{\cos^2\alpha + \sin 2\alpha}{2}$, тобто $t \to 0$ при $\alpha \to \pi/2$, отже, може набувати як завгодно малих додатних значень. Знаходимо $t'(\alpha) = \frac{1}{2}(2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)$, звідки $t'(\alpha) = 0$ при $\operatorname{tg} 2\alpha = 2$, або при $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$; $t' > 0$ при $0 < t < \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$; $t' < 0$ при

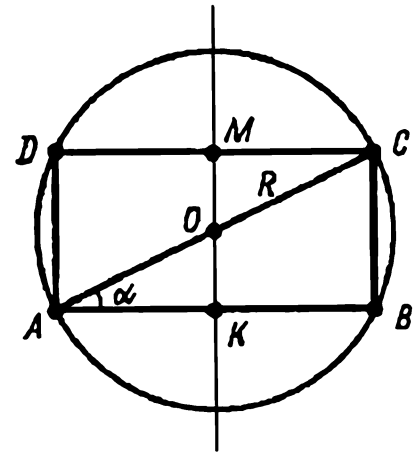


Рис. 17.135

$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, отже, $\max\limits_{(0;\pi/2)} t(\alpha) = t\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\right)$. Зауважимо, що $\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}$: $\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$: $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$: $\max\limits_{(0;\pi/2)} t(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Відповідь: $0 < t \le \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. *

3. У кулю радіуса R вписано конус, твірна якого утворює з площиною основи кут α (рис. 17.136). Знайти об'єм конуса та площу його повної поверхні.

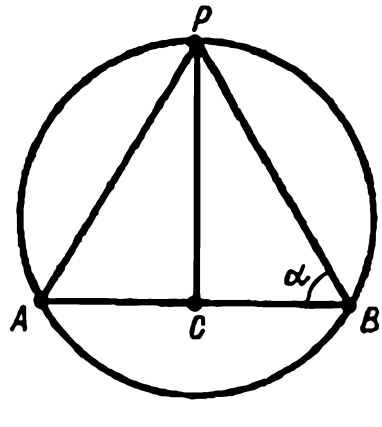


Рис. 17.136

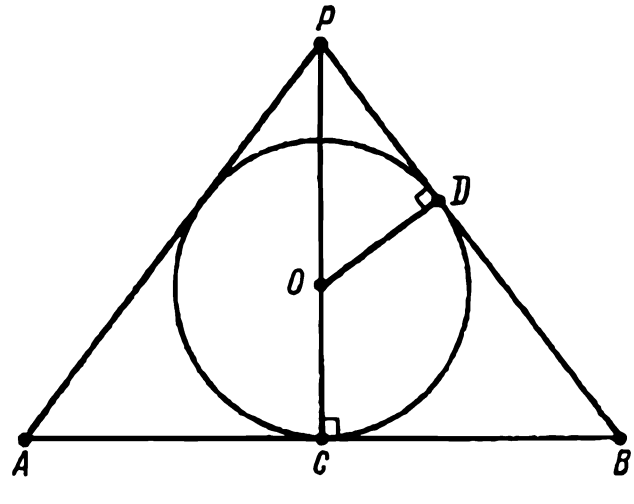


Рис. 17.137

* Осьовий переріз даної комбінації конуса і кулі — це рівнобедрений трикутник PAB, вписаний в коло радіуса R. За теоремою синусів маємо: $PA = 2R \sin\alpha$, PC — висота ΔPAB,

$$AC = PA \cos\alpha = R \sin 2\alpha,\ PC = PA \sin\alpha = 2R \sin^2\alpha.$$

Далі знаходимо

$$V = \frac{1}{3}\pi AC^2 \cdot PC = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2\alpha;$$

$$S_п = \pi AC(AC + PA) = 2\pi R^2 \sin 2\alpha \sin\alpha(1 + \cos\alpha).$$

Відповідь: $\frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2\alpha$, $2\pi R^2 \sin 2\alpha \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$. *

Зауваження. Розв'язання задачі не залежить від розміщення центра кулі, який може бути всередині конуса, на його основі або зовні конуса.

4. У конус вписано кулю радіуса r (рис. 17.137). Знайти об'єм конуса, якщо його висота дорівнює h.

* Осьовий переріз даної комбінації кулі і конуса — це рівнобедрений трикутник PAB, описаний навколо кола $\omega(O, r)$, $PC = h$ — висота конуса, $OD \perp PB$.

Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi(BC)^2 h$. Помітимо, що $\Delta POD \sim \Delta PBC$, тому

$$\frac{BC}{PC} = \frac{OD}{PD},\ \text{або}\ \frac{BC}{h} = \frac{r}{\sqrt{PO^2 - OD^2}} = \frac{r}{\sqrt{h^2 - 2rh}},$$

звідки $BC = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2rh}}$. Отже, маємо $l' = \frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$. Відповідь: $\frac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$. *

5. Кулю вписано у зрізаний конус (рис. 17.138). Довести, що їх об'єми відносяться як площі повних поверхонь.

* Осьовий переріз кулі і зрізаного конуса — це рівнобічна трапеція, описана навколо кола $\omega(O, r)$. Нехай радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють r_1 і r_2, тоді об'єм кулі $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$, об'єм зрізаного конуса $V_2 = \frac{2}{3}\pi r\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2r^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$; площа поверхні кулі $S_1 = 4\pi r^2$, площа повної поверхні зрізаного конуса $S_2 = \pi BC\left(r_1 + r_2\right) + \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)$.

Оскільки $BC = r_1 + r_2$, то

$$S_2 = \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right) + \pi\left(r_1 + r_2\right)^2 = 2\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right),$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2r^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} = \frac{V_1}{V_2},$$

що й треба було довести. *

7.3. *Многогранник* називається *вписаним* у кулю, якщо всі його вершини лежать на поверхні кулі. Всі грані вписаного многогранника є вписані многокутники. Центр

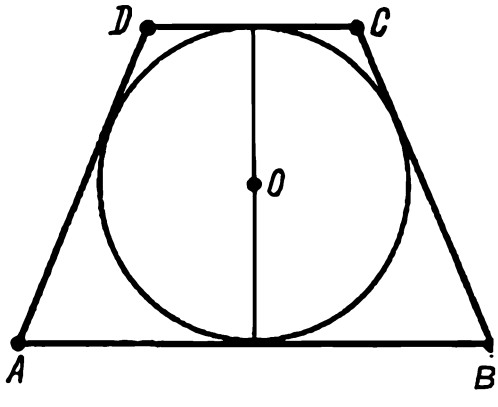


Рис. 17.138

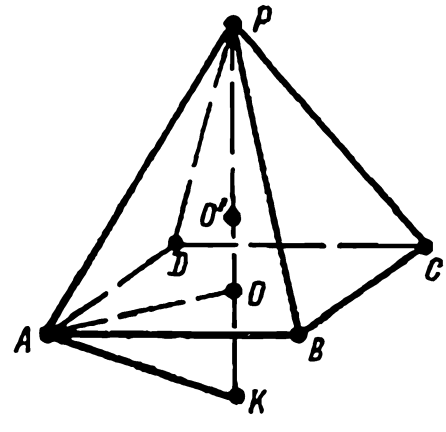


Рис. 17.139

описаної кулі лежить на перетині прямих, що проходять через центри кіл, описаних навколо граней і перпендикулярних до цих граней.

Теорема 1. *Для того щоб піраміда була вписаною, необхідно і достатньо, щоб її основою був вписаний многокутник.*

Наслідок. Будь-яка правильна або трикутна піраміда є вписаною.

Теорема 2. *Нехай центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить на прямій, яка проходить через висоту піраміди, тоді* 1) $b^2 = 2RH$, 2) $r^2 = H(2R - H)$, *де* R *— радіус описаної кулі,* H *і* b *— відповідно висота і бічне ребро піраміди, а* r *— радіус кола, описаного навколо основи піраміди.*

* Нехай PO — висота піраміди, O' — центр описаної кулі (рис. 17.139). Оскільки $O' \in PO$, то O — центр кола, описаного навколо основи піраміди, PK — діаметр описаної кулі, ΔAPK — прямокутний. Згідно з властивостями прямокутного трикутника маємо:

1) $AO^2 = PO \cdot KO$, або $r^2 = H(2R - H)$;

2) $PA^2 = PK \cdot PO$, або $b^2 = 2RH$. *

Куля називається *вписаною у многогранник*, якщо вона дотикається до всіх його граней.

Теорема 3. *Якщо кулю вписано у многогранник, то його об'єм* $V = \frac{1}{3}rS_{\text{п}}$, *де* $S_{\text{п}}$ *— площа повної поверхні многогранника,* r *— радіус вписаної кулі.*

* Сполучимо центр вписаної кулі з усіма вершинами многогранника. При цьому многогранник поділяється на кілька пірамід (кількість їх дорівнює кількості граней многогранника). Висота кожної з цих пірамід дорівнює r, а площа основи — це площа деякої грані многогранника, тому

$$V = \frac{1}{3}rS_1 + \frac{1}{3}rS_2 + \ldots + \frac{1}{3}rS_m$$

(m — кількість граней),

$$V = \frac{1}{3}r\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_m\right) = \frac{1}{3}r \cdot S_{\text{п}},$$

що й треба було довести. *

Оскільки центр вписаної кулі однаково віддалений від усіх граней многогранника, він лежить на перетині бісекторних площин всіх його двогранних кутів.

Теорема 4. *У будь-яку прикутну піраміду можна вписати кулю.*

Теорема 5. *У правильну* n*-кутну піраміду можна вписати кулю.*

* На рис. 17.140 показано n-ну частину правильної n-кутної піраміди, де PC — апофема бічної грані PAB; CO' — бісектриса кута PCO. Зрозуміло що точка O' однаково віддалена від усіх граней піраміди і є центром вписаної кулі. *

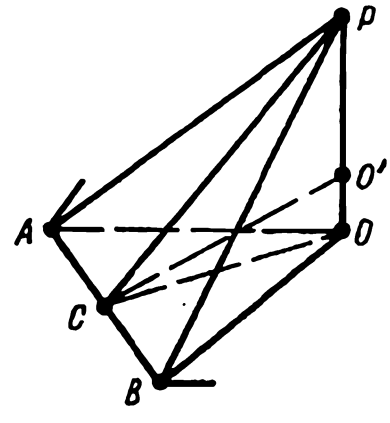


Рис. 17.140

Зауваження. $O'O = r$ — радіус вписаної кулі.

Із $\Delta O'OC$ маємо $O'O = r = OC \operatorname{tg}(\alpha/2)$ або $r = r_1 \operatorname{tg}(\alpha/2)$, де r_1 — радіус кола, вписаного в основу піраміди, α — двогранний кут при ребрі основи.

Задачі

1. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H, а сторона основи a. Знайти об'єм кулі, описаної навколо піраміди.

* Нехай $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ — радіус кола, описаного навколо основи даної піраміди, бо основою піраміди є правильний трикутник із стороною a. Центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, лежить на прямій, що проходить через висоту піраміди. За теоремою 2

$$r^2 = \frac{a^2}{3} = H\left(2R - H\right), \text{ звідки } R = \frac{a^2 + 3H^2}{6H}.$$

Далі знаходимо об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Відповідь: $\frac{\pi}{162}\left(\frac{a^2 + 3H^2}{H}\right)^3$. *

Зауваження. Виконати рисунок у задачах подібного типу досить складно, тому виявляють положення центра кулі, а саму кулю не зображують.

2. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h (рис. 17.141), а плоский кут при вершині піраміди α. Знайти площу поверхні кулі, описаної навколо піраміди.

* За умовою $PO = h$, $\angle BPC = \alpha$. Нехай $PB = b$, тоді в ΔPOB маємо

$$OB^2 = PB^2 - PO^2 = b^2 - h^2. \qquad (П17.6)$$

З ΔPBC знаходимо $BC = 2b \sin(\alpha/2) = OB\sqrt{2}$, звідки $OB = b\sqrt{2}\sin(\alpha/2)$.

Тепер з рівності (П17.6) маємо

$$2b^2 \sin^2(\alpha/2) = b^2 - h^2,\ h^2 = b^2(1 - 2\sin^2(\alpha/2)) = b^2\cos\alpha,\ h = b\sqrt{\cos\alpha}.$$

За теоремою 2 $b^2 = 2Rh$, де R — радіус описаної кулі, отже $\dfrac{h^2}{\cos\alpha} = 2Rh$, звідки $R = \dfrac{h}{2\cos\alpha}$.

тобто площа $S = 4\pi R^2 = 4\pi\dfrac{h^2}{4\cos^2\alpha} = \dfrac{\pi h^2}{\cos^2\alpha}$. Відповідь: $\dfrac{\pi h^2}{\cos^2\alpha}$. *

У випадку, коли піраміда не є правильною, треба точно встановити положення центра описаної кулі.

3. Основою піраміди $PABC$ (рис. 17.142) є ΔABC, у якого $AB = c$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. Ребро $PA = m$ перпендикулярне до площини основи. Знайти об'єм кулі, описаної навколо піраміди.

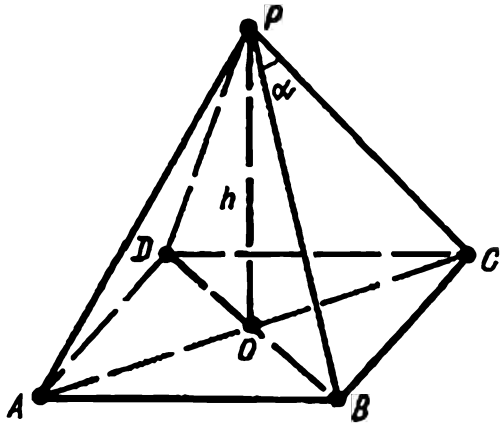


Рис. 17.141

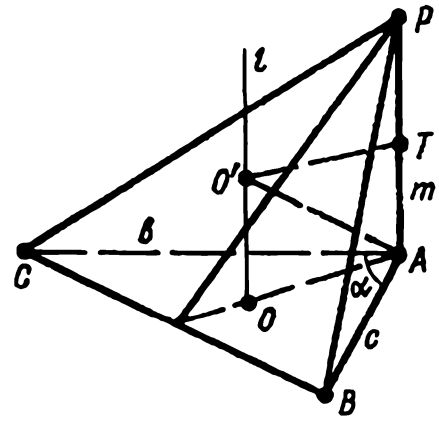


Рис. 17.142

* Нехай O — центр кола, описаного навколо ΔABC. Центр кулі, описаної навколо піраміди $PABC$, лежить на прямій l, що проходить через точку O і перпендикулярна до площини ABC. З іншого боку, оскільки цей центр однаково віддалений від вершин A і P, він лежить у площині γ, що перпендикулярна до відрізка PA і ділить його навпіл. Нехай O' — центр описаної кулі, тоді $l \cap \gamma = O'$, $O'O = TA = m/2$ (точка T — середина ребра PA): $O'A = R$ — радіус описаної кулі: $R = \sqrt{O'O^2 + OA^2}$. Із ΔABC за теоремою косинусів маємо: $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha}$. За теоремою синусів $BC = 2r\sin\alpha$, де r — радіус кола, описаного навколо ΔABC. Отже,

$$r = OA = \frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Тепер знаходимо об'єм описаної кулі: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

$$R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha}{4\sin^2\alpha}}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{6\sin^3\alpha}\left(m^2\sin^2\alpha + b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\right)^{1,5}$. *

4. Бічне ребро b (рис. 17.143) правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм вписаної кулі.

* З ΔPCO маємо $OC = b\cos\alpha$, $PO = b\sin\alpha$. З ΔPOE знаходимо

$$PE = \sqrt{PO^2 + OE^2} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sin^2\alpha}.$$

Нехай O_1 — центр вписаної кулі. За ознакою подібності ($\Delta PO_1K \backsim \Delta POE$), тобто

$$\frac{O_1K}{PO_1} = \frac{OE}{PE}, \text{ або } \frac{r}{PO-r} = \frac{OE}{PE}, \text{ або } \frac{r}{b\sin\alpha - r} = \frac{b\cos\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}b\sqrt{1+\sin^2\alpha}},$$

звідки $$r = \frac{b\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{1+\sin^2\alpha}}, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}\pi b^3\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha}}\right)^3$. *

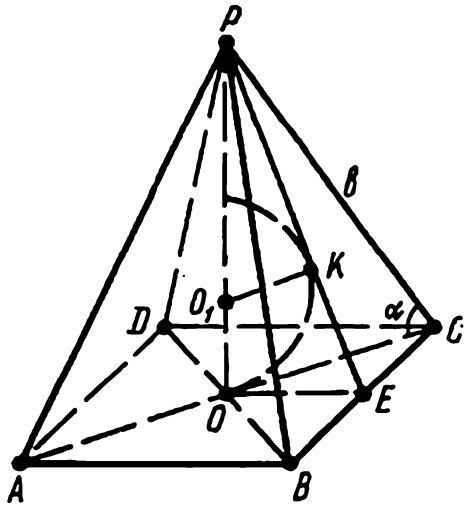


Рис. 17.143

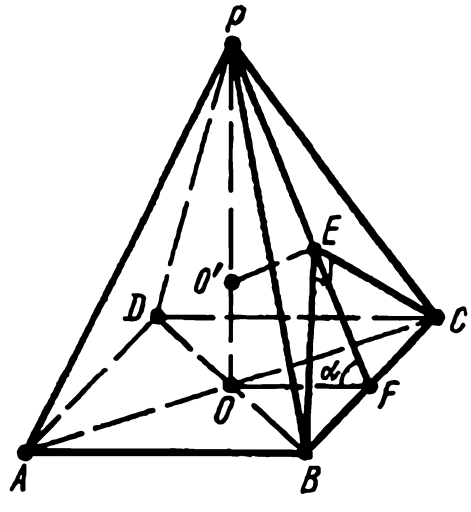


Рис. 17.144

5. У правильній чотирикутній піраміді центри вписаної і описаної куль збігаються (рис. 17.144). Двогранний кут при ребрі основи дорівнює α. Довести, що $\cos\alpha = \operatorname{tg}(\pi/8)$.

* Нехай O' — центр вписаної і описаної куль правильної чотирикутної піраміди $PABCD$, $O'E$ — перпендикуляр, опущений з точки O' на грань PBC: $O'O = O'E = r$ (радіус вписаної кулі). Перерізи описаної кулі, рівновіддалені від її центра, рівні. Тому квадрат $ABCD$ і трикутник PBC вписані в рівні кола. Отже, $\angle BEC = \angle BOC = \pi/2$ і $BPC = \pi/4$.

Проведемо апофему PF бічної грані PBC. Оскільки $CF = OF$, то $\frac{OF}{PF} = \frac{CF}{PF}$. або $\cos\alpha = \operatorname{tg}\pi/8$, що й треба було довести. *

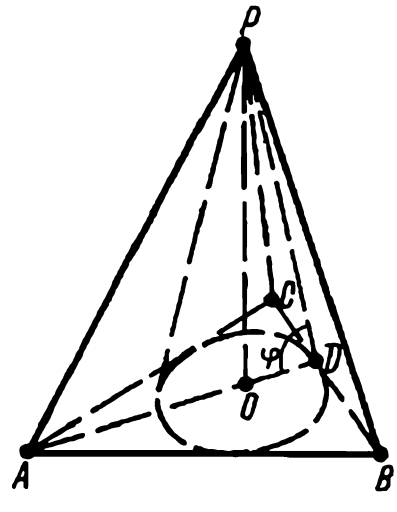


Рис. 17.145

6. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом α при вершині (рис. 17.145). У цю піраміду вписано конус, твірна якого утворює з площиною основи кут φ. Знайти об'єм піраміди і площу її повної поверхні.

* Висоти конуса і піраміди збігаються, основою конуса є круг, вписаний в основу піраміди, бічна поверхня конуса дотикається до бічних граней піраміди. За умовою $AC = AB = b$, $\angle BAC = \alpha$. Вписане коло дотикається до сторони BC в її середній точці D ($\angle PDO = \varphi$ — лінійний кут двогранного кута BC). Із ΔABD (рис. 17.146) маємо

$$BD = b\sin(\alpha/2),\quad AD = b\cos(\alpha/2),\quad \angle ABC\ (180^\circ - \alpha)/2 = 90^\circ - \alpha/2.$$

Оскільки BO — бісектриса кута B, то $\angle OBD = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}$. Із ΔOBD маємо $OD =$

$= BD\,\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = b\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha$. Із ΔPOD (рис. 17.145) маємо $PO =$

$= OD\,\mathrm{tg}\,\varphi = b\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\mathrm{tg}\varphi$.

Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot PO = \frac{1}{6}b^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\mathrm{tg}\varphi,$$

площа бічної і повної поверхні

$$S_б = \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi};\quad S_п = S_{ABC}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{b^2\sin\alpha(1+\cos\varphi)}{2\cos\varphi}.$$

Відповідь: $\frac{b^3}{6}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\mathrm{tg}\varphi$; $\frac{b^2\sin\alpha(1+\cos\varphi)}{2\cos\varphi}$. *

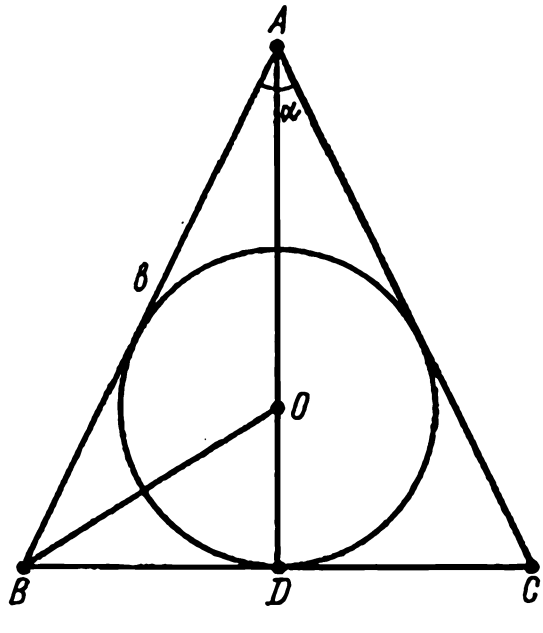


Рис. 17.146

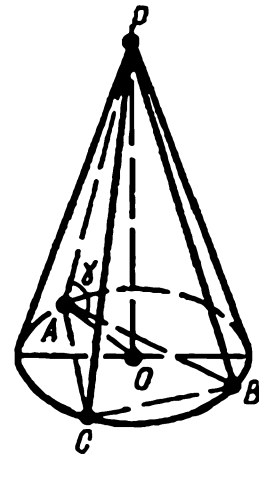


Рис. 17.147

7. Основою піраміди є ΔABC (рис. 17.147), у якого $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут γ. Знайти об'єм і площу повної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.

* Висоти PO піраміди і конуса збігаються, а основою піраміди є многокутник, вписаний у коло основи конуса. Бічні ребра піраміди лежать на бічній поверхні конуса. За теоремою синусів

$$AO = R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{c}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Із ΔPAO знаходимо

$$PA = \frac{AO}{\cos\gamma} = \frac{c}{2\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma},$$

$$PO = AO\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\cdot\operatorname{tg}\gamma}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2\cdot PO = \frac{\pi c^3\operatorname{tg}\gamma}{24\sin^3(\alpha+\beta)};$$

площа повної поверхні конуса

$$S_{\text{п}} = \pi R(R+PA) = \frac{\pi c^2}{4\sin^2(\alpha+\beta)}\left(1+\frac{1}{\cos\gamma}\right).$$

Відповідь: $\dfrac{\pi\operatorname{tg}\gamma}{24}\left(\dfrac{c}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^3$; $\dfrac{\pi(1+\cos\gamma)}{4\cos\gamma}\left(\dfrac{c}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2$. *

8. У циліндр радіуса R вписано трикутну призму. Основою призми є трикутник з кутами α і β. Знайти об'єм призми якщо висота циліндра H дорівнює периметру основи призми.

* Нехай ΔABC — основа призми. За теоремою синусів маємо

$$BC = 2R\sin\alpha,\ AC = 2R\sin\beta,\ AB = 2R\sin(\alpha+\beta).$$

За умовою $H = AB + AC + BC = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta))$, тоді $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C =$ $= 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$, тобто $V = HS_{ABC}$. Відповідь: $4R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta))$. *

9. В правильну n-кутну призму із стороною основи a вписано рівносторонній циліндр. Знайти об'єм цього циліндра.

* Якщо в призму вписано циліндр, то кола основ циліндра вписано в основи призми, а бічна поверхня циліндра дотикається до бічних граней призми. Нехай коло $\omega(O, r)$, вписане в правильний n-кутник із стороною $AB = a$, є основою призми (рис. 17.148), тоді $\angle AOB = 2\pi/n$, $r = (a/2)\operatorname{ctg}(\pi/n)$. Оскільки циліндр рівносторонній, то його осьовий переріз — квадрат, а висота $H = 2r$. Отже,

$$V = \pi r^2 H = 2\pi r^3 = \frac{\pi a^3}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right)^3.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi a^3}{4}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}\right)^3$. *

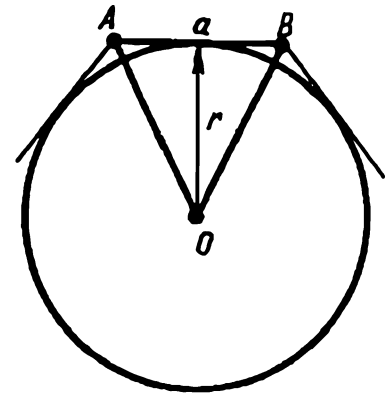


Рис. 17.148

Вправи

1. У правильну чотирикутну піраміду вписано правильну чотирикутну призму так, що одна основа призми лежить у площині основи піраміди, а вершини другої основи лежать на бічних ребрах піраміди. Бічна грань призми — квадрат із стороною b, а ребро основи піраміди дорівнює a. Знайти об'єм піраміди.

2. Центр верхньої основи куба сполучено з вершинами нижньої основи. Знайти площу повної поверхні утвореної чотирикутної піраміди якщо ребро куба дорівнює a.

3. Бічні ребра трикутної піраміди дорівнюють a, b, c. Всі плоскі кути при вершині піраміди прямі. Вершина куба збігається з вершиною піраміди, а три ребра куба, що виходять з цієї верши-

ни, лежать на бічних ребрах піраміди. Одна з вершин куба лежить на площині основи піраміди. Знайти ребро куба.

4. Куб з ребром a і правильна чотирикутна піраміда мають спільну основу і розміщені по один бік від основи. Висота піраміди дорівнює $2a$. Знайти площу повної поверхні тієї частини піраміди, яка лежить усередині куба.

5. У конус вписано рівносторонній циліндр із твірною l. Знайти об'єм конуса, якщо його твірна утворює з площиною основи кут α.

6. Конус і циліндр мають спільну основу і розміщені по один бік від основи. Знайти площу повної поверхні тієї частини конуса, яка лежить усередині циліндра, якщо висота конуса в 3 рази більша за радіус основи R (циліндр рівносторонній).

7. Відношення радіусів основ зрізаного конуса дорівнює 4. Основа другого конуса збігається з меншою основою зрізаного конуса, а вершина його лежить у центрі більшої основи. Знайти відношення об'ємів зрізаного конуса і другого конуса.

8. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут α. Цей циліндр вписано в кулю. Знайти відношення об'ємів циліндра та кулі.

9. Кулю вписано в циліндр. Знайти відношення об'ємів і площ повних поверхонь циліндра та кулі.

10. У кулю вписано рівносторонній конус. Знайти відношення площ повних поверхонь кулі та конуса.

11. Довести що об'єм конуса $V_к = S_б d/3$, де d — віддаль від центра основи до твірної.

12. У рівносторонній конус вписано кулю. Знайти відношення об'ємів і площ повної поверхні кулі і конуса.

13. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють r_1, r_2. Зрізаний конус вписано в кулю радіуса R. Твірна зрізаного конуса дорівнює l і утворює з площиною більшої основи кут φ. Довести, що

$$\text{а)}\ |r_2 - r_1| = l\cos\varphi; \quad \text{б)}\ (r_1 + r_2)^2 = (4R^2 - l^2)\sin^2\varphi.$$

14. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють r_1 і r_2. Знайти об'єм кулі, вписаної в зрізаний конус.

15. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a, b, c. Знайти поверхню описаної кулі.

16. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b і утворює з площиною основи кут γ. Знайти площу поверхні описаної кулі.

17. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічне ребро утворює з площиною основи кут γ. Знайти об'єм описаної кулі.

18. Сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a, а її висота h. Знайти об'єм описаної кулі.

19. Апофема бічної грані правильної шестикутної піраміди рівна l. Бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайти об'єм описаної кулі.

20. Основою піраміди є прямокутник із сторонами a і b. Одне з бічних ребер є висотою піраміди і дорівнює h. Знайти поверхню описаної кулі.

21. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами a, b. Всі бічні ребра утворюють з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм описаної кулі.

22. Кожне ребро трикутної піраміди дорівнює a. Знайти відношення радіусів вписаної і описаної куль.

23. Кожне ребро чотирикутної піраміди дорівнює a. Знайти площу поверхні вписаної кулі.

24. Основа піраміди — квадрат із стороною a. Одне з бічних ребер є висотою піраміди і дорівнює a. Знайти об'єм вписаної кулі.

25. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом γ при основі і основою a. Кожна бічна грань піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайти радіус вписаної кулі.

26. Навколо кулі радіуса R описано чотирикутну піраміду, в основі якої лежить ромб з гострим кутом α. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм піраміди.

27. Сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a. Двогранний кут при основі піраміди дорівнює γ. Знайти об'єм і площу повної поверхні конуса, вписаного у піраміду.

28. Радіус основи конуса дорівнює r, а твірна утворює з площиною основи кут β. Навколо конуса описано піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом 2α при основі. Знайти об'єм піраміди.

29. У циліндр вписано паралелепіпед із стороною a. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α, а з бічною гранню, що проходить через сторону a, утворює кут β. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

30. У чотирикутну піраміду $PABCD$ вписано кулю. Довести, що $\angle APB + \angle CPD = \angle APD + \angle BPC$.

§ 8. Координати і вектори у просторі

8.1. Через довільну точку O простору проведемо три попарно взаємно перпендикулярні прямі (рис. 17.149). Ці прямі називаються так: вісь Ox (*вісь абсцис*), вісь Oy (*вісь ординат*), вісь Oz (*вісь аплікат*). Точка O називається *початком координат*. На цих прямих задають одиничні вектори $\vec{i}$ (по осі Ox), $\vec{j}$ (по осі Oy) та $\vec{k}$ (по осі Oz).

Нехай M — довільна точка простору. Ця точка задає деякий вектор $\vec{OM}$; M_1, M_2, M_3 — відповідно ортогональні проекції точки M на осі Ox, Oy, Oz, тоді

$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \vec{OM}_3 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Числа x, y, z називаються координатами точки M або вектора $\vec{OM}$. їх вказують у дужках $M(x; y; z)$; $\vec{OM}\{x; y; z\}$. Дана система координат позначається так: $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ і називається *прямокутною декартовою системою координат*.

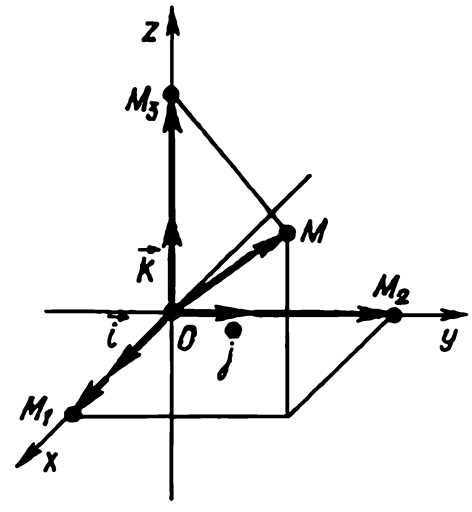


Рис. 17.149

Зрозуміло, що кожна трійка чисел $(x; y; z)$ задає єдину точку M.

Отже, прямокутна декартова система координат встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною точок простору і множиною впорядкованих трійок дійсних чисел.

Крім координатних осей є також і координатні площини. Координатна площина xOy містить осі Ox та Oy, координатна площина yOz містить осі Oy та Oz, координатна площина xOz містить осі Ox та Oz.

Нехай у просторі дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$; за формулою різниці двох векторів $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Враховуючи, що $\vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. $\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, маємо $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$. Отже, вектор $\vec{AB}$ має координати $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Нехай, наприклад, $M(1; -3; 4)$,

$N(-2;\ 3;\ 1)$, тоді $\vec{MN}\ \{-2-1;\ 3-(-3);\ 1-4\}$ або $\vec{MN}\ \{-3;\ 6;\ -3\}$. Якщо $A \in Ox$, то $A(x;\ 0;\ 0)$; якщо $A \in Oy$, то $A(0;\ y;\ 0)$; якщо $A \in Oz$, то $A(0;\ 0;\ z)$. Зокрема, $\vec{i}\ \{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\ \{0;\ 0;\ 1\}$. Інколи записують так: $\vec{a} = \{x;\ y;\ z\}$.

Модуль вектора — це його довжина. Якщо $\vec{OA}\ \{x;\ y;\ z\}$, то

$$|\vec{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Якщо $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Ця формула має назву формули відстані між двома точками. Рівність векторів у просторі, операції додавання векторів, множення вектора на число означаються так само, як і на площині.

Нехай є вектори $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$; $\vec{a} = \vec{b}$ в тому і тільки в тому випадку, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Операції додавання векторів і множення вектора на число у просторі мають ті самі властивості, що і на площині:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2\ ;\ y_1 + y_2\ ;\ z_1 + z_2\ \};$$

$$m\vec{a} = \{mx_1\ ;\ my_1\ ;\ mz_1\ \}.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = m\vec{b}$.

Скалярним добутком векторів називається число, яке дорівнює сумі добутків відповідних координат векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\ .$$

$$(\vec{a})^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\vec{a}|^2\ ,$$

отже,

$$(\vec{a}) = \sqrt{(\vec{a})^2}\ ;\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi\ ,$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Скалярний добуток векторів у просторі має ті самі властивості, що й на площині. Зокрема, скалярний добуток ненульових векторів $\vec{a}, \vec{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $\varphi = 90°$.

Нехай точка T лежить на відрізку AB, причому $AT : TB = m$, O — довільна точка простору, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді $\vec{OT} = \dfrac{\vec{OA} + m\vec{OB}}{1+m}$. Якщо $T(x; y; z)$, то

$$x = \frac{x_1 + mx_2}{1+m}, \quad y = \frac{y_1 + my_2}{1+m}, \quad z = \frac{z_1 + mz_2}{1+m}$$

Ці формули називаються формулами поділу відрізка в даному відношенні.
Зокрема, якщо M — середина відрізка AB, то

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Задачі

1. Відомі координати точки $M(1; 2; 3)$ і вектора $\vec{MN} = \{3; 0; -4\}$. Знайти координати точки N.

* Нехай $N(x; y; z)$, тоді $\vec{MN} = \{x - 1; y - 2; z - 3\}$. За означенням рівності векторів маємо $x - 1 = 3$, $y - 2 = 0$, $z - 3 = -4$. Звідки $x = 4$, $y = 2$, $z = -1$. Відповідь: $N(4; 2; -1)$. *

2. Відомі точки $A(-3; -1; 4)$, $B(2; -2; -3)$, $C(1; 2; 3)$. Знайти координати точки D, якщо $ABCD$ — паралелограм.

* Нехай $D(x; y; z)$. Оскільки $ABCD$ паралелограм, то $\vec{AB} = \vec{DC}$, або $\{5; -1; -7\} = \{1 - x; 2 - y; 3 - z\}$, звідки $1 - x = 5$; $2 - y = -1$; $3 - z = -7$; $x = -4$, $y = 3$, $z = 10$. Відповідь: $D(-4; 3; 10)$. *

Зауваження. Може статися, що $\vec{AB} = \vec{DC}$, але паралелограма немає, бо точки A, B, C, D належать одній прямій. У цьому випадку вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$ колінеарні. Отже, $\vec{AB} = m\vec{AC}$, або $\{5; -1; -7\} = \{4m, 3m, -m\}$. Звідси маємо систему рівнянь $4m = 5$, $3m = -1$; $-m = -7$, яка не має розв'язку. Отже, $ABCD$ — паралелограм.

3. Дано: $A(1; 2; -1)$, $B(2; -2; 4)$, $C(0; 5; -1)$. Знайти периметр ΔABC.

$$AB = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{42},$$

$$BC = \left|\vec{BC}\right| = \sqrt{(0-2)^2 + (5+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{78},$$

$$AC = \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(0-1)^2 + (5-2)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{10}.$$

Відповідь: $\sqrt{42} + \sqrt{78} + \sqrt{10}$. *

4. Дано: $\vec{a}\{1; 2; -1\}$, $\vec{b}\{-2; 1; 4\}$, $\vec{c}\{2; 2; 0\}$. Знайти $\left|2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}\right|$.

* $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \{2; 4; -2\} - \{-6; 3; 12\} + \{2; 2; 0\} = \{10; 3; -14\}$, отже $\left|2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}\right| = \sqrt{305}$.

Відповідь: $\sqrt{305}$.

5. Дано вектори $\vec{a}\{2; -1; 3\}$ та $\vec{b}\{1; 1; 4\}$. Знайти $\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)$.

* $\vec{a} - 2\vec{b} = \{2; -1; 3\} - \{2; 2; 8\} = \{0; -3; -5\}$, $2\vec{a} + \vec{b} = \{4; -2; 6\} + \{1; 1; 4\} = \{5; -1; 10\}$.

Отже $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=0\cdot 5+(-3)(-1)+(-5)10=-47.$

Відповідь: –47. *

6. Дано ΔABC, де A (1; 4; –2), B (2; –2; 3), C (2; 5; –1). Довести, що ΔABC прямокутний.

* $\vec{AB}\{1;-6;5\}$, $\vec{AC}\{1;1;1\}$, $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=1\cdot 1+(-6)\cdot 1+5\cdot 1=0$. Отже, $\vec{AB}\perp\vec{AC}$ і кут A прямий. *

7. Знайти одиничний вектор, напрямлений з вектором $\vec{a}\{2;-4;3\}$ в один бік.

* Вектор $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ має довжину 1 і напрямлений з вектором $\vec{a}$ в один бік:

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+3^2}=\sqrt{29};\quad \vec{a}^0=\frac{\{2;-4;3\}}{\sqrt{29}}.$$

Відповідь: $\vec{a}^0=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{29}};-\dfrac{4}{\sqrt{29}};\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right\}$. *

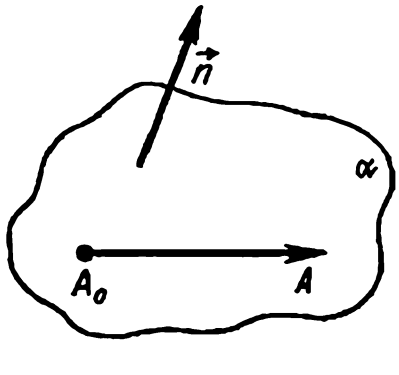


Рис. 17.150

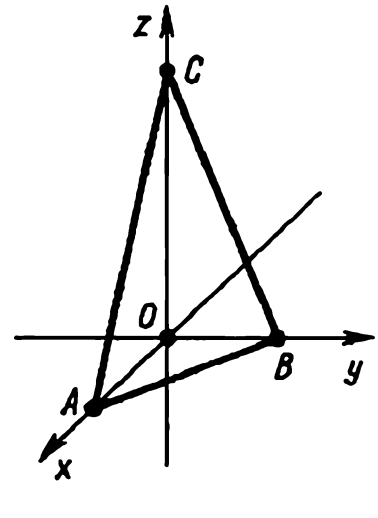


Рис. 17.151

8.2. Нехай у просторі є площина α (рис. 17.150); A_0 (x_0; y_0; z_0) та A (x; y; z) — деякі точки площини α; $\vec{n}\{A;B;C\}$ — нормальний вектор площини α ($\vec{n}\perp\alpha$); $\vec{n}\perp\vec{A_0A}$, отже, $\vec{n}\cdot\vec{A_0A}=0$. Оскільки $\vec{A_0A}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$, то $\{A; B; C\}\cdot\{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}=0$, звідки

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Це і є рівняння площини α, яка проходить через дану точку (x_0; y_0; z_0) і має даний нормальний вектор $\{A; B; C\}$. Розкривши дужки, після деяких спрощень дістанемо загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Координатні площини xOy, xOz і yOz мають відповідно рівняння $z=0$, $y=0$ і $x=0$.

Розглянемо площину $3x + 2y + z - 6 = 0$. Нехай A — точка перетину цієї площини з віссю Ox, тобто A (2; 0; 0). Точка B (0; 3; 0) — це точка перетину даної площини з віссю Oy, а точка C (0; 0; 6) — з віссю Oz (рис. 17.151). Рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ називається *рівнянням площини* у відрізках на осях.

Ця площина перетинає осі Ox, Oy, Oz відповідно в точках A (a; 0; 0), B (0; b; 0) та C (0; 0; c).

Площина, зображена на рис. 17.151, має таке рівняння у відрізках на осях: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$.

Задачі

1. Дві площини мають рівняння $3x - 2y + z = 0$ та $6x - 4y + 2z - 3 = 0$. З'ясувати взаємне розміщення цих площин.

* Нормальні вектори цих площин $\vec{n}_1\{3;-2;1\}$ та $\vec{n}_2\{6;-4;2\}$ колінеарні. Отже, дані площини паралельні. Відповідь: площини паралельні. *

2. Записати рівняння площини, що проходить через кінець вектора $\vec{OA}\{1;-2;3\}$ і перпендикулярна до нього.

* Дана площина має нормальний вектор $\vec{OA}$ і проходить через точку A (1; –2; 3). Отже, вона має рівняння $1(x - 1) + (-2)(y + 2) + 3(z - 3) = 0$, або $x - 2y + 3z - 14 = 0$. Відповідь: $x - 2y + 3z - 14 = 0$. *

3. Площина має рівняння $5x - 2y + 4z + 2 = 0$. Знайти довжини відрізків, які дана площина відтинає на осях координат.

* Дана площина має таке рівняння у відрізках на осях:

$$\frac{x}{-0,4}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-0,5}=1.$$

Звідси видно, що A (–0,4; 0; 0) — точка перетину даної площини з віссю Ox, B (0; 1; 0) — з віссю Oy, C (0; 0; –0,5) — з віссю Oz. Отже, шукані довжини дорівнюють 2/5, 1 та 1/2. Відповідь: 2/5; 1; 1/2. *

4. Знайти відстань від точки A (x_0; y_0; z_0) до площини з рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

* Нехай AK — перпендикуляр, проведений з точки A до даної площини. Отже, AK — шукана відстань, K (x; y; z), $\vec{AK} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, $\vec{n}$ — нормальний вектор даної площини, $\vec{n}\{A; B; C\}$. Вектори $\vec{n}$ і $\vec{AK}$ колінеарні, отже, $|\vec{n}\cdot\vec{AK}| = |\vec{n}|\cdot|\vec{AK}|$, звідки $AK = |\vec{AK}| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{AK}|}{|\vec{n}|}$. або $AK = \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Оскільки $K \in \alpha$, то $Ax + By + Cz = -D$.

$$AK = \frac{|Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. *$$

5. Знайти відстань між паралельними площинами α і β, що задані рівняннями $3x - 2y + z = 0$ та $6x - 4y + 2z = 3$.

* Точка $O\,(0;\,0;\,0)$ лежить у площині α. Її відстань від площини β знаходиться за формулою. що виведена у задачі 4:

$$h = \frac{|6\cdot 0 - 4\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{56}}.$$

Це і є шукана відстань. Відповідь: $\frac{3}{\sqrt{56}}$. *

6. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $A_1\,(1;\,0;\,2)$. $A_2(-1;\,1;\,0)$ та $A_3\,(0;\,-1;\,1)$.

* Нехай $\vec{n}\{A; B; C\}$ — нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$, $\vec{A_1A_2}\{-2; 1; -2\}$. $\vec{A_1A_3}\{-1; -1; -1\}$. Оскільки $\vec{n} \perp \vec{A_1A_2}$ і $\vec{n} \perp \vec{A_1A_3}$ то маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot A_1A_2 = 0, \\ \vec{n}\cdot A_1A_3 = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -2A + B - 2C = 0, \\ -A - B - C = 0, \end{cases}$$

звідки $A = -C, B = 0$, отже, $\vec{n}\{A; 0; -A\}$, де $A \neq 0$.

Запишемо рівняння площини, що має даний нормальний вектор і проходить через дану точку A_1: $A\,(x - 1) - A\,(z - 2) = 0$ або $x - z + 1 = 0$. Відповідь: $x - z + 1 = 0$. *

7. Пряма є лінією перетину площин $2x - y + 3z - 1 = 0$ та $x - 2y + z - 3 = 0$. Знайти точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

* Нехай $A\,(x;\,y;\,0)$ — точка перетину даної прямої з координатною площиною xOy. Підставляючи в рівняння площин $z = 0$, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

звідки $x = -1/3$, $y = -5/3$ і $A\,(-1/3;\,-5/3;\,0)$. Якщо $B\,(x;\,0;\,z)$ — точка перетину даної прямої в координатною площиною xOz, то маємо систему

$$\begin{cases} 2x + 3z = 1, \\ x + z = 3, \end{cases}$$

звідки $x = 8$, $z = -5$ і $B\,(8;\,0;\,-5)$.

Аналогічно знаходимо, що $C\,(0;\,-8/5;\,-1/5)$ — точка перетину даної прямої з координатною площиною yOz. Відповідь: $(-1/3;\,-5/3;\,0)$, $(8;\,0;\,-5)$, $(0;\,-8/5;\,-1/5)$. *

Вправи

1. Відомо, що $A\,(2;\,-1;\,4)$, $\vec{AB}\{1; 7; -3\}$. Знайти координати точки B.

2. Дано точки $A\,(1;\,2;\,4)$, $B\,(-1;\,3;\,-5)$, $C\,(0;\,2;\,2)$. Знайти координати точки D, якщо $ABCD$ — паралелограм.

3. Дано: $A\,(2;\,-4;\,3)$, $B\,(1;\,2;\,-4)$, $C\,(6;\,0;\,1)$. Знайти довжину медіани ΔABC, проведеної до сторони BC.

4. Дано: $\vec{a}\{2; 0; -1\}$, $\vec{b}\{3; -1; -1\}$, $\vec{c}\{1; 2; 0\}$. Знайти $|\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}|$.

5. Дано: $\vec{a}\{1;-2;3\}$. $\vec{b}\{-2;4;1\}$. Знайти $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

6. Дано вершини трикутника A (2; 3; –1), B (3; 2; 2), C (1; 0; –4;). Знайти косинус кута A.

7. Знайти одиничний вектор, напрямлений протилежно до вектора $\vec{a}\{3;-2;1\}$.

8. Записати рівняння площини, яка проходить через початок координат і має нормальний вектор $\vec{n}\{2;-3;1\}$.

9. Знайти довжини відрізків, які відтинає на координатних осях площина $3x - 7y + 2z = 4$.

10. Дано точки A (3; –2; 4) та B (2; 2; –1). Записати рівняння площини, яка перпендикулярна до відрізка AB і ділить його навпіл.

11. Знайти відстань між паралельними площинами, які мають рівняння $4x - y + 3z - 1 = 0$ та $8x - 2y + 6z + 3 = 0$.

12. Знайти відстань від початку координат до площини з рівнянням $6x - y - z + 4 = 0$.

13. Записати рівняння площини, яка проходить через точки A (3; 0; –2), B (2; 1; 1) та C (1; –4; 2).

14. Знайти точки перетину прямої l з координатними площинами, якщо l — перетин площин з рівняннями

$$3x - y - z + 2 = 0, x + 4y - z - 2 = 0.$$

Відповіді до вправ

§ 2. 1. $\frac{a+b}{2}$. 2. $\frac{1}{2}|a-b|$. 3. $a+c-b$. 4. $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$. 5. $MN \parallel \alpha$. 6. $b \parallel \alpha$ або b перетинає α. 8. $a \nparallel b$. 19. Правильний трикутник, квадрат, правильний шестикутник.

§ 3. 5. $\arccos 0{,}25$. 8. $\frac{7a}{\sqrt{15}}$. 9. a. 10. $a/\sqrt{2}$. 11. $\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$. 12. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 13. $a/3$. 14. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. 15. $\arcsin\frac{|b-c|}{a}$, $\arcsin\frac{b+c}{a}$. 16. $\arcsin\sqrt{\sin^2\gamma+\sin^2\beta}$. 17. $\frac{h\sqrt{2}}{\sin\alpha}$. 18. $\arcsin\frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 20. $\arccos\left(\sqrt{2}\cos\alpha\right)$. 21. $\arcsin\left(\frac{c\sin\alpha}{d}\right)$. 22. $h\sqrt{7}$. 23. $\sqrt{\left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{a}{\sin\beta}\right)^2-\frac{2a^2\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}$. 24. 30°. 25. $\arccos\frac{5}{12}$. 26. 90°. 27. 60°.

§ 4. 1. $\alpha \in (30°; 150°)$. 2. $\alpha \in (30°; 170°)$. 3. $\arccos\left(\sqrt{2}-1\right)$. 4. 60°. Застосувати формулу трьох косинусів. 5. $\frac{a\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}{\cos(\alpha/2)}$. 6. $b\sin\alpha$. 7. $129\frac{3}{13}$ см^2. 8. $2\sqrt{2}Q$. 10. $2ab+2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{tg}\gamma$. 11. $2d^2$. 12. $2\left(D^2-d^2\right)+4\sqrt{\left(D^2-d^2\right)\left(2d^2-D^2\right)}$. 13. 11 см. 14. $b\left(a+c+\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos\alpha}\right)$. 15. а) $\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,\mathrm{tg}\beta$; б) $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\beta}$. Використати властиво-

сті описаної трапеції. **16.** $\frac{1}{9}Q$, $\frac{4}{9}Q$. **17.** $b\sqrt{h^2+a^2/4}+a\sqrt{h^2+\frac{b^2}{4}}+ab$. **18.** $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4\cos\gamma}$.

19. а) $\frac{1}{2}a\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$; б) $\frac{a^2\sin\alpha(1+\cos\beta)}{\cos\beta}$. **20.** $\frac{a^2}{27}\sqrt{12+3\operatorname{tg}^2\alpha}$. **21.** $\frac{a^2\sin^2\beta\cos(\beta/2)}{\sin^2(3\beta/2)}$.

22. $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{\cos\alpha}+a^2+b^2\right)$. **23.** $\frac{a^2-b^2}{\cos\alpha}$.

§ 5. **1.** $\frac{S}{\pi}$. **2.** $\sqrt{h^2+4R^2}$. **3.** $\sqrt{R^2-\frac{1}{4}h^2}$. **4.** $\sqrt{R^2-\frac{1}{4}(l^2-h^2)}$. **5.** $\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{\pi}{B}}$. **6.** π.

7. $\pi\sqrt{3}Q$. **8.** $2\arcsin\frac{\varphi}{2\pi}$. **9.** $\pi R\left(R+\sqrt{R^2+H^2}\right)$. **10.** $\pi h^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(\alpha/2)$. **11.** $\frac{R\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha\sin^2\varphi}\times$

$\times\sqrt{\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\alpha)}$. **12.** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{R^2-t^2}}$. **13.** $\frac{Hr}{R-t}$. **14.** $\frac{1}{4}\left(\sqrt{Q}+\sqrt{q}\right)^2$. **15.** 9π см^2. **16.** 7π, 15π, 12π.

17. $\frac{8}{9}\pi R^2$, $\frac{5}{9}\pi R^2$. **18.** $\pi R^2\cos^2\alpha$. **19.** $(x-2)^2+(y-2)^2+(z\pm1)^2=9$. **21.** $\sqrt{r^2-\frac{a^2b^2}{4(a^2+b^2)}}$.

22. 25 см.

§ 6. **1.** $\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3$. **2.** $\frac{n}{2}a^3\operatorname{ctg}(\pi/n)$. **3.** 64 см^3. **4.** Вдвоє. **5.** $ab\sqrt{d^2-a^2-b^2-2ab\cos\gamma}\sin\gamma$.

6. 60 см^3. **7.** $\sqrt{S_1S_2S_3}$. **8.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **10.** $2\pi R^3$. **11.** $2\pi R^3/\sqrt{3}$.

12. $\frac{\pi R^2}{3}\sqrt{l^2-R^2}$. **13.** $\frac{1}{4}\pi d^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **14.** $\frac{\pi}{4}a^3$. **15.** $\frac{\pi dS}{\sin\alpha}$. **16.** $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\gamma}{24\sin^3(\alpha/2)}$.

17. $\frac{\pi a^3\sin^2\gamma}{3\cos\gamma}$. **18.** 1680π см^3. **19.** $\frac{\pi l^3}{12}\sin\alpha(1+2\sin^2\alpha)$. **20.** $\operatorname{arctg}9$. **21.** $\frac{1}{3}a^3$. **22.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

23. $\frac{1}{6}a^3\operatorname{tg}\gamma$. **24.** $\frac{1}{3}V$. **25.** $\frac{na^2}{24}\operatorname{ctg}(\pi/n)\frac{\sqrt{4b^2\sin^2(\pi/n)-a^2}}{\sin(\pi/n)}$. **26.** $\frac{1}{6}abc$.

27. $\frac{1}{6}ab\sqrt{4c^2-a^2-b^2}$. **28.** $\frac{1}{6}a^3\sin^2\gamma\operatorname{tg}\beta$. **29.** 40 куб. од. **30.** 7.5π куб. од. **31.** $\frac{5}{27}$. **32.** $\frac{2}{27}$.

33. $\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha)$. **34.** $\frac{\pi a^3(1-\cos(\beta/2))^2(2+\cos(\beta/2))}{24\sin^3(\beta/2)}$, $\frac{\pi a^2}{2\sin^2(\beta/2)}(1-\cos(\beta/2))$.

35. $\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos(\alpha/2))$. **36.** 144π см^2. **37.** 8π дм^2.

§ 7. **1.** $\frac{1}{3}\left(\frac{a^3b}{a-b}\right)$. **2.** $a^2\left(\sqrt{5}+1\right)$. **3.** $\frac{abc}{ab+bc+ca}$. **4.** $\frac{a^2}{4}\left(5+3\sqrt{17}\right)$. **5.** $\frac{\pi l^3(2+\operatorname{tg}\alpha)^3}{24\operatorname{tg}^2\alpha}$.

6. $\frac{2}{9}\pi R^2\left(5+4\sqrt{10}\right)$. **7.** 21. **8.** $1{,}5\cos^2\alpha\sin\alpha$. **9.** 3:2, 3:2. **10.** $\frac{16}{9}$. **12.** $\frac{4}{9}:\frac{4}{9}$. **14.** $\frac{4}{3}\pi(r_1r_2)^{3/2}$.

15. $\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)$. **16.** $\pi\left(\frac{b}{\sin\gamma}\right)^2$. **17.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{\sin 2\gamma}\right)^3$. **18.** $\frac{\pi}{384}\left(\frac{a^2+4h^2\sin^2(\pi/n)}{h\sin^2(\pi/n)}\right)^3$.

19. $\frac{\pi}{6}\left(\frac{l}{\sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2(\pi/6)}}\right)^3$. **20.** $\pi\left(a^2+b^2+h^2\right)$. **21.** $\frac{\pi}{6}\left(a^2+b^2\right)^{1.5}$. **22.** $\frac{1}{3}$.

23. $\frac{\pi a^2}{2+\sqrt{3}}$. **24.** $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a}{2+\sqrt{2}}\right)^3$. **25.** $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. **26.** $\frac{4}{3}\left(R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^3\operatorname{tg}\beta/\sin\alpha$. **27.** $\frac{\pi a^3}{24}\operatorname{ctg}^3(\pi/n)\times$ $\times\operatorname{tg}\gamma$, $\frac{\pi}{4}\left(a\operatorname{ctg}(\pi/n)\right)^2\left(1+\frac{1}{\cos\gamma}\right)$. **28.** $\frac{1}{3}r^3\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **29.** $\frac{\pi a^2\sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

§ 8. 1. $B(3;6;1)$. **2.** $D(2;1;11)$. **3.** $0{,}5\sqrt{190}$. **4.** $\sqrt{78}$. **5.** -105. **6.** $\frac{-7}{\sqrt{209}}$.

7. $\vec{e}\left(-\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$. **8.** $2x-3y+z=0$. **9.** $\frac{4}{3};\frac{4}{7};2$. **10.** $x-4y+5z-10=0$. **11.** $\frac{5}{2\sqrt{26}}$.

12. $\frac{4}{\sqrt{38}}$. **13.** $8x-y+3z-18=0$. **14.** $A\left(0;\frac{4}{5};\frac{6}{5}\right), B(-2;0;-4), C\left(-\frac{6}{13};\frac{8}{13};0\right)$.

ДОДАТКИ

1. Таблиця квадратів двозначних чисел

Десятки	Одиниці								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

2. Прості числа, менші за 1000

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113,
127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173,
179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229,
233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281,
283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349,
353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409,
419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463,
467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541,
547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601,
607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659,
661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733,
739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809,
811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863,
877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941,
947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

3. Закони арифметики

1. Комутативний: $a+b=b+a;\ \ ab=ba.$
2. Асоціативний: $(a+b)+c=a+(b+c);\ \ (ab)c=a(bc).$
3. Дистрибутивний: $(a+b)c=ac+bc.$

4. Дії з дробами

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$ 2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$ 3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$ 4. $\frac{a}{d}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$

5. Позначення певної множини чисел

Множина чисел що, задовольняють умову	Позначення	Назва
$a \le x \le b$	$[a;b]$	Відрізок (замкнений проміжок)
$a < x < b$	$(a;b)$	Інтервал (відкритий проміжок)
$a \le x < b$	$[a;b)$	Напіввідкритий проміжок
$a < x \le b$	$(a;b]$	Те саме
$x > b$	$(b;+\infty)$	Промінь числової прямої
$x \ge b$	$[b;+\infty)$	Те саме
$x < a$	$(-\infty;a)$	«
$x \le a$	$(-\infty;a]$	«
$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty;+\infty)$	Числова пряма

6. Розв'язання рівнянь

1. Лінійне рівняння: $ax = b$; $x = \frac{b}{a}$ при $a \neq 0$; $x \in \varnothing$ при $a = 0$, $b \neq 0$; $x \in \mathbf{R}$ при $a = b = 0$.

2.Квадратне рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ при $b^2 \ge 4ac$; $x \in \varnothing$ при $b^2 < 4ac$.

7. Основні алгебраїчні тотожності

1. $|ab| = |a||b|$.
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
3. $\sqrt{x^2} = |x|$.
4. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
5. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
6. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
8. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
9. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
10. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
11. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

8. Формули арифметичної прогресії

1. Загальна формула $a_{n+1} = a_n + d$.
2. Формула n-го члена $a_n = a_1 + d(n-1)$.
3. Характеристична властивість $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$.
4. Формула суми $S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$.

9. Формули геометричної прогресії

1. Загальна формула $b_{n+1} = b_n q \quad (q \neq 0, b_n \neq 0)$.

2. Формула n -го члена $b_n = b_1 q^{n-1}$.

3. Характеристична властивість $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$.

4. Формула суми $S_n = \begin{cases} nb_1 & \text{при } q = 1; \\ b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{при } q \neq 1. \end{cases}$

5. Формула суми нескінченно спадної геометричної прогресії $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

10. Деякі суми

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{1}{2} n(n+1)$.

2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

3. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

4. $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

5. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$.

6. $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$.

7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.

8. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$.

9. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n} = 1 - \dfrac{1}{n}$.

10. $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

11. $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \dfrac{x + (nx - n - 1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$. $(x \neq 1)$.

11. Середні величини ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — додатні числа)

1. $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ — середнє арифметичне.

2. $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ — середнє геометричне.

3. $H = n\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)^{-1}$ — середнє гармонічне.

4. $K = \sqrt{\dfrac{1}{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)}$ — середнє квадратичне.

Мають місце нерівності $H \leq G \leq A \leq K$.

Рівності досягаються лише при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

12. Деякі важливі нерівності

1. Нерівність Бернуллі $(1+a)^n \geq 1+na \quad (1+a \geq 0)$.

2. Нерівність Коші $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (a_i \geq 0)$.

3. Нерівність Коші-Буняковського

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

4. Нерівність Непера $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

5. $\sin x < x < \operatorname{tg} x, \ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6. $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$.

13. Основні властивості логарифма

1. $\log_z (ab) = \log_z a + \log_z b$.

2. $\log_z \left(\frac{a}{b}\right) = \log_z a - \log_z b$.

3. $\log_z a^t = t \log_z a \quad (a>0, b>0, z>0, z \neq 1)$.

4. $\log_a b = \frac{\log_z b}{\log_z a} \quad (a \neq 1)$.

5. $a^{\log_a b} = b \quad (a \neq 1, a>0, b>0)$.

6. $\log_a a^n = n$.

14. Деякі важливі границі

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

9. $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0, \ (|q|<1)$.

15. Загальна схема дослідження функції

1. Область визначення. Вертикальні асимптоти.
2. Парність (непарність).
3. Періодичність.
4. Корені та знаки.
5. Монотонність та екстремуми.
6. Опуклість (угнутість).
7. Горизонтальні та похилі асимптоти.

16. Властивості похідної

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

3. $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. 4. $\left(u\left(v(x)\right)\right)' = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x)$.

17. Рівняння дотичної $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

18. Знаки тригонометричних функцій

Функція	Чверть			
	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tg	+	–	+	–
ctg	+	–	+	–

19. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

Функція	I чверть						II чверть		
	0° 0	30° π/6	45° π/4	60° π/3	90° π/2	120° 2π/3	135° 3π/4	150° 5π/6	180° π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	Не існує

20. Формули зведення

Функція	Аргумент φ						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	π–α	π+α	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	2π–α
sin φ	cos α	cos α	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α
cos φ	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α	sin α	cos α
tg φ	ctg α	–ctg α	–tg α	tg α	ctg α	–ctg α	–tg α
ctg φ	tg α	–tg α	–ctg α	ctg α	tg α	–tg α	–ctg α

21. Основні співвідношення тригонометрії

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

22. Парність (непарність) тригонометричних функцій

$$\sin(-x) = -\sin x; \qquad \cos(-x) = \cos x;$$
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x. \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Функція $y = \cos x$ парна, а функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ непарні.

23. Періодичність

Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ мають період 2π, а функції $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ мають період π:

$$\sin(x+2\pi n) = \sin x; \quad \cos(x+2\pi n) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi n) = \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(x+\pi n) = \operatorname{ctg} x; \quad n \in \mathbf{Z}.$$

24. Теореми додавання

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

25. Функції кратних кутів

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

26. Функції половинного кута

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

27. Універсальна підстановка

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

28. Формули перетворення добутку функцій в суму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right);$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right).$$

29. Формули зниження степеня

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha);\qquad \cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha).$$

30. Формули перетворення суми функцій в добуток

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};\quad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

31. Деякі часто вживані формули

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),\ \text{де}\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right);\quad \sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right);$$

$$\cos 3\alpha=4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right);\quad \operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right).$$

32. Деякі значення обернених тригонометричних функцій

$$\arcsin 0=0;\quad \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3};$$

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2};\quad \arcsin(-a)=-\arcsin a;\quad \arccos(-1)=\pi;\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4};\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3};\quad \arccos 0=\frac{\pi}{2};\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$$

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3};\quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6};\quad \arccos 1=0;\quad \arccos(-a)=\pi-\arccos a;$$

$$\operatorname{arctg}0=0;\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6};\quad \operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4};\quad \operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a;\quad \operatorname{arcctg}0=\frac{\pi}{2};\quad \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3};\quad \operatorname{arcctg}1=\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6};\quad \operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg}a.$$

33. Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння	Множина розв'язків	Значення a
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$\lvert a \rvert \le 1$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$\lvert a \rvert \le 1$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$a \in R$
$\operatorname{ctg} x = a$	$\operatorname{arcctg} a + \pi n$	$a \in R$
$\sin x = 0$	$x = \pi n$	
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$	
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$	

34. Таблиця похідних

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$.
2. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.
3. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. $\left(e^x\right)' = e^x$.
5. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.
6. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.
7. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.
8. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
9. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
10. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.
13. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

35. Таблиця інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + c$.
3. $\int \cos x dx = \sin x + c$.
4. $\int \sin x dx = -\cos x + c$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$.
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$.
8. $\int e^x dx = e^x + c$.
9. $\int 1 dx = x + c$.

36. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

(a, b — катети, c — гіпотенуза)

$$\frac{a}{c}=\cos B=\sin A;\quad \frac{b}{c}=\cos A=\sin B;$$

$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg} B;\quad \frac{b}{a}=\operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A;$$

$$c^2=a^2+b^2.$$

37. Метричні співвідношення в довільному трикутнику

(a, b, c — сторони; A, B, C — кути трикутника)

1. Теорема синусів $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

2. Теорема косинусів $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

38. Формули площ

1. Площа трикутника (A, B, C — кути; a, b, c — сторони; h — висота; p — півпериметр; r і R — радіуси вписаного і описаного кіл)

$$S=\frac{1}{2}ah_a;\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C;\quad S=pr;\quad S=\frac{abc}{4R};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\quad S=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

2. Площа паралелограма (a, b — сторони, φ — кут між ними)

$$S=ab\sin\varphi.$$

3. Площа довільного чотирикутника (d_1d_2 — діагоналі, α— кут між ними)

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

4. Площа трапеції (a, b — основи, h — висота трапеції)

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

5. Площа правильного n - кутника (a — сторона n - кутника)

$$S=\frac{1}{4}na^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

39. Деякі формули трикутника

1. Формула косинусів

$$a=b\cos C+c\cdot\cos B,\quad b=a\cos C+c\cdot\cos A,\quad c=a\cos B+b\cos A.$$

2. $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}};\quad \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}.$

3. $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$

4. $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{S}{p}.$

5. $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{ab}{2h_c}$.

6. $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

7. $h_a = c\sin B = b\sin C$.

8. $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{2bc}{b+c}\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$.

9. $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Ейлера), d — відстань між центрами вписаного та описаного кіл.

10. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

40. Нерівності в трикутнику

1. $a + b > c$ (нерівність трикутника).
2. $\sin A + \sin B > \sin C$.
3. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.
4. $m_a < \dfrac{1}{2}(b+c)$; $m_b < \dfrac{1}{2}(a+c)$; $m_c < \dfrac{1}{2}(a+b)$.
5. $1{,}5p < m_a + m_b + m_c < 2p$.
6. $2r \le R$. Рівність досягається лише в рівносторонньому трикутнику.
7. $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$.
8. $6\sqrt{3}r \le a+b+c \le 3\sqrt{3}R$.
9. $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
10. $\cos A + \cos B + \cos C \le 1{,}5$.
11. $\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \ge 3\sqrt{3}$.
12. $\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C \ge \sqrt{3}$.

41. Особливі точки в трикутнику

1. Точка перетину медіан (центроїд).
2. Точка перетину бісектрис (інцентр) — центр вписаного кола.
3. Точка перетину серединних перпендикулярів сторін (центр описаного кола).
4. Точка перетину прямих, що містять висоти трикутника (ортоцентр).

42. Рівняння прямої

$$ax + by = c.$$

43. Рівняння площини

$$ax + by + cz = d.$$

44. Рівняння кола з центром (a; b) і радіусом R

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

45. Рівняння сфери з центром (a; b; c) і радіусом R

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

47. Площі поверхонь геометричних тіл

1. Площа поверхні призми

$S = S_б + 2S_о$, де $S_б$ — площа бічної поверхні; $S_о$ — площа основи призми.

$S_б = P_п b$, де $P_п$ — периметр перпендикулярного перерізу; b — бічне ребро.

$S_б = P_о H$. де $P_о$ — периметр основи; H — висота прямої призми.

2. Площа поверхні піраміди

$S = S_о + S_б$. де $S_о$ — площа основи; $S_б$ — площа бічної поверхні.

$S_б = n \cdot \frac{1}{2} Aa$, де A — апофема, a — сторона основи правильної n-кутної піраміди.

$S_б = n \cdot \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha$, де b — бічне ребро; α — плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди.

$S_б = \frac{S}{\cos\alpha}$ (всі бічні грані утворюють з площиною кут α).

3. Площа поверхні циліндра

$S = 2\pi R(R+H)$, $S_б = 2\pi RH$, де R — радіус основи; H — висота циліндра.

4. Площа поверхні конуса

$S = \pi R(R+l)$, $S_б = \pi Rl$, де R — радіус основи; l — твірна конуса.

5. Площа поверхні зрізаного конуса

$S = \pi(Rl + rl + R^2 + r^2)$, $S_б = \pi(R+r)l$, де R та r — радіуси основ; l — твірна зрізаного конуса.

6. Площа поверхні кулі

$S = 4\pi R^2$, де R — радіус кулі.

48. Формули об'ємів

1. Об'єм призми ($S_о$ — площа основи, H — висота)

$$V = S_о H.$$

2. Об'єм піраміди($S_о$ - - площа основи; H — висота)

$$V = \frac{1}{3} S_о H.$$

3. Об'єм зрізаної піраміди (S_1 ,S_2 — площі основ, H — висота)

$$V = \frac{1}{3} H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right).$$

4. Об'єм циліндра (R — радіус основи; H — висота)

$$V = \pi R^2 H.$$

5. Об'єм конуса (R — радіус основи; H — висота)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

6. Об'єм зрізаного конуса (R_1 , R_2 — радіуси основ; H — висота)

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right).$$

7. Об'єм кулі (R — радіус)

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

49. Координати та вектори на площині $\left(\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)\right)$

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}(x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2)$. 2. $k\vec{a} = \vec{c}(kx_1; ky_1)$.

3. $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ (φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

50. Координати і вектори в просторі $\left(\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2)\right)$

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}(x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2)$. 2. $k\vec{a} = \vec{c}(kx_1; ky_1; kz_1)$.

3. $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

51. Формули деяких відстаней

1. Відстань від точки $A(x_0, y_0)$ до прямої $ax + by = c$ $h = \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2. Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини $ax + by + cz = d$ $h = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

52. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

53. Деякі математичні позначення

$=$	дорівнює	$\lim$	границя
$\neq$	не дорівнює	$\int$	інтеграл
$\approx$	наближено дорівнює	y'	похідна
$>$	більше ($15 > 2$)	$\parallel$	паралельно
$<$	менше ($3 < 7$)	$\perp$	перпендикулярно
$\geq$	більше або дорівнює ($3 \geq 3$, $3 \geq 0$)	$\in$	належить ($A \in a$)
$\leq$	менше або дорівнює ($2 \leq 2$, $2 \leq 9$)	$\subset$	належить ($a \subset \gamma$)
$\lvert\,\rvert$	модуль числа	$\cup$	об'єднання
$\sqrt[n]{\ }$	корінь n-го степеня ($n \in \mathbf{N}$)	$\cap$	перетин
$\log_z$	логарифм при основі z	Δ	трикутник
lg	логарифм десятковий ($z = 10$)	$\varnothing$	порожня множина
ln	логарифм натуральний ($z = e$)	%	процент (відсоток)

ЗМІСТ

Передмова (3)

Тема 1. Дійсні числа (4)

§ 1. Натуральні числа (4). § 2. Додатні дроби (9). § 3. Відношення, пропорція. процент (16). § 4. Дійсні числа (21). *Відповіді до вправ* (25)

Тема 2. Алгебраїчні вирази та їх перетворення (26)

§ 1. Алгебраїчні вирази (26). § 2. Цілі вирази (28). § 3. Дробові раціональні вирази (32). § 4. Ірраціональні вирази (37). *Відповіді до вправ* (45)

Тема 3. Многочлени від однієї змінної (47)

§ 1. Канонічна форма многочлена (47). § 2. Подільність многочленів. Корені многочленів (50). *Відповіді до вправ* (58)

Тема 4. Початкові відомості про функції (59)

§ 1. Множини. Поняття функції (59). § 2. Загальні властивості функцій (64). § 3. Постійна та лінійна функції (70). § 4. Квадратична функція (74). § 5. Дробово-лінійна функція (79). § 6. Степенева функція (83). *Відповіді до вправ* (85)

Тема 5. Рівняння (87)

§ 1. Рівняння з одним невідомим (87). § 2. Лінійні рівняння (95). § 3. Квадратні рівняння (96). § 4. Рівняння вищих степенів (111). § 5. Ірраціональні рівняння (124). *Відповіді до вправ* (133)

Тема 6. Системи рівнянь (135)

§ 1. Рівносильні системи рівнянь (135). § 2. Системи лінійних рівнянь (137). § 3. Системи нелінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими (142). § 4. Системи нелінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими (150). *Відповіді до вправ* (159)

Тема 7. Задачі на складання рівнянь (161)

§ 1. Як розв'язати задачу на складання рівнянь (161). § 2. Задачі на рух (163). § 3. Задачі з цілими невідомими (166). § 4. Задачі на розчини і сплави (169). *Відповіді до вправ* (171)

Тема 8. Нерівності (172)

§ 1. Числові нерівності (172). § 2. Доведення нерівностей (175). § 3. Нерівності зі змінною (177). § 4. Квадратні нерівності (182). § 5. Раціональні нерівності (184). § 6. Ірраціональні нерівності (185). *Відповіді до вправ* (188)

Тема 9. Показникова і логарифмічна функції (189).

§ 1. Показникова і логарифмічна функції (189). § 2. Властивості логарифмів (191). § 3. Логарифмування та потенціювання (194). § 4. Показникові та логарифмічні рівняння і системи рівнянь (196). § 5. Показникові та логарифмічні нерівності (208). *Відповіді до вправ* (212)

Тема 10. Тригонометричні функції (215)

§ 1. Визначення тригонометричних функцій (215). § 2. Основні тригонометричні формули (218). § 3. Формули додавання (222). § 4. Властивості та графіки тригонометричних функцій (238). § 5. Тригонометричні рівняння та системи рівнянь (248). § 6. Тригонометричні нерівності (268). *Відповіді до вправ* (274)

Тема 11. Послідовності та границі (275)

§ 1. Метод математичної індукції. Числова послідовність, її границя (275). § 2. Прогресії (287). *Відповіді до вправ* (293)

Тема 12. Границя і неперервність функції (294)

§ 1. Границя функції (294). § 2. Неперервність функції (301). *Відповіді до вправ* (308)

Тема 13. Похідна (309)

§ 1. Означення і основні властивості похідної (309). § 2. Похідні елементарних функцій (315). *Відповіді до вправ* (323)

Тема 14. Застосування похідної (324)

§ 1. Дотична (324). § 2. Зростання і спадання функції (326). § 3. Локальний екстремум (326). § 4. Опуклість функції (328). § 5. Побудова графіка функції (329). § 6. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції (331). § 7. Задачі на екстремум (332). § 8. Доведення нерівностей (332). § 9. Доведення тотожностей (334). *Відповіді до вправ* (335)

Тема 15. Інтеграл (337)

§ 1. Первісна та невизначений інтеграл (337). § 2. Диференціальні рівняння (початкові відомості) (343). § 3. Визначений інтеграл (345). *Відповіді до вправ* (352)

Тема 16. Планіметрія (353)

§ 1. Логічна структура курсу геометрії. Основні поняття (353). § 2. Кути (355). § 3. Трикутники (359). § 4. Кути трикутника і многокутника (361). § 5. Геометричні побудови (368). § 6. Чотирикутники (380). § 7. Подібні фігури. Подібність (387). § 8. Метричні співвідношення в трикутнику (389). § 9. Довжина кола (394). § 10. Площі фігур (396). § 11. Координати і вектори на площині (402). *Відповіді до вправ* (414)

Тема 17. Стереометрія (415)

§ 1. Аксіоми стереометрії (415). § 2. Паралельність у просторі (416). § 3. Перпендикулярність прямих і площин (423). § 4. Многогранники (437). § 5. Тіла обертання (448). § 6. Об'єми тіл (455). § 7. Комбінації геометричних тіл (470). § 8. Координати і вектори у просторі (481). *Відповіді до вправ* (487)

Додатки (490)

Навчальний посібник

Ушаков Рудольф Петрович

ПОВТОРЮВАЛЬНИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Редактори *Н.Г. Петрик, О.К. Артеменко*
Обкладинка художника *В.О.Гурлєва*
Художній редактор *С.В. Анненков*
Коректор *Л.В. Магда*

Підписано до друку 01.03.99. Формат 60 x 84 1/16.
Папір офсетний № 1. Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 29,3.
Обл.-вид. арк. 36,66. Тираж 5000 прим. Зам. 28.

Видавництво «Техніка». 254053 Київ, вул. Обсерваторна. 25
Свідоцтво про державну реєстрацію № 02473145 від 22.12.95.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
256400 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса. 4

Повторювальний курс МАТЕМАТИКИ

Заслужений учитель України, двічі лауреат Соросівської премії Рудольф Петрович УШАКОВ - учитель-методист середньої школи № 173 м. Києва. За 35 років педагогічної роботи написав багато книг, статей. Серед книжок Р. П. Ушакова назвемо такі: "Розв'язування нерівностей", "Доведення нерівностей", "Математика для поступающих в вузы", "Нерівності", "Письменные работы по математике", "Математика. Довідковий повторювальний курс", "Кути у стереометрії", "Тригонометрія. Довідник-задачник". Розробив ряд методичних посібників: "Як оформляти тестові завдання з математики", "Як оформляти письмову контрольну роботу", "Готуємось до олімпіад", "Посібник з розв'язування екзаменаційних завдань з математики за курс середньої школи" та інші.

«Техніка»